

Tabla de contenidos

Resolución de sistemas de ecuaciones usando Ms. Excel	2
Introducción	2
Instalando las herramientas necesarias	3
Activar: <i>Buscar objetivo</i>	4
Activar: <i>Solver</i>	5
Ecuación de una incógnita	7
Método gráfico	7
Herramienta “Buscar objetivo”	9
Herramienta “Solver”	13
Ejemplo 3.1	16
Sistema de ecuaciones	18
Método de la matriz inversa	18
Operaciones matriciales en Excel	18
Ejemplo 3.2	21
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de la matriz inversa	25
Ejemplo 3.3	26
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales y NO lineales utilizando SOLVER	27
Ejemplo 3.4	30
Ejemplo 3.4	32
Ejemplo 3.5	33
Ejemplo 3.6	33
Resultados de error	34
Números irracionales característicos	35
La notación científica	37

Resolución de sistemas de ecuaciones usando Ms. Excel

Introducción

A continuación se brinda una breve síntesis acerca de la clasificación de sistemas de ecuaciones para introducir a su resolución utilizando las herramientas que brinda Ms. Excel para cada caso.

Una **ecuación** se dice **lineal** si es posible reordenarla de modo que la variable aparezca solo a la primera potencia.

$$\text{Ej: } 2x + \frac{x}{3} = 14$$

Las ecuaciones lineales, de una sola variable, tienen una sola raíz, siempre perteneciente al conjunto de números reales.

$$2x + \frac{x}{3} = 14$$

$$\frac{6}{3}x + \frac{x}{3} = 14$$

$$\frac{7}{3}x = 14$$

$$x = 14 * \frac{3}{7}$$

$$x = 6$$

Una ecuación se dice **no lineal** si **no** es posible reordenarla de modo que la variable aparezca solo a la primera potencia.

$$\text{Ej: } 2x^2 + \frac{x}{3} = 74$$

$$\sqrt{x} + \frac{3x}{2} = 28$$

$$\ln(x) - 5 = -4$$

Las ecuaciones no lineales **pueden** tener múltiples raíces y las mismas **podrían** ser reales o complejas, dependiendo del caso. Las ecuaciones no lineales suelen ser complicadas de resolver en forma analítica y por ello, para hallar las raíces, se utilizan métodos numéricos o gráficos.

Además de la posibilidad de tener múltiples incógnitas debe considerarse el incremento de tamaño del sistema a resolver. Es decir, que al tener solo una incógnita tendremos que resolver una ecuación. Pero aumentando el número de incógnitas se presenta la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones, con todas las variantes que esto puede presentar.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según las diversas propiedades de cada uno.

Por ejemplo, se pueden clasificar según el grado de las ecuaciones:

- Sistema **lineal**: si todas las ecuaciones son lineales.
- Sistema **no lineal**: si no todas las ecuaciones son lineales.

Por otro lado, también se pueden clasificar los sistemas según el número de ecuaciones o de incógnitas que presentan, es decir:

- Sistemas de dos ecuaciones.
- Sistemas de tres ecuaciones.
- Sistemas de "**n**" ecuaciones.

O bien de:

- Sistemas de una incógnita.
- Sistemas de dos incógnitas.
- Sistemas de tres incógnitas.
- Sistemas de "**n**" incógnitas.

Además, cada caso puede presentarse como:

- Sistema **compatible**: es el que tiene solución.

Dependiendo del número de soluciones puede ser:

- Sistema compatible determinado si tiene una **única** solución.
- Sistema compatible indeterminado si tiene **múltiples** soluciones.
- Sistema **incompatible**: es el que no tiene solución.

Instalando las herramientas necesarias

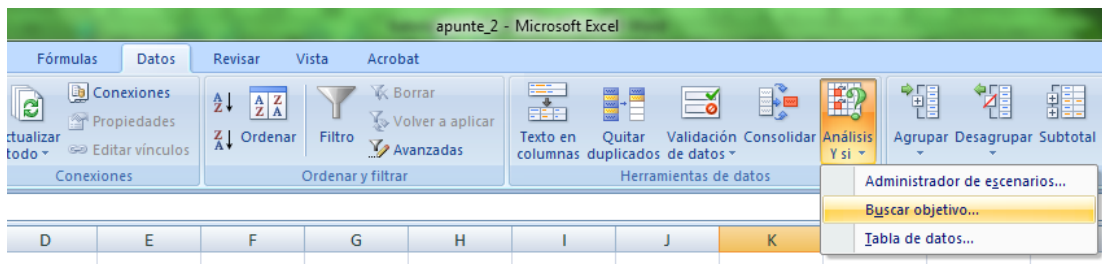
Para resolver los ejercicios propuestos en este capítulo, se requiere tener activas dos herramientas:

- Buscar objetivo
- Solver

Antes de comenzar a trabajar, se indicará como visualizar si las mismas se encuentran entre las opciones del entorno de trabajo personal, y si no lo estuvieran, se detallará como activarlas.

Activar: *Buscar objetivo*

Esta herramienta se encuentra en la cinta de opciones, dentro de la pestaña “**Datos**”, en la ficha “**Herramientas de datos**”, en la opción “**Análisis, Y si**”. Al desplegar las opciones en ese punto, se encontrará la herramienta “**Buscar objetivo**”.

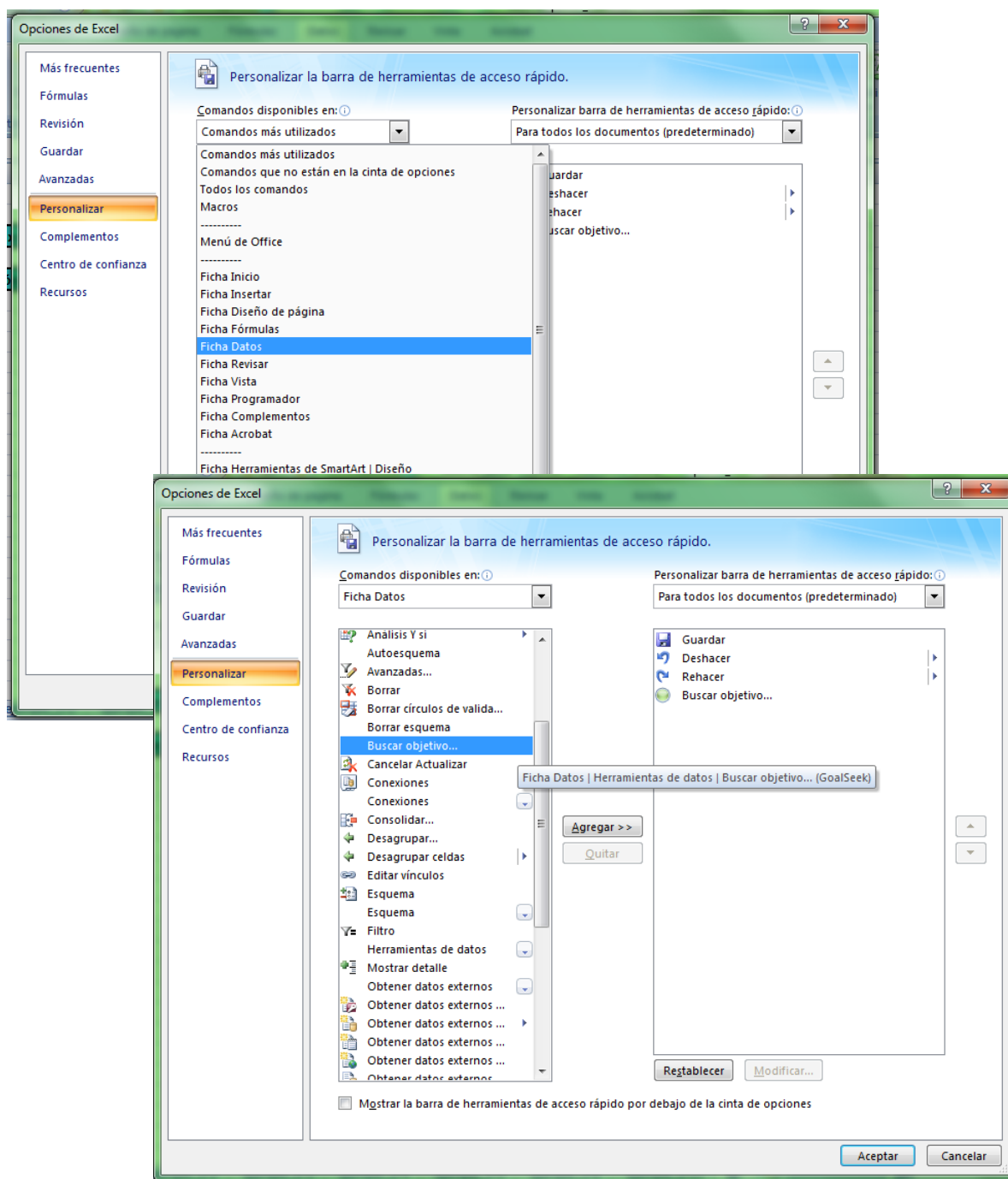


Si no encontrara esta opción, debe dirigirse al símbolo de Microsoft y seleccionar “opciones de Excel”.



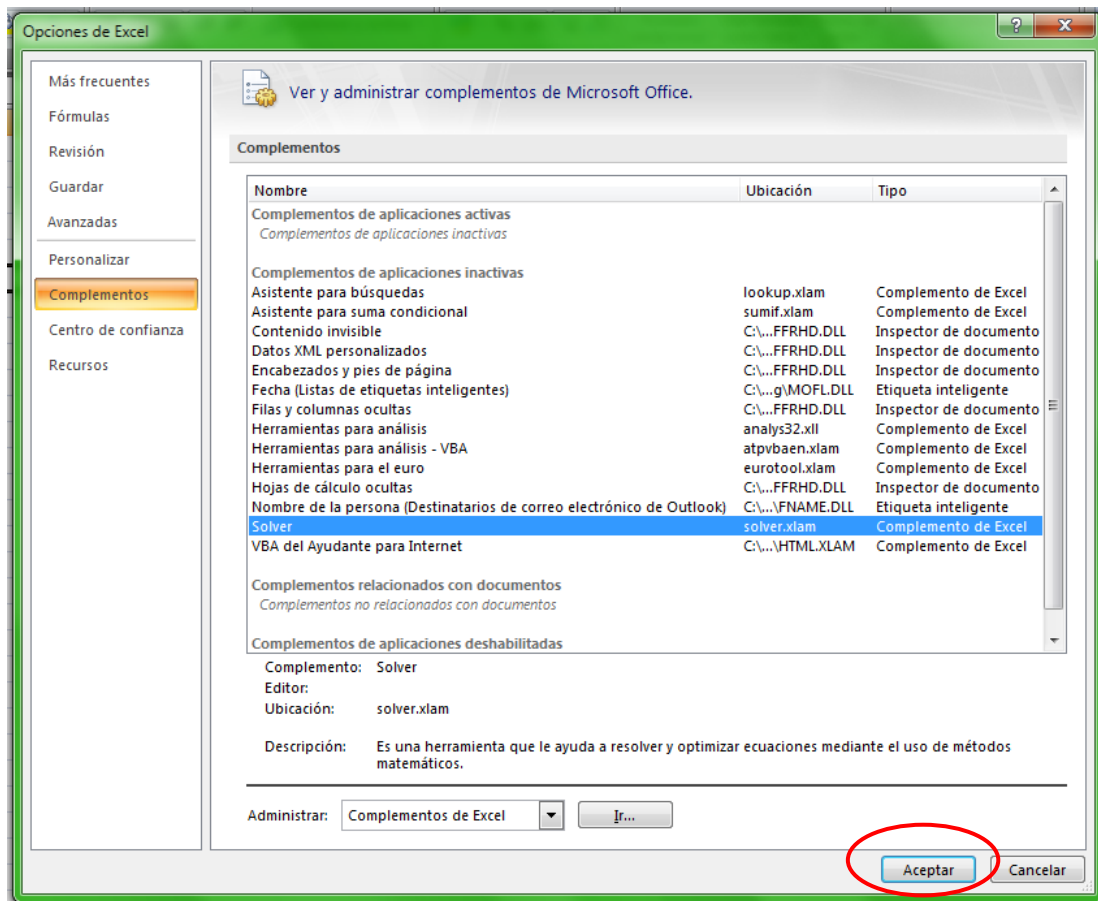
Luego de optar por “**Personalizar**” en las opciones de la izquierda, seleccionar “**Ficha de datos**” en “comandos disponibles en:”.

Si no encontrara esta opción, debe dirigirse al símbolo de Microsoft y seleccionar “opciones de Excel”.



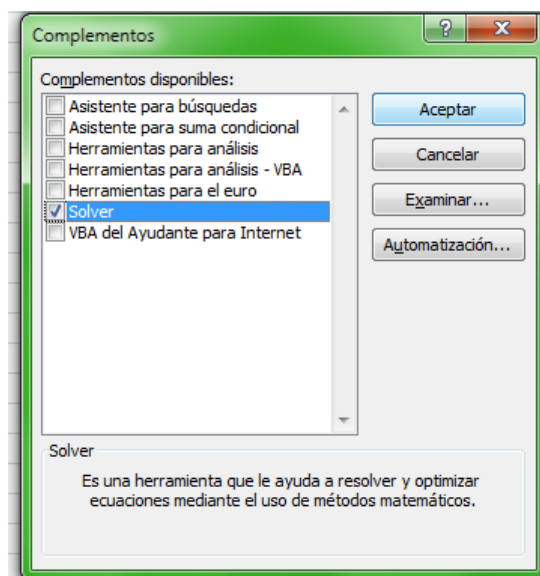
Activar: Solver

Para activar el Solver de Ms. Excel, diríjase nuevamente al símbolo de Microsoft, y esta vez seleccione la opción **“Complementos”**

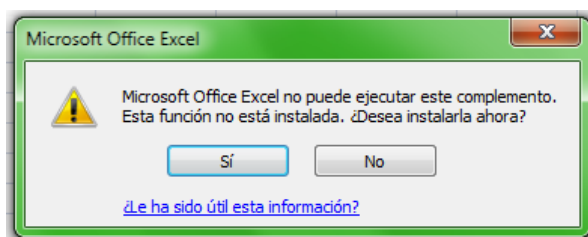


Una vez marcada la opción Solver en el cuadro de la derecha, debe **Aceptar** la opción escogida.

En ese momento se abrirá un cuadro como el siguiente, en el que debe tildar la opción **"Solver"** y nuevamente **Aceptar**.



Con eso será suficiente para que la opción aparezca entre las herramientas brindadas en la pestaña **Datos/ Análisis**. En caso que Ms. Excel no tenga instalado este complemento, aparecerá el siguiente mensaje, el cual debe **Aceptar** para iniciar la instalación.



Ecuación de una incógnita

En el caso básico de presentarse una ecuación de una incógnita, Ms. Excel provee al menos tres alternativas para resolverla.

Método gráfico

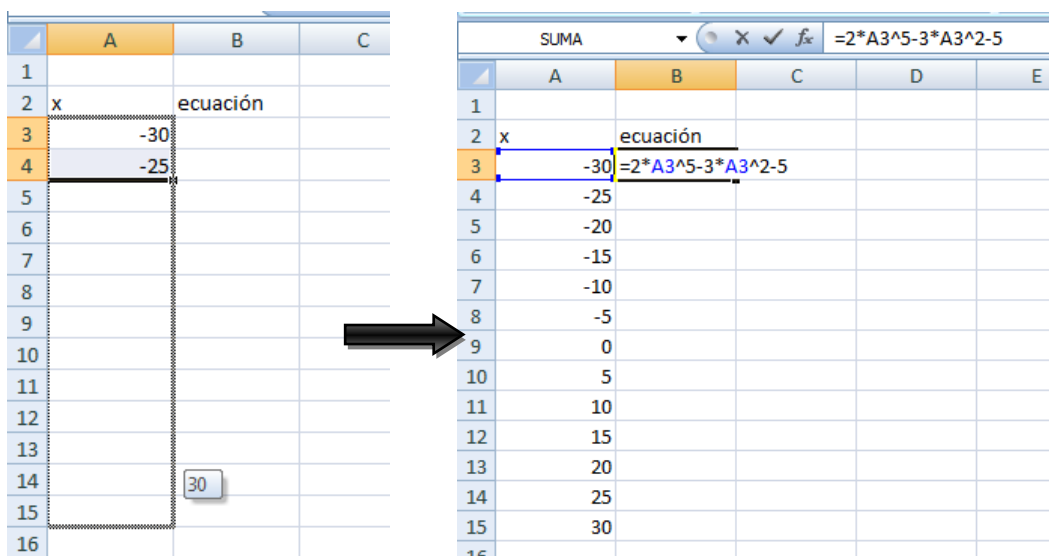
Un método elemental es el **Método gráfico**. Para hacer uso de este método se propone la generación de una tabla x-y en cierto rango de valores para la variable x y luego utilizar un gráfico de dispersión con línea para hallar visualmente la raíz. Este método presenta como ventaja que rápidamente se puede **aproximar** un valor para la misma. La principal desventaja radica justamente en que la exactitud del resultado depende del criterio del observador y de la edición del gráfico y su formato. Por ello este método solo se recomienda para hallar un valor **inicial** o **semilla** al momento de resolver una ecuación de una incógnita con uno de los restantes métodos propuestos en este apunte.

Como ejemplo se presenta la siguiente ecuación:

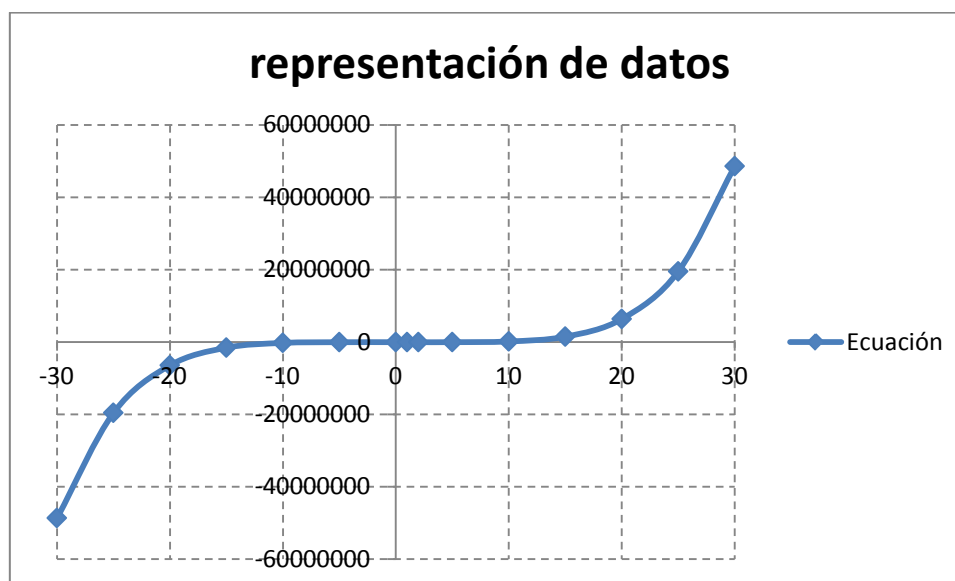
$$2x^5 - 3x^2 = 5$$

La metodología, como se mencionó en los párrafos precedentes es generar una tabla x-y en el rango que se encuentran las raíces de la ecuación y representar los resultados en una gráfica de dispersión. En este caso, para generar la tabla, se requiere una ecuación implícita por lo que la función a utilizar será:

$$2x^5 - 3x^2 - 5$$



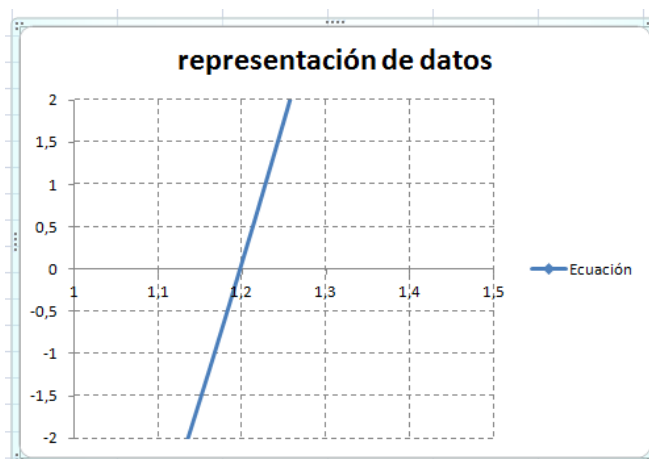
En primer lugar se inicia la serie de datos correspondientes a la variable independiente y luego se genera la serie de la variable dependiente. Luego se grafican los datos utilizando el tipo de gráfico adecuado (gráfico de dispersión).



Observando la gráfica que resulta, se verifica lo mencionado en las desventajas del método. A pesar que se edite la gráfica buscando reducir el rango visualizado de modo de hacer algo equivalente a un zoom sobre la zona en que se encuentra el punto buscado, siempre se está utilizando un gran componente personal lo que hará variar el resultado según el usuario.

El gráfico x-y de la figura no es muy útil porque el rango de los valores "y" es demasiado grande.

Si se muestra la función sobre el intervalo $1 \leq x \leq 2$ se logra observar la raíz con más exactitud.



Herramienta “Buscar objetivo”

En el caso que se conozca el resultado deseado de una fórmula sencilla, pero no la variable que determina el resultado, puede utilizarse la función **Buscar objetivo** haciendo clic en **Buscar objetivo** en el menú **Herramientas**.

Esta herramienta utiliza en forma predeterminada el método de Newton para hallar la solución. Esto puede modificarse desde el botón **“Opciones”** que se encuentra en la herramienta Solver, que se describirá en breve.

En el próximo ejemplo se desea hallar la variable que cumple la siguiente condición:

$$2x - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) = 1,085 \quad (\text{Ecuación 1})$$

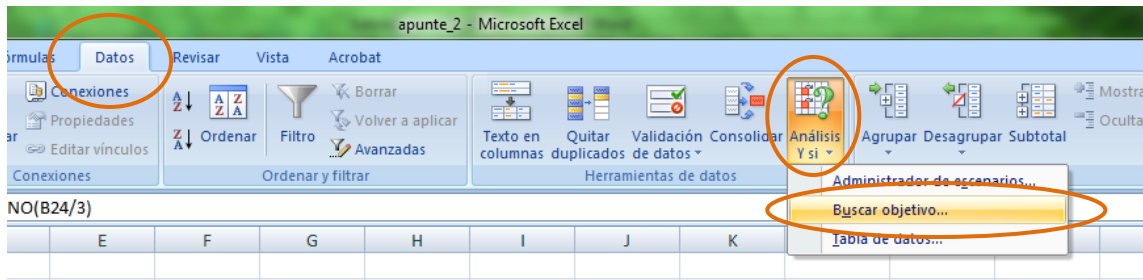
Para ello, primeramente se presentan los datos sobre la hoja de cálculo.

En una celda se escribirá un valor tentativo para la variable (que en este caso se denomina “x”) y en una celda cercana se escribirá la ecuación, haciendo referencia a la mencionada celda “x”.

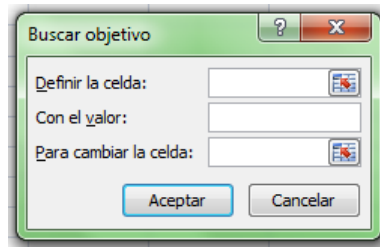
Note que el valor que se utiliza se encuentra en las celdas B24 (incógnita) y B26 (ecuación) y que los datos consignados en las celdas A24 y A26 solo se utilizan para dar un entorno de trabajo ordenado.

SUMA X ✓ f_x =2*B24-SENO(B24/3)					
	A	B	C	D	E
22					
23					
24	x=	2			
25					
26	Ecuación	=2*B24-SENO(B24/3)			
27					
28					

Una vez que se escribió la ecuación, debe dirigirse a la cinta de opciones, y dentro de la pestaña **“Datos”** busque la ficha **“Herramientas de datos”**. Despliegue las opciones de **“Análisis, Y si”** y seleccione finalmente **“Buscar objetivo”**.



Una vez seleccionada esa opción, se visualizará el siguiente formulario:



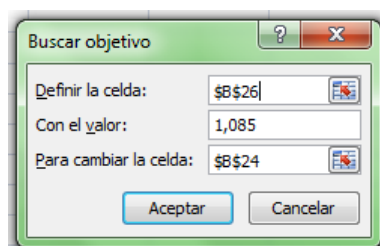
ATENCIÓN

Este ícono le permite cerrar temporalmente el formulario en el que se encuentra facilitando la selección de la celda (o el rango de celdas) que se requieren en el casillero contiguo al cual figura dicho ícono. Puede encontrarlo en la herramienta Buscar objetivo, Solver y durante la creación de gráficos entre otros.

En el recuadro **“Definir la celda”** debe ingresarse la celda en la que se encuentre cargada la Ecuación a resolver. En el ejemplo es la celda **B26**.

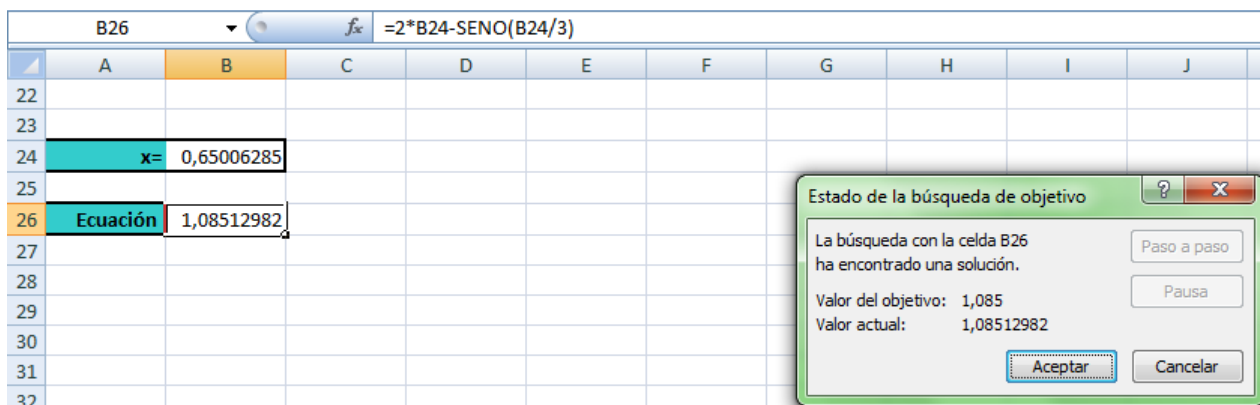
En el recuadro **“Con el valor”** debe ingresarse el **resultado** que se desea obtener. Es decir, puede ser 0 en el caso de una ecuación implícita o el término independiente. Según lo planteado en el ejemplo, este valor es 1.085 y el mismo se encuentra en la celda B24. Note que en este caso puede ingresarse directamente el valor buscado (1.085) o la referencia a la celda en la que se encuentra este valor.

En el casillero **“Para cambiar la celda”** debe ingresar la referencia a la celda en la que se encuentra el valor tentativo que soluciona la ecuación. Este valor es el que Ms. Excel modifica hasta hallar la solución al problema, o hasta que concluye su búsqueda. En el ejemplo, la celda a modificar es aquella en la que se encuentra el valor de **“x”**, es decir **B24**.



Se presiona la tecla **“Aceptar”** y comenzarán las iteraciones en búsqueda del resultado.

Cuando las iteraciones concluyen, ya sea porque se ha superado el número predeterminado o porque se ha hallado una solución, se visualiza una pantalla. En el segundo caso (Excel ha hallado una solución) la pantalla es similar a la siguiente:



Al leer el mensaje que brinda el utilitario se concluye que:

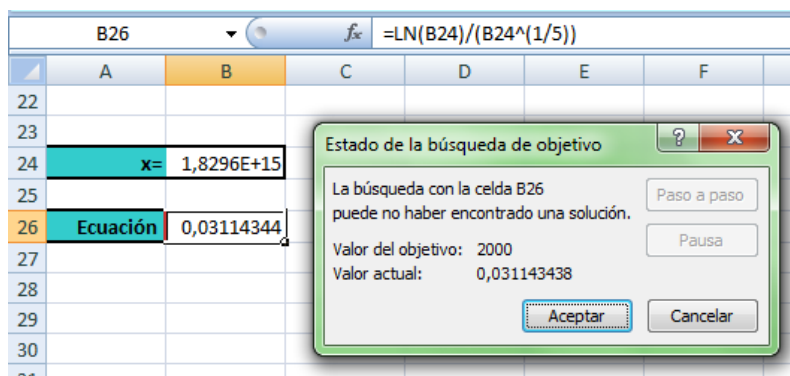
*La ecuación se hallaba cargada en la celda B5, que se intentaba que dicha celda llegue a tener un valor igual a 1,085 y que con el valor encontrado por Ms. Excel (B3=0,65006285), la mencionada celda **alcanza** el valor objetivo.*

Es importante **LEER** los mensajes de salida que Ms. Excel provee.

Observe este resultado. Si la ecuación a solucionar es:

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt[5]{x}} = 2000 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Como valor semilla, en la celda B24 se colocó 2000. El resultado obtenido luego de aplicar el procedimiento antes mencionado es el siguiente:



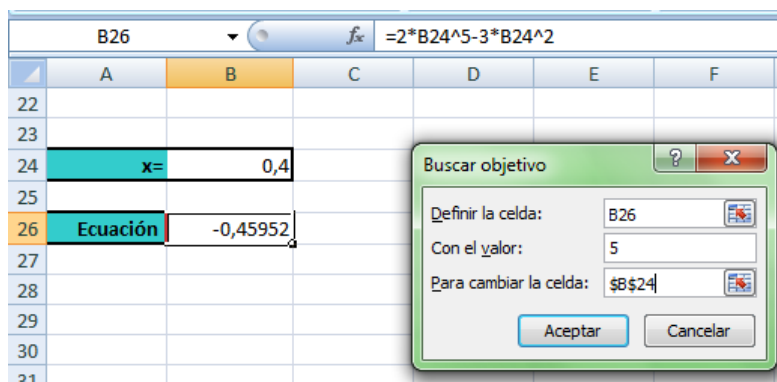
El resultado indica que Excel **NO** ha hallado la solución al problema. En el mensaje se destaca que se debía hallar un valor que haga la ecuación igual a 2000 y con las iteraciones permitidas llegó a un valor igual a 0,03114344.

CONCLUSIÓN 1: Es muy importante LEER los mensajes al finalizar las búsquedas.

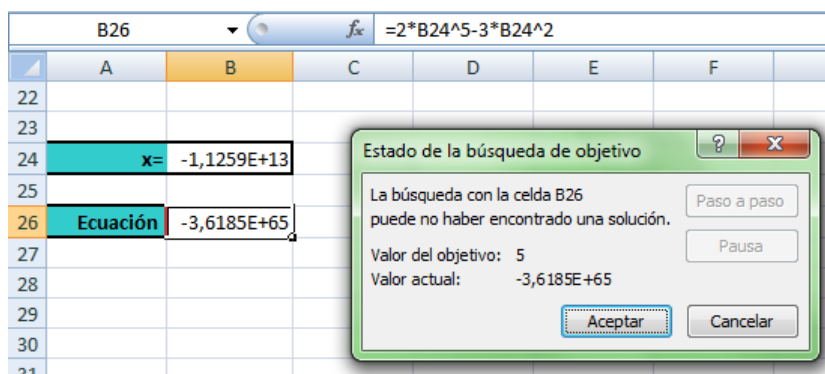
Ahora inserte la siguiente ecuación:

$$2x^5 - 3x^2 = 5 \quad (\text{Ecuación 3})$$

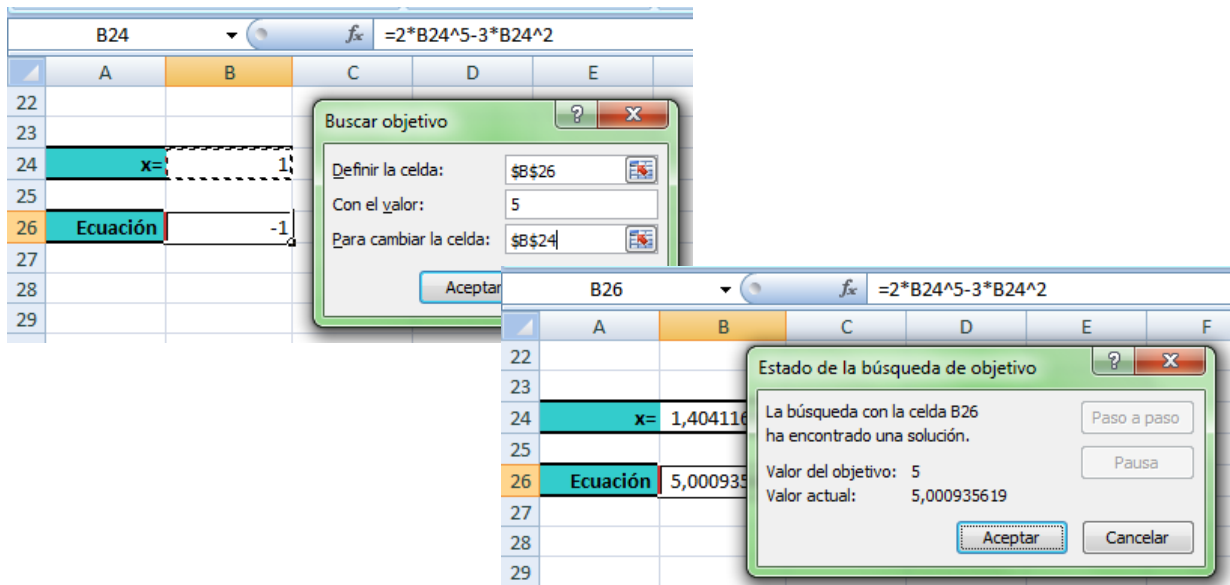
Como valor inicial se sugiere utilizar un $x=0,4$. Busque el valor de x que resuelva la ecuación anterior.



El resultado que se obtiene es el siguiente:



Ahora bien, si cambia el valor inicial a un valor cualquiera, diferente de 0,4 la herramienta resuelve la ecuación sin dificultades. El siguiente resultado se obtuvo con un valor inicial de $x = -10$.



CONCLUSIÓN 1: Es muy importante LEER los mensajes al finalizar las búsquedas.

CONCLUSIÓN 2: Si Excel no hallara una solución, se recomienda modificar el valor inicial de la variable e intentar resolver nuevamente la ecuación. Halle una función

Herramienta “Solver”

La herramienta “Solver” también permite hallar la solución a una ecuación, entre otros resultados que puede brindar. Esto, al momento de utilizar el solver, se traducirá como “*Valor de la celda objetivo: hallar valores de*” (ver metodología de uso de **solver**).

Con Solver, puede buscarse el valor que resuelve una fórmula de celda, (denominada celda objetivo), en una hoja de cálculo. Solver funciona en un grupo de celdas que estén relacionadas, directa o indirectamente, con la fórmula de la celda objetivo. Excel modifica los valores en las celdas de contenido variable que se especifiquen, denominadas celdas ajustables, para generar el resultado especificado en la fórmula de la celda objetivo.

Esta herramienta también permite aplicar restricciones para restringir los valores que se consideran como solución al problema. Las restricciones pueden hacer referencia a otras celdas a las que afecte la fórmula de la celda objetivo.

Otra opción, es utilizar el Solver para determinar el valor máximo o mínimo de una celda (función, variable dependiente) cambiando otras celdas (variables independientes). Para ellos se hará uso de las opciones “*Valor de la celda objetivo: Máximo*” o “*Valor de la celda objetivo: Mínimo*”.

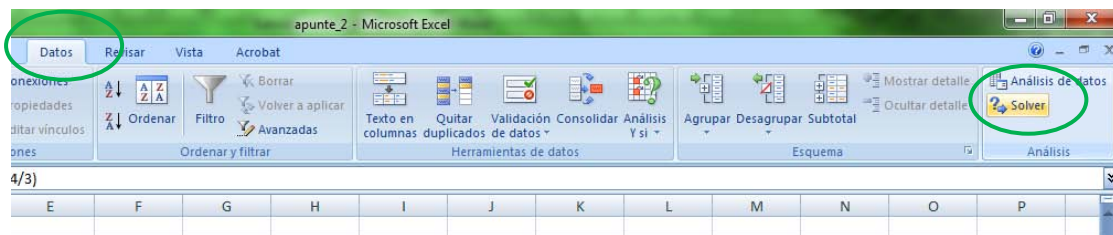
Como primer ejemplo de esta herramienta se resolverá la ecuación:

$$2x - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) = 1,085 \quad (\text{Ecuación 1})$$

Debe ingresarse en una celda el *valor* de la variable independiente, que en este caso es “x” y en otra deberá ingresarse la ecuación en forma **implícita**.

	SUMA ✕ ✓ fx $=2*B24-SENO(B24/3)$				
	A	B	C	D	E
22					
23					
24	x=	1,404116923			
25					
26	Ecuación	$=2*B24-SENO(B24/3)$			
27					

Luego hay que dirigirse a la cinta de opciones, y en la pestaña “**Datos**”, dentro de la ficha “**Análisis**”, seleccionar Solver.



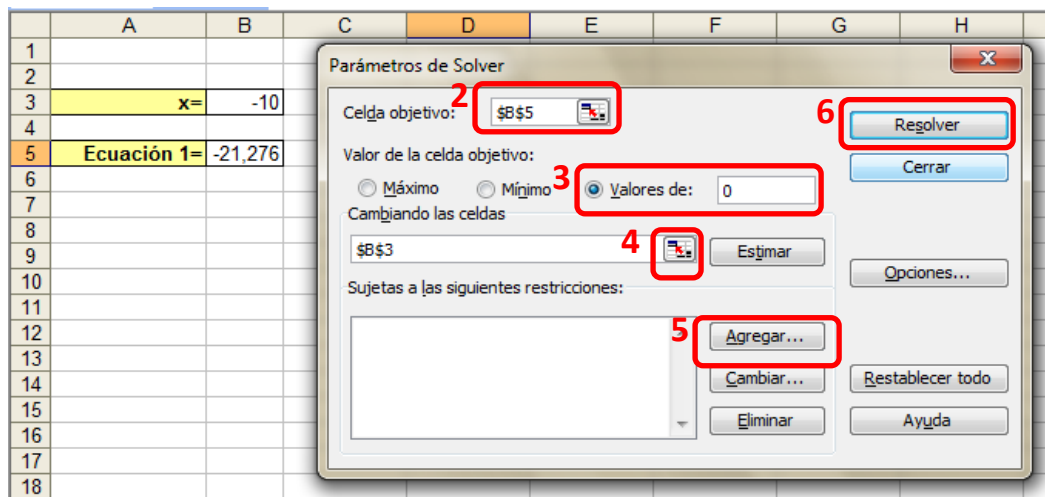
Se abrirá un nuevo formulario, en el que, al igual que en la herramienta “**Buscar objetivo**” debe completarse con los datos solicitados para obtener el resultado que se está buscando.

En el lugar donde dice “**celda objetivo**” debe completarse con la referencia a la celda en la que se encuentra la ecuación a resolver.

Luego hay que hacer clic en la opción “valor de la celda objetivo: **valores de**” y completar este casillero con “0”. *(En este punto, para el caso en lo que se tiene solo una ecuación, también puede completarse con el valor del término independiente, solo si la ecuación fue escrita en forma explícita en la celda en la que se hace referencia en “celda objetivo”).*

En el lugar en que se indica “**cambiando las celdas**” debe hacerse referencia a la celda en la cual se encuentra el valor de la variable independiente.

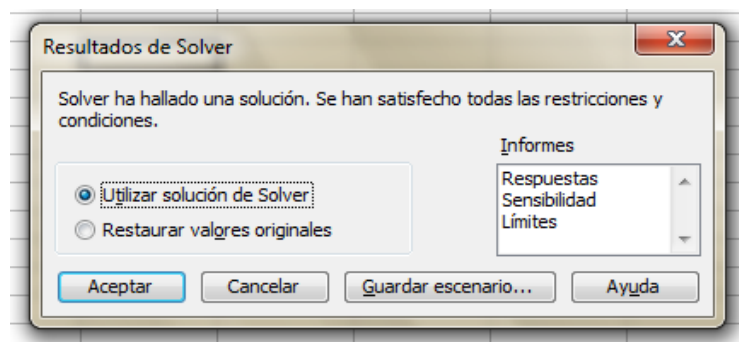
Para finalizar el procedimiento hay que hacer clic en el botón “Resolver”.



La síntesis de la metodología es la siguiente:

1. Ir a Datos/Análisis/Solver.
2. Seleccionar la celda que tiene la fórmula (Celda objetivo)
3. Ingresar el valor de la celda objetivo (valores de 0)
4. Seleccionar la celda que tiene el valor inicial (Cambiando la celda)
5. Agregar restricciones si fuera necesario (se verá en otro ejemplo)
6. Resolver

Como resultado del procedimiento, Solver devuelve un mensaje, en el cual indica los resultados obtenidos.



Antes de **"Aceptar"** debe seleccionarse la opción **"Utilizar solución de Solver"** en caso que el usuario esté conforme con el resultado obtenido o **"Restaurar valores originales"** si se desea que no se realice ningún cambio sobre los datos originales.

La herramienta también brinda la opción de tres tipos de informes adicionales:

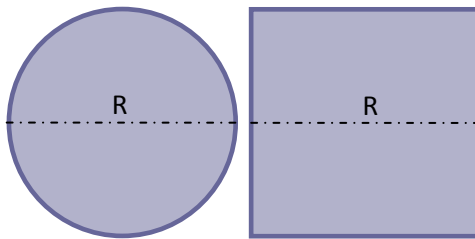
- Informe de Respuestas
- Informe de Sensibilidad
- Informe de Límites

Solo basta con hacer clic en el deseado para seleccionarlo y luego hacer en “**Aceptar**”, cerrando así el proceso de utilización del Solver. Estos tres informes se generan en sendas hojas de cálculo.

Como se mencionó anteriormente, una de las ventajas de usar la herramienta “Solver” es que pueden agregarse restricciones a la/s variable/s independiente/s.

Analice el siguiente caso ejemplo.

Ejemplo 3.1



Deben generarse 3 círculos de diámetro (R) y 2 cuadrados de lado (R) de modo que la suma de la superficie ambos sea igual 120 m².

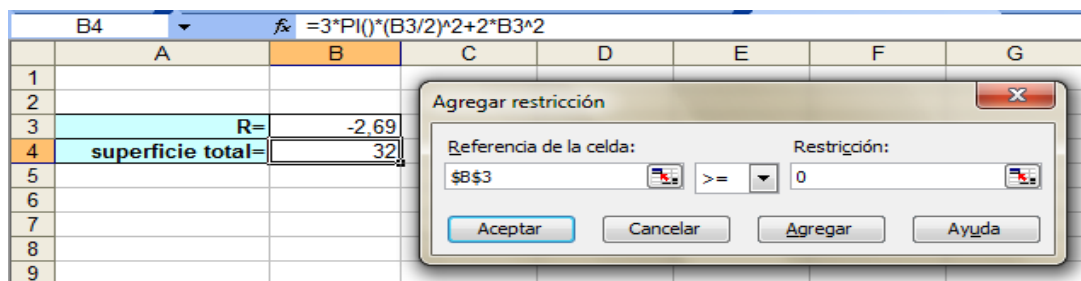
Resolución

La ecuación que representa la problemática es la siguiente:

$$3 \times \pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2 + 2 \times R^2 = 120$$

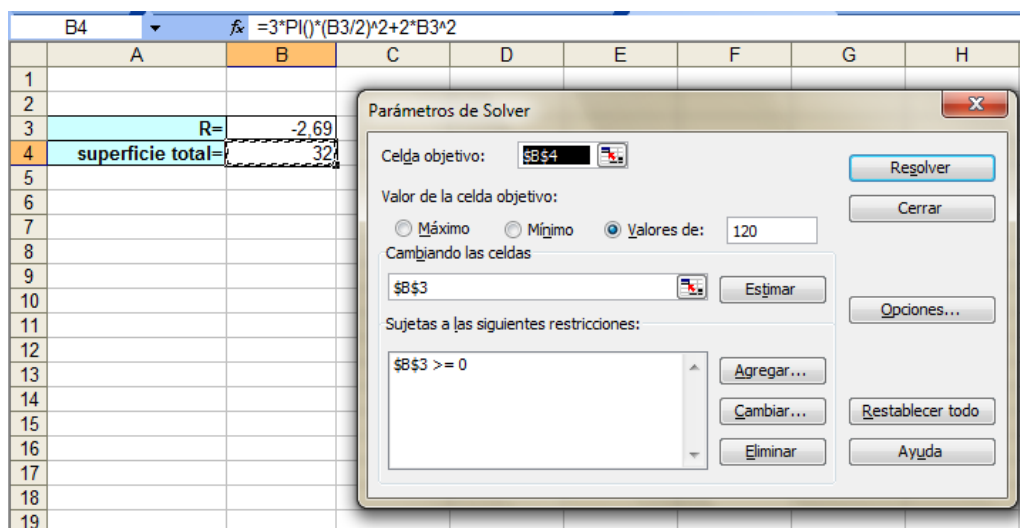
Note que se obtiene una ecuación de una incógnita de 2º grado. Por ello, las soluciones al problema son dos. Sin embargo, dado que el dato representado por R es una longitud, solo interesan los resultados que sean mayores o iguales a cero (positivos).

Para volcar esa restricción debe hacerse clic en la opción **“Agregar”**. Se abrirá un formulario con opciones desplegables en la que se vuelcan, una a una, cada una de las restricciones requeridas por cada situación.



Una vez volcadas todas las restricciones, se hace clic en **“Aceptar”** y se vuelve al formulario general de Solver en el cual puede verificarse que los datos cargados sean correctos.

Notar que al tratarse de una sola ecuación, se eliminó el término independiente de la ecuación (ver barra de fórmulas) y el mismo está representado en la casilla *“valor de la celda objetivo: valores de 120”*.



El resultado obtenido es:

	A	B
1		
2		
3	R=	5.25
4	superficie total=	120
5		
6		

Observe que si la variable R no representara una magnitud perteneciente a los números positivos, el resultado (-5.25) también podría ser resultado de la ecuación.

Sistema de ecuaciones

Método de la matriz inversa

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones no es posible utilizar la herramienta “Buscar objetivo”. Sin embargo es posible buscar las soluciones con dos alternativas: una es utilizar la herramienta **Solver** y la segunda es aplicar el **método de la matriz inversa**. Este último se explicará en este apartado.

Como se recordará, este método solo puede aplicarse a sistemas de ecuaciones lineales.

Operaciones matriciales en Excel

Una matriz es un arreglo bidimensional de números, es decir filas y columnas. Cada elemento de una matriz está caracterizado por el número de fila y de columna. En Excel, cada celda está caracterizada por una letra que identifica a las columnas y por un número que identifica las filas. Por ello, es muy sencillo representar matrices en Excel, utilizando una celda para cada elemento de la misma.

Las líneas verticales de las matrices se agregan con la herramienta de edición de “bordes”.

	A	B	C	D
1		6	0	-3
2	A=	-1	4	9
3		8	-5	2
4				
5		5	-5	-7
6	B=	0	9	2
7		4	-1	0

Para realizar la **suma de matrices**, debe seleccionarse el rango de celdas en el que se desea obtener la matriz resultante. Tener en cuenta que es indispensable que el rango seleccionado sea consistente con el tipo de operación. Para realizar suma de matrices hay que seleccionar todo el rango de la matriz aplicar el operador “+” y luego seleccionar el rango de la segunda matriz. Pueden sumarse tantas matrices como se desee. Una vez cargadas las matrices a sumar deben aplicarse simultáneamente las teclas **CTRL+SHIFT+ENTER**. Observe la barra de fórmulas en la siguiente captura de pantalla:

	G2								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3			11	-5	-10
3	A=	-1	4	9	A+B=	-1	13	11	
4		8	-5	2			12	-6	2
5									
6		5	-5	-7					
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					

Cada matriz se indica separando por dos puntos la celda en la que se encuentra el elemento 1 de la referencia de la celda en la que se encuentre el último elemento. En este caso, para la matriz A, el primer elemento se ubica en la celda B2 y el último elemento se ubica en la celda D4. Por lo tanto, para indicar la matriz A deberá escribir (B2:D4).

La sustracción de matrices se realiza de forma análoga a la suma.

Para realizar el **producto de matrices**, siempre que las mismas sean consistentes para poder realizar esta operación, el comando a utilizar es “**MMULT(matriz 1; matriz 2)**”.

MMULT(matriz 1; matriz 2)

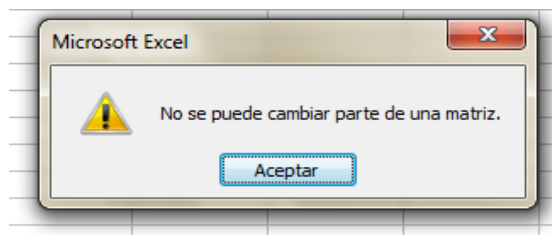
Primeramente se selecciona el **rango** de celdas en el que se ubicará el resultado del producto, se escribe antes mencionado, y luego, simultáneamente debe aplicar la combinación de teclas característica para trabajar con matrices en Excel: **CTRL+SHIFT+ENTER**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3			11	-5	-10
3	A=	-1	4	9		A+B=	-1	13	11
4		8	-5	2			12	-6	2
5									
6		5	-5			=mmult(B2:D4;B6:D8)			
7	B=	0	9	2		A*B=			
8		4	-1	0					
9									

Luego de resuelta la operación, Excel no permitirá eliminar el resultado en forma parcial. Observar que en la barra de fórmula, al seleccionar la matriz A*B se delimita entre **corchetes llaves** todo el resultado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3			11	-5	-10
3	A=	-1	4	9		A+B=	-1	13	11
4		8	-5	2			12	-6	2
5									
6		5	-5	-7			18	-27	-42
7	B=	0	9	2		A*B=	31	32	15
8		4	-1	0			48	-87	-66
9									

Si el usuario se posiciona sobre una celda de la matriz e intenta eliminar o modificar un valor, Excel no le permitirá hacerlo mostrándole el siguiente mensaje:



Para eliminar la matriz completa debe seleccionarse la misma en forma completa y luego aplicar el botón “Eliminar” (**Supr**).

Para calcular la **inversa** de una matriz, como en los casos anteriores, debe seleccionarse el rango en el cual se ubicará el resultado, y posteriormente utilizar el comando **MINVERSA(matriz)**.

En la siguiente imagen se ha calculado la inversa de la matriz A. Por ello, se seleccionaron las celdas desde L2 hasta N4, luego se escribió en la barra de fórmulas **=MINVERSA(B2:D4)**, se aplicaron simultáneamente las teclas “**CTRL+SHIFT+ENTER**” y se obtuvo el resultado que figura en la imagen.

SUMA		=MINVERSA(B2:D4)												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		6	0	-3			11	-5	-10			0,133	0,038	0,030
3	A=	-1	4	9		A+B=	-1	13	11		A ⁻¹ =	0,185	0,090	-0,128
4		8	-5	2			12	-6	2			-0,068	0,075	2:D4)
5														
6		5	-5	-7			18	-27	-42					
7	B=	0	9	2		A*B=	31	32	15					
8		4	-1	0			48	-87	-66					

Se recuerda que una matriz puede invertirse solo si su determinante es distinto de cero.

Para calcular esta propiedad de una matriz se utiliza el comando “**MDETERM(matriz)**”. En este caso, dado que el resultado obtenido será un escalar, no es necesario aplicar la combinación de teclas “**CTRL+SHIFT+ENTER**”, sin embargo, si lo utiliza, no se modificaran los resultados obtenidos.

A continuación se sintetizan los comandos propios de operaciones con matrices de Excel.

Operaciones con matrices	
Adición	= (matriz 1) + (matriz 2)
Sustracción	= (matriz 1) - (matriz 2)
Producto	= MMULT(matriz 1;matriz 2)
Cálculo de inversa	=MINVERSA(matriz 1;matriz 2)
Cálculo de determinante	=DETERMINANTE(matriz)
Transposición	=TRANSPONER(matriz)

Ejemplo 3.2

Considerando las siguientes matrices cuadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 9 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Representar cada matriz como un arreglo y resolver las siguientes operaciones matriciales:

$A+B=C_1$; $B+A=C_2$; $A-B=C_3$; $A \times B=C_4$ y $2A=C_5$.

Resolución

En primer lugar se vuelcan los datos a la hoja de cálculo para luego realizar las operaciones solicitadas.

	A	B	C	D	E
1					
2		6	0	-3	
3	A=	-1	4	9	
4		8	-5	2	
5					
6		5	-5	-7	
7	B=	0	9	2	
8		4	-1	0	
9					

Para realizar la suma de dos matrices, en primer lugar deben seleccionarse las celdas en las que se ubicará el resultado obtenido. Observe que en este caso se selecciona un arreglo cuadrado de tres por tres.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2					
5									
6		5	-5	-7					
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9									

El paso siguiente es indicar la operación a realizar. Observe con atención como se indican las matrices a sumar. El primer grupo, indicado en color azul corresponde a la matriz A y el segundo grupo (verde) referencia a la matriz B.

MDETERM									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2					
5									
6		5	-5	-7					
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9									

Luego, se aplican simultáneamente las teclas “ctrl+shift+enter”.

El resultado obtenido, luego de editar el ancho de columnas y bordes, es el siguiente:

¿Qué resultado obtiene si utiliza la función “suma”? El resultado obtenido **NO** es el deseado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		6	0	-3						
3	A=	-1	4	9						
4		8	-5	2			11	-5	-10	
5							-1	13	11	
6		5	-5	-7			12	-6	2	
7	B=	0	9	2						
8		4	-1	0						
9										
10										
11										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2			11	-5	-10
5							-1	13	11
6		5	-5	-7			12	-6	2
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9							27	27	27
10						F.Sum=	27	27	27
11							27	27	27

El resultado que obtiene en este caso es el resultado de sumar uno a uno cada uno de los elementos de las dos matrices, es decir:

$$6+0+(-3)+(-1)+4+9+8+(-5)+2+5+(-5)+(-7)...$$

El resultado de la operación es el escalar “27” y no una matriz de tamaño 3x3. Dado que el rango de resultados seleccionado era una matriz, Excel repite el valor en cada una de las celdas.

Para realizar el cálculo B+A debe repetirse el método utilizado anteriormente.

MDETERM									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2			11	-5	-10
5						C ₁ =	-1	13	11
6		5	-5	-7			12	-6	2
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9							=B6:D8+B2:D4		
10						C ₂ =			
11									
12									

K14									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2			11	-5	-10
5						C ₁ =	-1	13	11
6		5	-5	-7			12	-6	2
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9							11	-5	-10
10						C ₂ =	-1	13	11
11							12	-6	2
12									

Como es de esperarse, el resultado obtenido es el mismo, dado que el orden de los sumandos no altera el resultado.

Para realizarse la resta de dos matrices se utiliza el signo “-” en lugar del “+”:

MDETERM									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2			11	-5	-10
5						C ₁ =	-1	13	11
6		5	-5	-7			12	-6	2
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9							11	-5	-10
10						C ₂ =	-1	13	11
11							12	-6	2
12									
13							=B2:D4-B6:D8		
14						A-B=			
15									
16									

L11									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2			11	-5	-10
5						C ₁ =	-1	13	11
6		5	-5	-7			12	-6	2
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9							11	-5	-10
10						C ₂ =	-1	13	11
11							12	-6	2
12									
13							1	5	4
14						A-B=	-1	-5	7
15							4	-4	2

El resultado se observa en la captura de pantalla de la derecha.

El producto de matrices requiere del uso del comando “MMULT()”.

Nuevamente se selecciona el rango adecuado para el resultado, se escribe el signo “=” y se escribe la fórmula deseada:

[illegible]

Recuerde que en el producto matricial es importante considerar el orden de los factores. El resultado obtenido, luego de cargar la fórmula y **presionar simultáneamente “ctrl+shift+enter”** es el siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		6	0	-3				
3	A=	-1	4	9				
4		8	-5	2		11	-5	-10
5					C ₁ =	-1	13	11
6		5	-5	-7		12	-6	2
7	B=	0	9	2				
8		4	-1	0				
9						11	-5	-10
10					C ₂ =	-1	13	11
11						12	-6	2
12								
13						1	5	4
14					A-B=	-1	-5	7
15						4	-4	2
16								
17						18	-27	-42
18					A ² =	31	32	15
19						48	-87	-66
20								

Para multiplicar una matriz por un escalar puede utilizarse directamente el signo habitual para realizar productos “*”.

Observe la siguiente figura como se indica el producto de un escalar por una matriz y el resultado de dicha operación en figura de la derecha.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		6	0	-3					
3	A=	-1	4	9					
4		8	-5	2		11	-5	-10	
5					C ₁ =	-1	13	11	
6		5	-5	-7		12	-6	2	
7	B=	0	9	2					
8		4	-1	0					
9						11	-5	-10	
10					C ₂ =	-1	13	11	
11						12	-6	2	
12									
13						1	5	4	
14					A-B=	-1	-5	7	
15						4	-4	2	
16									
17						18	-27	-42	
18					A ² =	31	32	15	
19						48	-87	-66	
20									
21									
22					2A=				
23									

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		6	0	-3				
3	A=	-1	4	9				
4		8	-5	2		11	-5	-10
5					C ₁ =	-1	13	11
6		5	-5	-7		12	-6	2
7	B=	0	9	2				
8		4	-1	0				
9						11	-5	-10
10					C ₂ =	-1	13	11
11						12	-6	2
12								
13						1	5	4
14					A-B=	-1	-5	7
15						4	-4	2
16								
17						18	-27	-42
18					A ² =	31	32	15
19						48	-87	-66
20								
21						12	0	-6
22					2A=	-2	8	18
23						16	-10	4
24								

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de la matriz inversa

Con los operadores mencionados puede resolverse un sistema de ecuaciones utilizando el método de la matriz inversa. Dada una matriz de coeficientes A, una matriz de términos independientes B y una matriz de variables X. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_{11} \times x_{11} + a_{12} \times x_{21} + a_{31} \times x_{31} = b_{11}$$

$$a_{21} \times x_{11} + a_{22} \times x_{21} + a_{32} \times x_{31} = b_{21}$$

$$a_{31} \times x_{11} + a_{32} \times x_{21} + a_{33} \times x_{31} = b_{31}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

Resumiendo:

- Un sistema de ecuaciones queda representado en forma matricial por $AX=B$
- La matriz A está formada por los coeficientes del sistema de ecuaciones.
- La matriz B está formada por los términos independientes.
- La matriz X está formada por los valores que constituyen la solución del sistema.

El procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$A \times X = B$$

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$$

$$X = A^{-1} \times B$$

- Calcular la matriz inversa de A (A^{-1}) usando la función MINVERSA
- Calcular el producto $A^{-1}B$ usando la función MMULT. El resultado obtenido será el vector X.
- Verificar el resultado: el producto AX debe ser igual a B.

Ejemplo 3.3

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

Resolución

A continuación se sintetizan el procedimiento de resolución:

1. Ingresar las matrices

- Ingresar los coeficientes de las ecuaciones en una matriz A (4x4)
- Ingresar los términos independientes en una matriz B (1x2)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		2	3			8	
3		4	-3			-2	
4							
5							

2. Calcular la matriz inversa de A (A^{-1})

- Seleccionar el rango de la matriz a obtener (2x2)
- Insertar la función y seleccionar la matriz a invertir =MINVERSA(B2:C3)
- Apretar CTRL+SHIFT+ENTER **simultáneamente**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		2	3			8		A^{-1}	0,17	0,17
3		4	-3			-2			0,22	-0,11
4										
5										

La estrategia general usada con Solver es definir una **función objetivo (FO)** que consista en la suma de los cuadrados de los valores individuales de cada ecuación/función, y luego se determinan los valores “x”, “y” y “z” que hacen que la **función objetivo sea igual a cero** evaluada en ellos.

$$FO = f^2_{(x,y,z)} + g^2_{(x,y,z)} + h^2_{(x,y,z)} = 0$$

Para resolver un sistema de ecuaciones, primero debe definir las celdas en las que ubicará las variables independientes o incógnitas, luego se recomienda escribir en forma individual cada una de las ecuaciones o funciones que conforman el sistema, y luego definir la celda en la que ubicará la función objetivo.

Una vez que los datos se encuentran volcados a la planilla, se ubica la herramienta Solver en la barra de herramientas. La única variante respecto a la resolución de una ecuación utilizando esta herramienta se presenta en el momento en que se define la función objetivo.

Note que como celda objetivo se define a la celda en la que se ubica la fórmula en la que se representa a la función homónima. En el caso visualizado en la captura de pantalla es la celda B9. Las celdas en las que están cargadas las ecuaciones participan **indirectamente** a través de la función objetivo. Observe que en el formulario de Solver no aparece ninguna de dichas celdas (B5, B6 y B7).

Observe también que en este caso es fundamental escribir las ecuaciones en forma **implícita**.

Una vez que la solución ha sido encontrada, los valores resultantes son mostrados en sus respectivas celdas dentro de la planilla, y emerge la ventana “Resultados de Solver”.

La síntesis del procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones es el siguiente:

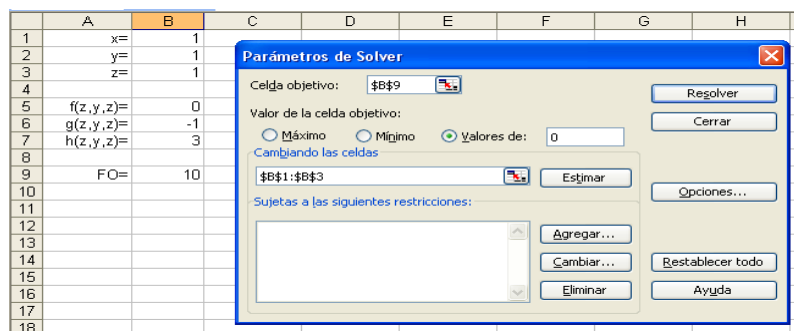
- Ingresar los valores **iniciales** para x, y, z.
- Ingresar las funciones *f*, *g* y *h*
- Ingresar la función $FO=f^2+g^2+h^2$

	B9	$f^2 = B5^2 + B6^2 + B7^2$
	A	B
1	x=	1
2	y=	1
3	z=	1
4		
5	f(z,y,z)=	=3*B1+2*B2-B3-4
6	g(z,y,z)=	=2*B1-B2+B3-3
7	h(z,y,z)=	=B1+B2-2*B3+3
8		
9	FO=	=B5^2+B6^2+B7^2
10		

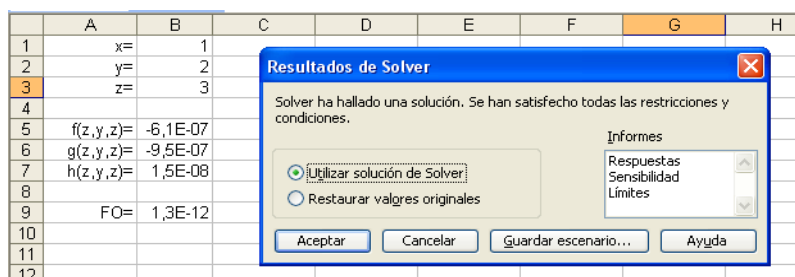


	A	B	C
1	x=	1	
2	y=	1	
3	z=	1	
4			
5	f(z,y,z)=	0	
6	g(z,y,z)=	-1	
7	h(z,y,z)=	3	
8			
9	FO=	10	
10			

- Ir a Datos/Análisis/ Solver
- Seleccionar la celda objetivo
- Marcar que la celda objetivo debe tomar el valor cero
- Seleccionar el rango de celdas que se van a ir cambiando
- Agregar restricciones si fuera necesario



- Resolver



Nuevamente los resultados obtenidos son satisfactorios. Cada ecuación alcanza un valor muy cercano a cero, así como también la función objetivo. Note que según el formato de las celdas, el resultado se visualiza de una u otra forma. A continuación se aplicará un formato en el que se muestren solo 3 decimales a las celdas B5 a B9.

	A	B	C
1	x=	1	
2	y=	2	
3	z=	3	
4			
5	f(z,y,z)=	0,000	
6	g(z,y,z)=	0,000	
7	h(z,y,z)=	0,000	
8			
9	FO=	0,000	
10			

Finalmente, **x=1 y=2 z=3**. Se observa que los valores de las funciones son prácticamente cero.

Los problemas NO LINEALES pueden tener más de una solución, y las soluciones no necesariamente serán reales. En consecuencia, es deseable restringir el rango de las variables independientes. Por ejemplo, para resolver el siguiente sistema de ecuaciones se requiere restringir el rango de las variables independientes a valores positivos.

Ejemplo 3.4

Dado el siguiente sistema de ecuaciones, determinar x e y.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 5x + 7y = 40 \\ g(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y = 28 \end{cases}$$



¡Recordar que es necesario ingresar las ecuaciones en forma implícita!

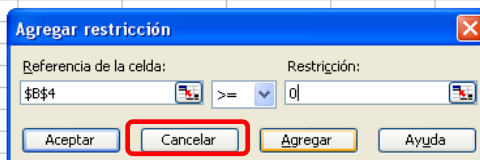
Resolución

- Realice el procedimiento habitual para resolver un sistema de ecuaciones con Solver (escriba variables independientes, funciones y función objetivo, defina la celda objetivo, valor de la función objetivo y determine las celdas a modificar).

	A	B
1	x=	1
2	y=	1
3		
4	f(z,y,z)=	=B1^2+2*B2^2-5*B1+7*B2-40
5	g(z,y,z)=	=3*B1^2-B2^2+4*B1+2*B2-28
6		
7	FO=	=B4^2+B5^2
8		

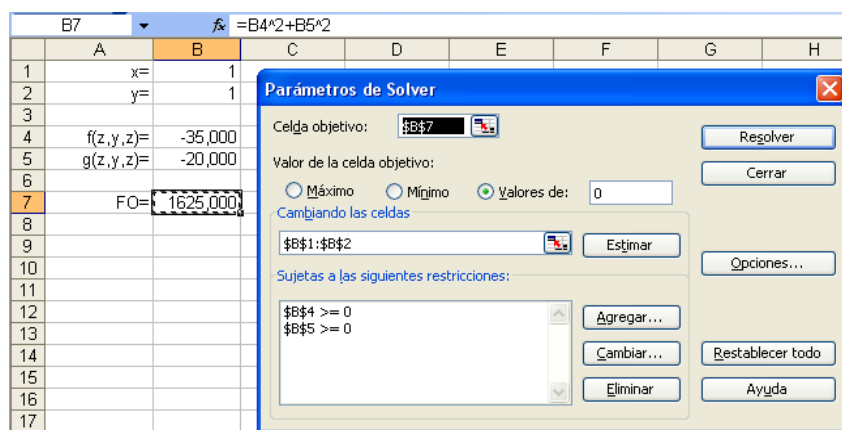
- Seleccionar “Agregar” (Aparece una nueva ventana)
- Seleccionar la celda que contiene la variable independiente (Referencia de la celda).
- Escribir o referenciar la restricción (Restricción)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	1						
2	y=	1						
3								
4	f(z,y,z)=	-35,000						
5	g(z,y,z)=	-20,000						
6								
7	FO=	1625,000						
8								
9								
10								
11								

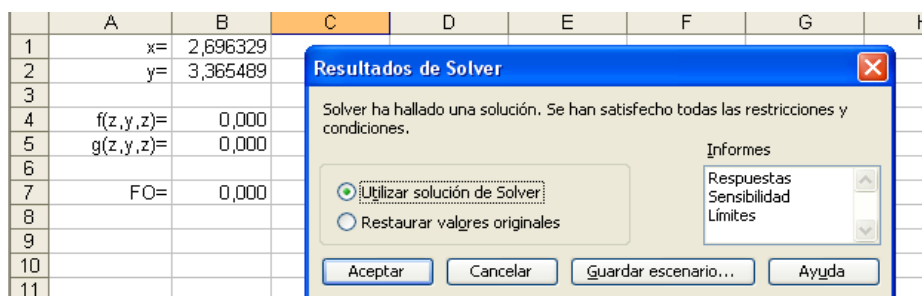


- Si desea agregar una nueva restricción seleccione “Agregar”. Si ha finalizado con la definición de restricciones seleccione “Aceptar” para volver al menú principal del Solver.

AGREGAR UNA RESTRICCIÓN POR CADA VARIABLE INDEPENDIENTE



- Repase los datos cargados, y aplique “Resolver”.



A continuación se resume las opciones que se explicaron en este apunte al momento de resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones utilizando las herramientas provistas por Excel.

Problema	Solución utilizando Ms. Excel
Ecuación de una incógnita	• Método gráfico (Ec. Lineales y no lineales) • Herramienta “Buscar Objetivo” (Ec. Lineales y no lineales) • Herramienta “Solver” (Ec. Lineales y no lineales)
Sistema de ecuaciones	• Método de la matriz inversa (Ec. Lineales) • Herramienta “Solver” (Ec. Lineales y no lineales)

Ejemplo 3.4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 17 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 7 \end{cases}$$

- Por el método de la matriz inversa. Verificar si la solución es correcta.
- Utilizando la herramienta "Solver"

Resolución

El primer paso es cargar los datos de la matriz de coeficientes (**A**) y la matriz de términos independientes (**B**).

MDETERM		=minversa(B6:D8)					
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2						17	
3					B=	0	
4						7	
5							
6		1	-2	3			
7	A=	3	1	-2			
8		2	3	1			
9							
10		=minversa(B6:D8)					
11	A ⁻¹ =						
12							
13							
14							

Luego se calcula la matriz inversa de A para posteriormente realizar el producto de (**A⁻¹ B**) y obtener el vector de variables (**X**). Observe que debido al ancho de las columnas el resultado obtenido aparentemente es cero. Sin embargo, al ampliar las columnas pueden visualizarse los decimales correspondientes. En este caso se han seleccionado 3 decimales.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						17
3					B=	0
4						7
5						
6			1	-2	3	
7	A=	3	1	-2		
8		2	3	1		
9						
10			0	0	0	
11	A ⁻¹ =	-0	-0	0		
12		0	-0	0		
13						

	A	B	C	D	E	F
1						
2						17
3					B=	0
4						7
5						
6		1	-2	3		
7	A=	3	1	-2		
8		2	3	1		
9						
10		0,167	0,262	0,024		
11	A ⁻¹ =	-0,167	-0,119	0,262		
12		0,167	-0,167	0,167		
13						

Ejemplo 3.5

Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando la herramienta Solver.

$$f(x, y, z) = 3x + 2y - z - 4 = 0$$

$$g(x, y, z) = 2x - y + z - 3 = 0$$

$$h(x, y, z) = x + y - 2z + 3 = 0$$

Ejemplo 3.6

Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones NO lineales utilizando la herramienta Solver. Restringir el dominio de la variable x a valores mayores que cero y el dominio de la variable y a valores menores que 0.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 5x + 7y = -11$$

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y = +17$$

Resultados de error

Según lo visto hasta ahora, crear fórmulas parece una tarea sencilla, y ciertamente lo es. Sin embargo, uno se acostumbra rápidamente a crear fórmulas y comienza a crear hojas de cálculo más y más complejas. Y entonces empiezan a aparecer los errores en las fórmulas.

Cuando se comete un error en una fórmula, Excel nos avisa mediante una serie de mensajes que aparecen en la celda en la que se ha cometido el error, de manera que podemos identificar el origen del problema. Los errores de los que nos avisa Excel son los siguientes:

-  **#####**. Marcas de desbordamiento. La columna no es lo suficientemente ancha para mostrar el resultado de la fórmula. Aumenta el ancho de la columna, disminuye el tamaño de la fuente o cambia el formato de la celda (todo esto veremos cómo hacerlo más adelante).
-  **#¡DIV/0!** División por cero. Ten en cuenta que Excel considera que las celdas vacías tienen el valor cero.
-  **#N/A**. No disponible. Normalmente porque la fórmula hace referencia a una función o valor no disponibles.
-  **#¿NOMBRE?** Nombre desconocido. La fórmula hace referencia a un nombre que Excel no conoce.
-  **#¡NUM!** Número no válido. La fórmula está usando un número no válido (generalmente en una función).
-  **#¡REF!** Referencia no válida. La fórmula contiene una referencia que ya no es válida, porque se haya borrado la celda o puesto otra en su lugar.
-  **#¡VALOR!** Operando no válido. Por ejemplo, no se puede sumar un texto a un número.

Números irracionales característicos

Dos números irracionales muy utilizados son el número PI = 3.14159... y el número de Euler, denominado e = 2.7183...

Ms. Excel ofrece la posibilidad de no truncar el número a los primeros decimales, sin necesidad de recordarlos, ya que los tiene incorporados en forma de función predefinida.

Siempre que se requieran estos números para un cálculo, se recomienda utilizar la opción ofrecida por Excel.

π	=PI()
$\frac{4}{3}\pi r^3$	=4/3*PI()*r^3
e	=exp(1)
e^{2x}	=exp(2*x)

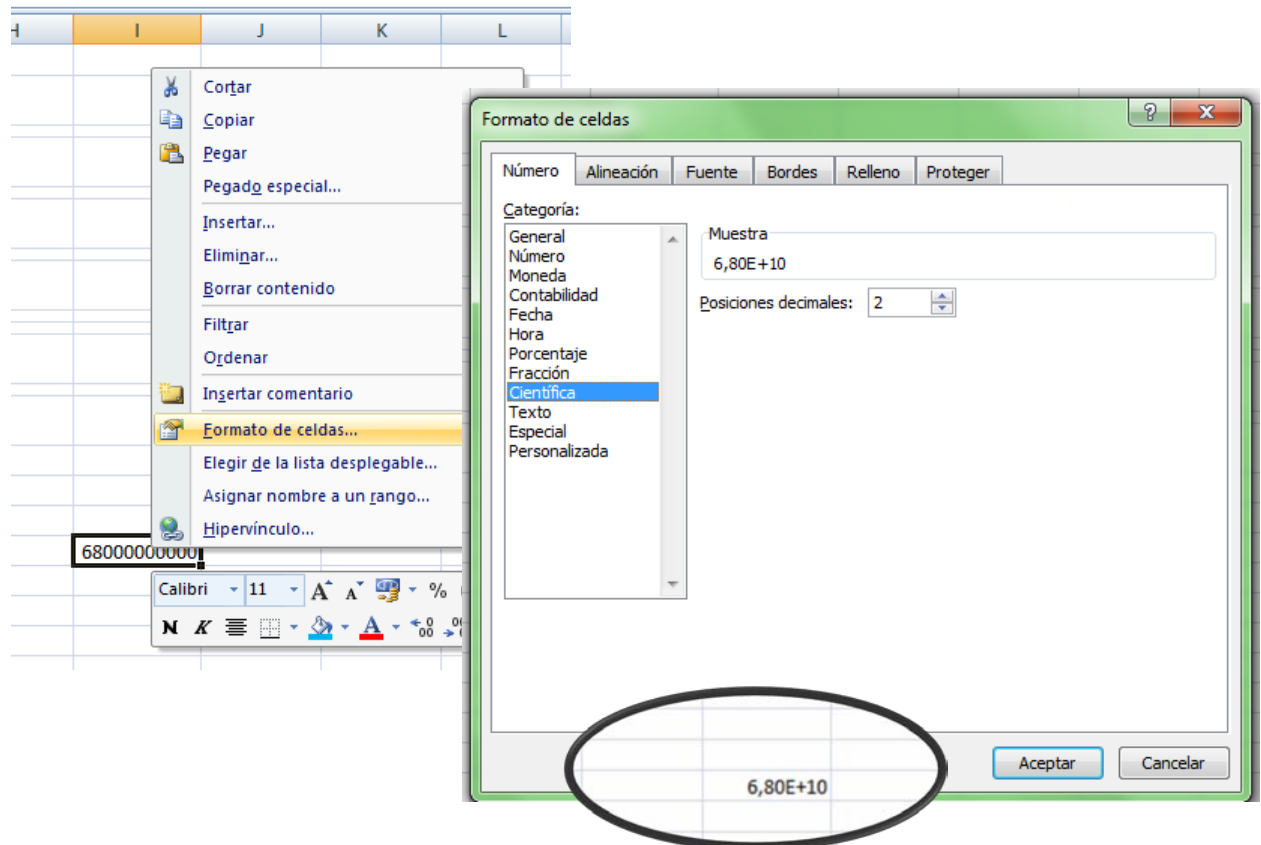
En las siguientes capturas de pantalla se ilustran las funciones recientemente mostradas en tabla y un ejemplo de cómo utilizarlas. En la primera captura se muestran los resultados y en la segunda se muestra la forma en las que están cargadas las funciones y referencias.

	A	B	C	D	E	F	G
34							
35		x	2,6		Variables independientes		
36							
37		r	2		Funciones predefinidas		
38							
39		PI	3,141592654				
40					Funciones definidas por el usuario		
41		e	2,718281828				
42							
43							
44		4/3 PI r ³	33,51032164				
45							
46		e ^{2x}	181,2722419				
47							

	A	B	C	D	E	F
34						
35		x	2,6		Variables independientes	
37		r	2			
39		PI	=PI()		Funciones predefinidas	
41		e	=EXP(1)			
44		$\frac{4}{3} \pi r^3$	=4/3*PI()*C37^3		Funciones definidas por el usuario	
46		e^{2x}	=EXP(2*C35)			
47						

La notación científica

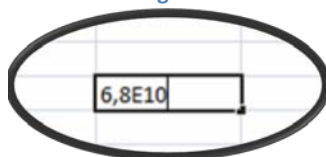
Dado un número en notación científica hay dos formas de plasmarlo en la planilla de cálculo. Suponga que debe utilizar el número $6.8E^{+10}$. Una opción es escribirlo en forma completa (ej: 68000000000) y luego con el formato de número, aplicar la opción “**científica**”.



Pero, esta metodología, puede llevar a errores de tipeado. Por ello, se recomienda utilizar una forma más rápida y automática para agregar un número en notación científica. La misma consiste en tipear el número casi tal como se encuentra. Es decir, en el caso del ejemplo se escribirá en Excel: 6,8E10 y se dará enter. El resultado será el mismo que en el caso anterior, pero con menos tendencia a errores de tipeado.

Resultado obtenido:

Antes de ingresar ENTER



Luego de ingresar ENTER

