

CAPÍTULO XX

MEDICIÓN Y ESTIMACIÓN EN PROCESOS CONTROLADOS

Por
Jorge R. Vega y Nicolás J. Scenna

XX.1. INTRODUCCIÓN

Como ya vimos en el Capítulo XVI, toda política de control a lazo cerrado requiere efectuar mediciones de algunas variables del proceso, preferentemente de aquellas que se desean controlar. Idealmente, sería ventajoso disponer “en línea” de una medición de cada una de las variables de salida a controlar, y de cada una de las variables intervinientes en la ley de control. En general, las estrategias de control serán más efectivas y robustas cuanto mayor sea el número de mediciones disponibles, y cuanto más exactas sean las mismas. Sin embargo, debe también tenerse en cuenta que al aumentar el número de mediciones y/o la calidad de los sensores intervinientes, se incrementará notoriamente el costo de implementación.

En el Capítulo XVI se vio que los sistemas de control avanzado requieren conocer “en línea” algunas variables de estado y de salida, y en el caso del control en avance también se necesita medir las perturbaciones del proceso. Tales variables pueden obtenerse básicamente por dos vías: 1) la *medición directa*; y 2) la *estimación*. En el primer caso, es necesario disponer de sensores adecuados de las variables de interés. Cuando esto no es posible, se puede recurrir a medir otras variables alternativas, y a estimar las de interés por medio de algoritmos basados en el modelo matemático del proceso. En cualquiera de los dos casos, el proceso de medición propiamente dicho incorporará en la variable medida una componente aleatoria espúrea usualmente denominada “ruido de medición”, que contamina y oculta el valor verdadero de la variable a medir. Los ruidos de medición pueden -en algunos casos- causar serios trastornos en la “performance” del sistema de control. Un caso típico ocurre cuando la ley de control incluye un efecto derivativo: si la variable medida o estimada es “ruidosa”, el controlador derivará también tal ruido y se originarán seguramente oscilaciones y/o saturaciones indeseadas de las variables manipuladas. Para evitar este tipo de inconvenientes, es posible incorporar etapas posteriores de “filtrado” de la medición, para atenuar los ruidos originados por los sensores. (En realidad, el concepto de filtrado es mucho más amplio, y será comentado con mayor profundidad posteriormente).

En este capítulo revisaremos los conceptos básicos y las principales características asociadas a la medición y a la estimación de variables de proceso, así como también algunos aspectos relevantes referidos a su implementación en

Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos

Autor: Nicolás J. Scenna y col.

ISBN: 950-42-0022-2 - 81999

esquemas de simulación numérica.

XX.2. MEDICIÓN DE VARIABLES DE PROCESO

En la Figura 1 se muestra un esquema típico (en bloques) de las mediciones en un proceso controlado por computadora, diferenciándose tres zonas principales: 1) la zona de la planta y de los instrumentos de campo (donde se ubican -entre otros- los instrumentos para sensar las variables a medir); 2) las líneas de transmisión de las variables medidas; y 3) la sala de control (con los dispositivos indicadores de las mediciones y la computadora de proceso). La Figura 1 pretende ser ejemplificativa, por lo que no necesariamente todo proceso deberá responder a ese esquema. En dicha figura, las variables del proceso se han dividido en: i) variables a realimentar (y_1); ii) variables a monitorear (y_2); y iii) variables cuyos valores no se necesitan, no se tiene interés en medir o no se pueden medir (y_3).

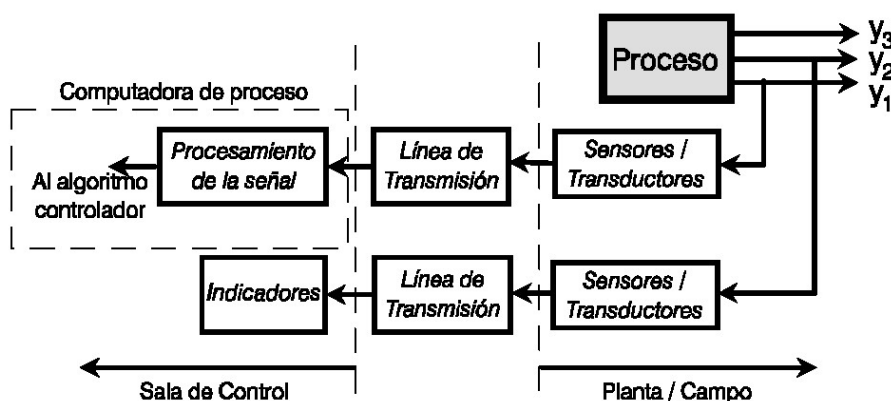


Figura XX.1: Esquema global de mediciones en un proceso controlado por computadora.

En la Tabla 1, se resumen las principales etapas involucradas en la especificación de las mediciones intervinientes en un sistema de control. En primer lugar, al diseñar un sistema de control deben seleccionarse las *variables a medir*. Los criterios de selección dependen de una serie de factores tales como la experiencia del diseñador, las exigencias de los algoritmos de control a utilizar, la seguridad pretendida en la operación del proceso, las limitaciones económico-financieras relativas a la inversión a efectuar, etc. En todo proceso, pueden clasificarse las variables según su prioridad con respecto a la medición, en: a) variables de medición imprescindible (tal es el caso de las variables a realimentar en los lazos de control); b) variables a monitorear (para observar su evolución a lo largo del proceso, pero cuyo valor no intervenga en las políticas de control a lazo cerrado); y c) variables “sin interés” de medición (cuyos valores no se necesitan conocer).

TABLA XX.1: Etapas típicas en la especificación de mediciones

Etapa	Principales características
1. Selección de las variables a medir	Conocimiento del tipo de control y de la “ley de control” a utilizar. Clasificación de las variables según su prioridad con respecto a la medición. Duplicación de algunas mediciones.
2. Especificación de las características de la medición	Mediciones “en línea” o “fuera de línea”; continuas o discretas. Exactitud / precisión de la medición. Retardos máximos admisibles. Multiplexado de las mediciones. Relación señal/ruido.
3. Elección de los sensores y del sistema de transmisión	Rangos operativos de las variables a medir. Elección de los sensores / transductores. Transmisión de la señal al controlador o a la computadora de proceso. Ruidos del sensor y en la línea de transmisión.
4. Procesamiento de la señal medida	Conversión analógica/digital o digital/analógica. Suavizado o filtrado de la medición.

XX.2.1. Mediciones “en línea” y “fuera de línea”

Seleccionadas las variables a medir, deben determinarse las *características de las mediciones*, que están relacionadas con las necesidades y posibilidades de efectuar esas mediciones en el proceso. Para cada variable a medir se deberá especificar si se requieren mediciones “en línea” o “fuera de línea”, continuas o discretas. Estas características quedan impuestas por las necesidades del sistema de control completo, las exigencias sobre las variables controladas, el tipo de algoritmo de control utilizado, etc. La mayor exigencia con respecto a una medición es que sea “en línea” y sin retardo; pero estas condiciones sólo se requieren muy excepcionalmente, por ejemplo cuando la variable a medir es crítica para el proceso, y cuando las constantes de tiempo características del proceso y de la variable a medir son similares y muy bajas. Además, debe tenerse en cuenta que en estos casos se requerirá de un canal de comunicación dedicado entre los sensores y la computadora, lo cual puede ser muy costoso. Por lo general, las constantes de tiempo de los procesos industriales son relativamente elevadas, y entonces los sensores utilizados pueden ser más lentos. Dependiendo de la forma en que se transmitirá y utilizará la medición efectuada, deberá también establecerse la mínima relación señal/ruido admisible y la posibilidad de multiplexado de las mediciones, como se explicará más adelante.

Sensores típicos para mediciones “en línea”

En la selección de un sensor para la medición de una variable del proceso intervienen diversos factores, tales como el tipo de variable a medir, el rango operativo esperado en la variable, la exactitud y precisión de la medición, etc. En la

Tabla 2, se resumen algunas de las variables de proceso más comúnmente medidas, el dispositivo utilizado como sensor, y la variable de salida del sensor. Mayores detalles con respecto a otras variables medidas, otros sensores, etc., pueden consultarse por ejemplo en Ray (1981) y Stephanopoulos (1984).

TABLA XX.2. Sensores típicos para la medición de variables de proceso

Variable	Sensor	Salida del sensor
Temperatura	Termocupla	Fuerza electro-motriz
	Termistor	Resistencia
	Oscilador de cristal de cuarzo	Frecuencia de oscilación
Presión	Manómetros	Desplazamiento mecánico
	Tubos de Bourdon	Inductancia, reluctancia
	Elementos de diafragma	Capacitancia
	Elementos piezo-resistivos	Resistencia
	Elementos piezo-eléctricos	Fuerza electro-motriz
Caudal	Tubo de Pitot	Presión diferencial
	Placa-orificio	Caída de presión
	Venturi	Caída de presión
	Turbina	Velocidad rotacional
	Ultrasonido	Efecto Doppler
Nivel líquido	Elemento flotante	Desplazamiento mecánico
	Conductividad	Resistencia
	Celda fotoeléctrica	Fuerza electro-motriz
	“Head pressure”	Presión diferencial

Para poder utilizar la variable medida (de salida) del sensor, es necesario transformarla en una señal analógica de tensión o de corriente; y para tal operatoria los sensores se acompañan de dispositivos denominados *transductores*. Por ejemplo, la medición de temperatura mediante una termoresistencia (o termistor) se basa en la variación de la resistividad de un material especial con la temperatura. El transductor deberá en este caso transformar la variación de resistencia en una variación de tensión, para lo cual se puede hacer circular por el termistor una corriente constante.

Mediciones “fuera de línea”

Los sensores comentados en el punto anterior, y muchos otros utilizados frecuentemente en la industria, permiten disponer de mediciones “en línea” de diversas variables del proceso. En algunos casos, para medir ciertas variables se requiere de procedimientos especiales que impiden la obtención de mediciones “en línea”. Por ejemplo, supongamos un proceso consistente básicamente en una reacción de polimerización llevada a cabo en un reactor operado en forma batch, y donde se requiere medir la distribución de pesos moleculares (DPM) del polímero producido. Es sabido que no existen sensores que permitan medir directamente la

DPM, sino que deben utilizarse técnicas de caracterización específicas tales como la cromatografía líquida de exclusión con detectores de índice de refracción, viscosimétricos, etc. La determinación de la DPM por técnicas cromatográficas involucra normalmente las siguientes etapas: 1) la toma de una muestra de polímero del reactor; 2) la preparación y adecuación de la muestra a las condiciones estándares requeridas por la cromatografía; 3) la circulación de la muestra por las columnas de separación cromatográfica y por los detectores; y 4) la interpretación de los resultados provistos por los sensores (cromatogramas) para la obtención de la DPM buscada. Típicamente, los pasos 2) y 3) involucran retardos relativamente elevados (por ej., 60 minutos o más). Por tal motivo, si se pensara en utilizar esta medición para implementar estrategias de control a lazo cerrado destinadas a controlar la DPM, no se justificaría tomar muestras del reactor con una frecuencia mayor a 1 muestra/hora. Este tipo de medición caracterizada usualmente por tener que retirar muestras del proceso, llevarlas hasta un laboratorio, acondicionar la muestra, etc., define una medición “fuera de línea”. En general, las mediciones fuera de línea involucran retardos de tiempo muy elevados, y sólo permiten contar con un número limitado de valores de las variables medidas durante la evolución del proceso, lo que hace dificultosa la utilización de tales mediciones para una operación en lazo cerrado.

XX.2.2. Nociones básicas sobre transmisión de las mediciones

La señal de tensión o de corriente obtenida a la salida del transductor deberá transmitirse al controlador o a la computadora de proceso. Usualmente, los transductores generan señales analógicas de pequeña magnitud (por ejemplo, tensiones del orden de algunos milivolts), de manera que su transmisión directa puede verse seriamente comprometida debido a que la señal es susceptible de ser modificada por los ruidos propios de la línea de comunicación. Para evitar este inconveniente, las señales provistas por los transductores deben ser amplificadas, normalmente hasta los rangos de transmisión estándar en comunicaciones analógicas, tales como $\forall 10$ V, 0-5 V, o 4-20 mA. Las señales analógicas de tensión se utilizan cuando las distancias son relativamente cortas (unos pocos metros); para distancias mayores es conveniente utilizar señales de corriente, que no se ven afectadas por las caídas de tensión originadas en los conductores de comunicación.

Por otra parte, en los procesos industriales suele ser común medir variables de características similares (por ejemplo, medir varias temperaturas en el proceso). En tal caso, la transmisión independiente de cada una de estas variables resultaría compleja y costosa, porque se requeriría de tantos canales de comunicación como variables se deseen transmitir. La forma usual de resolver este problema es recurrir al multiplexado de las variables medidas, normalmente en una etapa posterior a la amplificación (ver Figura 2.a). Un multiplexor es un dispositivo electrónico que permite seleccionar secuencialmente una o más de sus N variables de entrada, y direccionarlas hacia los canales de comunicación de la línea de transmisión. Por ejemplo, en la Figura 2.b) se representa un multiplexor de dos canales, cuya función es seleccionar simultáneamente 2 de las N variables medidas, y derivarlas hacia los

dos canales de comunicación. A intervalos de tiempo muy pequeños, se van cambiando las dos variables seleccionadas hasta completar la transmisión de las N variables medidas. Esta operación se realiza en forma periódica, normalmente con frecuencias muy elevadas del orden de los Khz o Mhz, de manera tal que si bien estrictamente la comunicación se efectúa en intervalos de tiempo discretos, los períodos involucrados son tan pequeños que las mediciones pueden ser consideradas como continuas (se supone que las constantes de tiempo del proceso son mucho mayores que los períodos de selección del multiplexor).

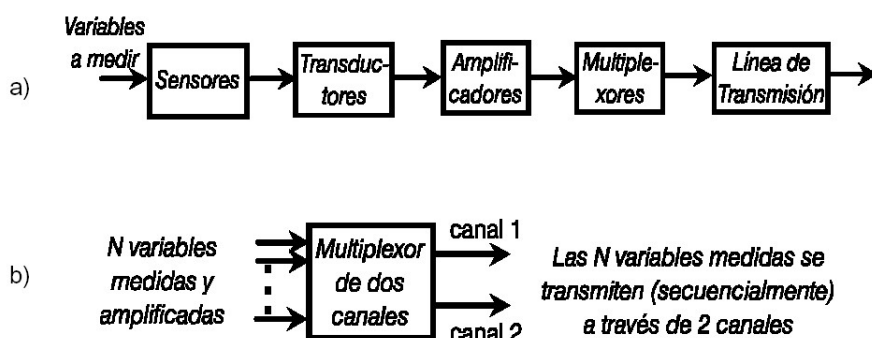


Figura XX.2: a) Bloques típicos de medición y transmisión de señales analógicas. b) Multiplexado de N variables y transmisión por dos canales.

En la Figura 2, se han supuesto mediciones y comunicaciones analógicas, pero los conceptos explicados son también aplicables al caso de transmisiones digitales. Una de las ventajas de las comunicaciones con señales digitales es su mayor inmunidad a los ruidos, y por tal motivo son preferidas en aquellos casos en que las líneas sean físicamente muy largas, o cuando el medio en que se ubica la línea de comunicación es muy ruidoso. El campo de las comunicaciones digitales está hoy en día muy desarrollado, y su aplicación en la industria es cada vez mayor. Una línea de comunicación digital incluye básicamente dos niveles: 1) la línea física; y 2) el protocolo de comunicación. La línea física es el medio que permite la transmisión efectiva de los datos digitales (bits), y puede ser un conjunto de cables, un coaxil, una fibra óptica, un canal satelital, una señal de radio, etc. El protocolo de comunicación se refiere a la forma en que los datos se “empaquetan” para su transmisión, y a los códigos estándares utilizados por los dispositivos ubicados en los extremos de la línea de comunicación para interpretar tales datos.

Existen un gran número de estándares de interfaces para comunicación digital, pero no profundizaremos aquí estos temas. Conceptos generales sobre comunicaciones digitales pueden consultarse por ejemplo en Amy (1992), o recurrir

más específicamente a los estándares de la IEEE (particularmente el estándar 802 para redes de área local), y a los estándares sobre redes de comunicación OSI (Open Systems Interconnection) de la ISO (International Standards Organization). A manera de ejemplo, podemos mencionar la interface de comunicación serie RS-232, y sus versiones RS-232-C y RS-232-D, desarrollados por la EIA (Electronic Industries Association). Este estándar permite comunicaciones punto-a-punto, y no incluye protocolo de comunicación (por ejemplo, RS-232 se encuentra en todas las PCs como puertos serie COM1 y COM2). La línea física de una interface RS-232 incluye 25 cables, dos de los cuales son usados para la transmisión y recepción de datos, mientras que los restantes permiten controlar la comunicación. En RS-232, si las líneas de datos tienen tensiones positivas entre +3 y +35 Volts (tensión continua referida a una tierra común), representan un bit "0"; mientras que tensiones negativas entre -3 y -35 Volts representan un "1". La interface RS-232 es recomendada para distancias de comunicación menores a los 15 metros, y con frecuencias inferiores a los 20 Kbps (1 bps = 1 bit por segundo).

Conversores A/D y D/A

En general, las salidas de los transductores son señales analógicas (por ejemplo, tensiones del orden de los milivolts), y en algunos casos estas señales pueden ser transmitidas directamente a la computadora de procesos. Cuando la medición recibida por la computadora es una señal analógica, es necesario transformarla en una señal digital; y tal operación la efectúa un dispositivo electrónico denominado conversor analógico/digital (A/D). Cuando la transmisión de la medición es digital, el conversor A/D se ubica directamente en serie con el transductor o después del bloque amplificador.

El algoritmo de control implementado en la computadora permite determinar el valor de la variable accionada, pero la señal de salida provista por la computadora es digital. Sin embargo, muchos órganos de acción final sólo responden a señales analógicas; tal es el caso del grado de apertura de una válvula para regular un caudal de alimentación. A efectos de proveer la señal analógica es entonces necesario disponer de un conversor digital/analógico (D/A). Dicho conversor se ubica inmediatamente antes del bloque correspondiente al órgano de acción final.

Para ejemplificar los conceptos anteriores, en la Figura 3 se muestra un esquema simplificado de un proceso controlado, donde se supone efectuar una única medición, la que se transmite a la computadora de proceso a través de un canal de comunicación digital. Se supone además que la señal transmitida al actuador es analógica (por ejemplo, una corriente de 4-20 mA), por lo que se incluye un bloque conversor D/A en la computadora.

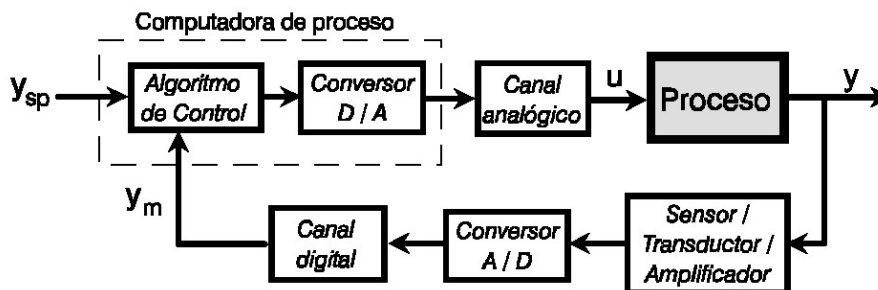


Figura XX.3: Esquema simplificado de un proceso controlado por computadora, con los bloques intervinientes en la medición, conversión A/D y D/A y transmisión.

XX.2.3. Ruidos típicos de medición

Toda señal analógica o digital que acceda a la computadora de proceso estará contaminada por ruidos incorporados en cada uno de los bloques intervinientes en el proceso de medición y transmisión de los datos. En primer lugar, podemos mencionar el ruido y/o errores introducidos por el subsistema sensor/transductor/amplificador, típicamente causado por vibraciones espúreas en los componentes mecánicos, histéresis mecánica o magnética de los sensores, no linealidades de los convertidores y amplificadores, etc. La conversión A/D incorpora un ruido adicional debido a la discretización inherente a la digitalización de una señal analógica. En efecto, aun cuando la señal analógica sea libre de ruido, su digitalización produce una pérdida de resolución, que origina una fuente de ruido tanto más importante cuanto menor sea el número de bits utilizados para codificar la señal. La señal también puede verse contaminada por ruido en la línea de transmisión, por ejemplo debido a interferencias electromagnéticas que puedan alterar la magnitud de la señal analógica transmitida, o cambiar algún bit del código si la comunicación es digital.

Un concepto importante asociado a una señal es su relación señal/ruido (S/R), que se define como el cociente entre los espectros de potencia de la señal y del ruido. Recordemos que el espectro de potencia de una señal estacionaria se calcula como la transformada de Fourier de su función de autocorrelación (Papoulis, 1986). Idealmente, es de desear que la relación S/R sea infinita, para poder contar con una señal pura, que permita trabajar de una manera mucho más confiable y segura en el sistema controlado. A medida que la relación S/R de una medición empeora, menos efectiva será la política de control que utilice tal medición. En casos particulares en los que las mediciones sean críticas para el funcionamiento del sistema controlado, es necesario mejorar las características de la señal incluyendo en la misma computadora de proceso bloques de suavizado o filtrado de la señal transmitida, como parte del algoritmo controlador. Al final de este capítulo se presentarán algunos ejemplos sobre el procesamiento de señales medidas afectadas por ruidos de medición.

XX.2.4. Simulación numérica de las mediciones

Desde el punto de vista de una simulación numérica estricta de un proceso controlado, además de los bloques fundamentales de la planta y del sistema de control, también es necesario considerar los bloques correspondientes a las mediciones. La simulación numérica del sistema de medición debería -en principio- incluir los siguientes aspectos: 1) la dinámica de los sensores “en línea”; 2) el retardo de las mediciones “fuera de línea”; 3) la discretización de la señal medida; y 4) los ruidos de medición. Si bien considerar todos estos elementos puede conducir a implementaciones computacionales muy complejas, veremos que en la mayoría de los casos prácticos los bloques de simulación asociados al sistema de medición son muy sencillos y simples de implementar.

Todos los subsistemas sensor/transductor/amplificador -incluso los más simples-, tienen una respuesta dinámica característica, usualmente denominada la *dinámica del medidor*. Por ejemplo, un sensor relativamente sencillo como es una termocupla se comporta como un sistema dinámico de primer orden o de segundo orden, dependiendo de sus características constructivas (Stephanopoulos, 1984). Es decir, la respuesta dinámica de una termocupla puede representarse a través de la siguiente ecuación diferencial:

$$\tau^2 \frac{d^2T}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dT}{dt} + T = T_0 \quad (1)$$

donde T_0 es el valor verdadero de la temperatura a medir; T es la temperatura medida; y τ , ξ (>1) son los parámetros asociados a la forma canónica de un sistema genérico de segundo orden, y dependen de las características constructivas de la termocupla. La ecn. (1) representa la dinámica de un sistema de segundo orden sobreamortiguado ($\xi > 1$), y para tiempos suficientemente grandes $T \rightarrow T_0$. Si $\tau \ll 1$, el sistema se comporta como de primer orden; y si $\tau\xi \ll 1$, entonces la respuesta del sensor puede considerarse instantánea ($T = T_0$).

La presencia de multiplexores en un sistema de medición implica la discretización de las señales, y se podrá entonces disponer de ellas sólo a intervalos de tiempo no consecutivos. Por ejemplo, supongamos que en un proceso se miden 16 temperaturas en forma simultánea con 16 termocuplas o termistores, y se deben transmitir estas mediciones a través de un único canal de comunicación. Entonces, se requerirá de un multiplexor que deberá direccionar hacia el canal de comunicación sólo una de sus 16 entradas, y lo hará con una frecuencia de conmutación de f [Hz]. El algoritmo de control deberá “retener” y utilizar cada medición durante un período de tiempo de $16/f$ [s], hasta que se efectúe la adquisición del nuevo valor transmitido (actualización de la medición). Nótese que si bien el sensado de las temperaturas a medir es continuo, la disponibilidad de las mediciones por parte del algoritmo de control hace que desde un punto de vista estricto dichas mediciones deban ser simuladas como discretas o discontinuas.

Obviamente, la importancia y los cuidados en la simulación de los eventos comentados en los párrafos anteriores, dependen de la relación entre las constantes de tiempo características del proceso y las asociadas a los sensores y transmisores. En la gran mayoría de los procesos, las constantes de tiempo involucradas en cualquiera de los dispositivos asociados a la medición y transmisión de datos son muy inferiores a las de la planta propiamente dicha; y por tal motivo, a efectos de la simulación numérica las mediciones pueden ser consideradas instantáneas (sin retardo) y continuas.

Otro punto importante en la simulación de mediciones es el *ruido de medición*, cuyas fuentes y efectos han sido comentados anteriormente. En general, los modelos matemáticos más utilizados para representar el proceso de medición tienen la siguiente estructura:

$$y_m(t) = y(t) + v(t) \quad (2)$$

donde $y(t)$ representa la medición libre de ruido; y $v(t)$ es un ruido modelado como aditivo.

A efectos de la simulación, los ruidos de medición se suelen modelar como un “ruido blanco”. (El lector no familiarizado con los conceptos presentados en este párrafo puede remitirse a textos básicos sobre análisis de señales; por ejemplo, Brown, 1983; Papoulis, 1986). Desde un punto de vista probabilístico, un ruido blanco es un proceso aleatorio estacionario con densidad espectral de potencia constante. Estrictamente, un ruido blanco corresponde a un proceso totalmente no correlacionado, y su definición conduce a una varianza teóricamente infinita. En la práctica, todos los dispositivos poseen un ancho de banda finito (es decir, responden en un rango finito de frecuencias), y por tal motivo las simulaciones de los ruidos de medición se suelen restringir a una banda de frecuencias finita, teniéndose entonces un ruido blanco de banda limitada.

En la práctica, es usual modelar un ruido de medición a través de:

$$v(t) = \sqrt{R} \text{rnd}(t) \quad (3)$$

donde $\text{rnd}(t)$ representa un número aleatorio de media nula y con una distribución dada (normalmente gaussiana); y R es la varianza del ruido resultante $v(t)$. La magnitud de los números aleatorios simulados depende directamente de la magnitud de los ruidos reales conocidos para el sistema de medición completo.

XX.3. ESTIMACIÓN DE VARIABLES DE PROCESO NO MEDIBLES

Como ya se explicó en el capítulo XVI, el conocimiento de la evolución temporal de algunas variables -particularmente los estados-, es fundamental para la implementación de estrategias de control avanzado en lazo cerrado. Idealmente, las

mediciones involucradas en el sistema controlado deberían ser “en línea” y con retardos muy pequeños. Algunas veces, este tipo de mediciones es imposible de conseguir en la práctica, por ejemplo por razones de carácter técnico como la no disponibilidad de sensores adecuados.

En ciertos esquemas de control avanzado se requiere la medición “en línea” de algunos estados y/o de las perturbaciones del proceso (ver Figuras 7 a 11 del Capítulo XVI). Sin embargo, en la mayoría de los procesos industriales es imposible medir en forma completa el vector de estados, o contar con sensores para la medición de todas las perturbaciones. En general, el número de sensores es muy inferior al número de variables involucradas como estados y perturbaciones; y algunas variables no directamente medidas deberán ser estimadas a partir de las mediciones disponibles, de los valores de las variables manipuladas, y del modelo matemático del proceso. Si bien en el resto del capítulo nos referiremos frecuentemente a *estimación de estados*, deberá entenderse que el vector de estados puede incluir también las variables de perturbación; con lo cual, el problema de estimación de variables se reduce a un problema de estimación de estados.

En la Figura 4, se muestra un esquema en bloques de un estimador de estados genérico. Dicho estimador consiste básicamente en un algoritmo numérico desarrollado a partir del modelo matemático del proceso, que recibe información de los vectores de las condiciones iniciales, variables manipuladas, mediciones, y de las estadísticas de los ruidos involucrados en el proceso y en la medición. El algoritmo estimador utiliza la información anterior para calcular los estados del proceso. La variable t representa al tiempo asociado a la estimación “actual”, mientras que t_m es el tiempo en que se efectuó la última medición disponible.

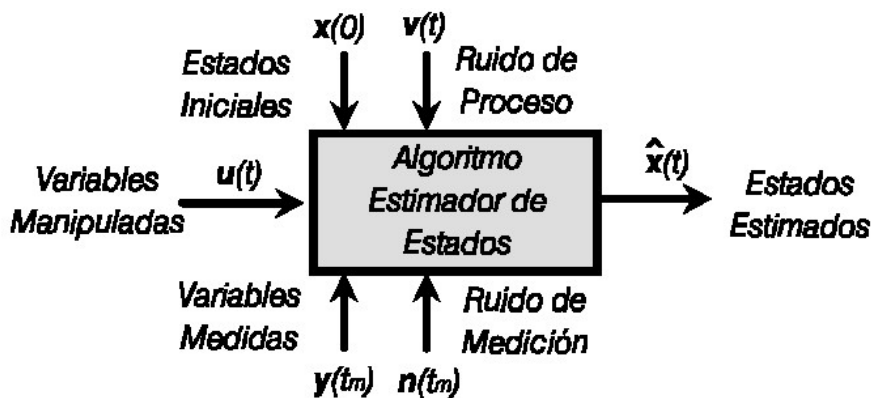


Figura XX.4: Esquema en bloques de un estimador de estados.

En general, los algoritmos de estimación de estados suelen ser clasificados en tres categorías: 1) suavizado; 2) filtrado; y 3) predicción. En la Figura 5, se resumen en forma gráfica los conceptos asociados a cada caso (ejemplificados para

un único estado). En dicha figura, los puntos indican las mediciones disponibles (discretas y ruidosas); y en línea continua se muestra la evolución temporal del estado estimado.

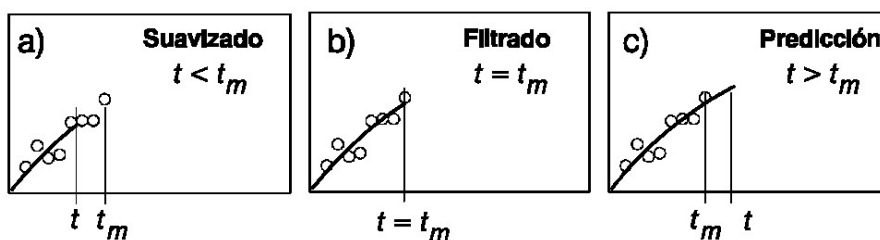


Figura XX.5: Tres tipos de algoritmos para la estimación de estados.

En la Figura 5.a), se muestra la estimación de los estados por *suavizado* de los datos. En este caso, se dispone del estado estimado con un retardo t_m-t respecto de la última medición. En la Figura 5.b), se indica las características asociadas al *filtrado* de datos, en donde la estimación de los estados se efectúa en concordancia con la última medición disponible. Por último, la Figura 5.c) representa un estimador utilizado para la *predicción* de los estados, es decir para determinar sus valores con una anticipación de $t-t_m$ respecto de la última medición.

Los filtros son los estimadores de estados más utilizados en sistemas de control a lazo cerrado, principalmente cuando se dispone de mediciones rápidas con respecto a las constantes de tiempo típicas del proceso. Cuando las mediciones adolecen de un retardo considerable (tal es el caso, por ejemplo, de la medición de concentraciones por técnicas cromatográficas), suelen utilizarse los predictores, para que el algoritmo de control pueda utilizar información “actualizada”. El suavizado, rara vez es aplicado en sistemas de control a lazo cerrado, sino que se lo utiliza más para efectuar estimaciones de variables “fuera de línea”.

La estimación de estados es adecuada (robusta) cuando, a partir de la información recibida, el algoritmo estimador provee un *único* vector de estados estimados. Esta condición implica que desde un punto de vista teórico se requiera la observabilidad completa del sistema (es decir la observabilidad de todos los estados a estimar, a partir de las mediciones disponibles).

XX.3.1. Observadores

Un *observador* es un estimador de estados para un sistema que se asume como determinístico, es decir cuando pueden considerarse muy reducidos los efectos de los ruidos del proceso y/o de la medición. Para sistemas lineales, los observadores han sido ampliamente desarrollados en la literatura (ver por ejemplo, Luenberger, 1971).

No entraremos en mayores detalles sobre el desarrollo formal de observadores, pero sí consideraremos un ejemplo para interpretar los conceptos más

importantes. En la Figura 6, se muestra un sistema de dos tanques interconectados. Se pretende controlar el nivel del tanque 1, pero sólo se dispone de la medición del nivel del tanque 2. Obviamente, el “set point” de este sistema es el valor deseado h_1^d , y como no se dispone del valor de h_1 medido, es necesario entonces estimarlo mediante un observador.

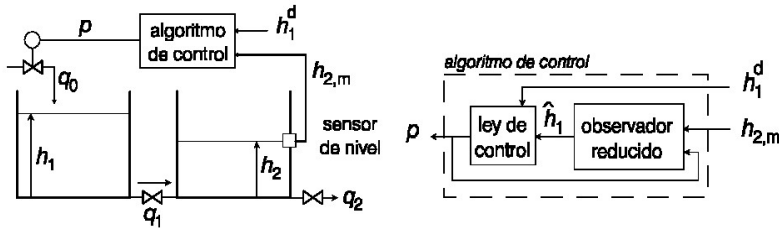


Figura XX.6: Sistema de control de nivel utilizando un observador de estados: esquema del proceso y detalle del algoritmo de control.

Consideremos el modelo matemático del proceso.

Módulo de simulación de la planta. En forma similar al ejemplo resuelto en el Capítulo XIV, pueden plantearse las siguientes ecuaciones de balance de materia:

$$A_1 dh_1/dt = p Q_0 - C_{v1} f \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) (|h_1 - h_2|)^{1/2}; \quad h_1(0) = h_1^0 \quad (4.a)$$

$$A_2 dh_2/dt = C_{v1} f \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) (|h_1 - h_2|)^{1/2} - C_{v2} f h_2^{1/2}; \quad h_2(0) = h_2^0 \quad (4.b)$$

$$0 \leq p \leq 1 \text{ (restricción de la válvula de control)} \quad (4.c)$$

donde Q_0 es el caudal máximo que entraría al tanque 1 si la válvula de control estuviera completamente abierta ($p=1$).

Módulo de salida/medición. Asumiendo que la medición es exacta, se tiene:

$$y = h_2 = h_{2,m} \quad (4.d)$$

Módulo del controlador (o ley de control). Si se utiliza un controlador con efecto P+I, resulta:

$$p = K_p (h_2^d - h_{2,m}) + K_p / T_I \int (h_2^d - h_{2,m}) dt \quad (4.e)$$

Módulo del observador. La ecuación del observador debe permitir estimar h_1 a partir de la variable accionada p y de la medición $h_{2,m}$. Tal estimación se logra con la ecn.

Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos

Autor: Nicolás J. Scenna y col.

ISBN: 950-42-0022-2 - 81999

(4.a), es decir:

$$A_1 \frac{dh}{dt} = p Q_0 - C_{v1} f \operatorname{sgn}(h - h_{2,m}) (|h - h_{2,m}|)^{1/2}; \quad h_1(0) = h_1^0 \quad (4.f)$$

Nótese que la ecuación del observador es dinámica, y requiere por lo tanto resolver una EDO adicional.

Tabla XX.3: Parámetros del sistema de la Figura 6

$A_1=5 \text{ m}^2$	$C_{v1}f=0,02 \text{ m}^{5/2}/\text{min.}$	$h_1(0)=1,1 \text{ m}$	$Q_0=0,1 \text{ m}^3/\text{min.}$	$K_p=5 \text{ m}^{-1}$	$\hat{h}(0)=1 \text{ m}$
$A_2=2 \text{ m}^2$	$C_{v2}f=0,01 \text{ m}^{5/2}/\text{min.}$	$h_2(0)=1,3 \text{ m}$	$h_1^d=1,5 \text{ m}$	$T_I=500 \text{ min.}$	

En la Figura 7.a) se presentan los resultados de simulación para el caso de una medición libre de ruido. Puede observarse una zona de saturación en p , debido al relativamente elevado error inicial en h_1 ; y una evolución de h_1 hacia el valor deseado. El estado estimado por el observador (línea de puntos) difiere levemente del valor real, debido al error introducido en sus respectivas condiciones iniciales (ver Tabla 3). El valor estimado converge más rápidamente al valor deseado, dado que es el utilizado en la realimentación y comparación con el “set point”. Sin embargo, nótese que el valor real converge también hacia el valor deseado de 1,5 m. En la Figura 7.b), se muestran los resultados cuando se asume un error en la medición de h_2 , simulado como un ruido aleatorio de distribución normal. Aunque el error de medición es relativamente elevado, nótese que la ‘performance’ del sistema controlado es aún muy aceptable. Esto es debido al gran “efecto de filtrado” de los tanques, que atenúan las oscilaciones observadas en la variable manipulada p .

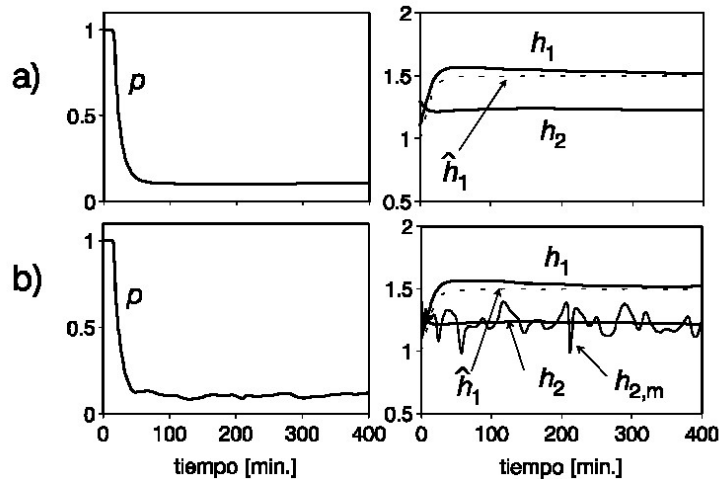


Figura XX.7: Evoluciones temporales de la variable accionada y de los niveles de agua: a) medición sin ruido; b) medición con un ruido de distribución normal.

Debe tenerse en cuenta que si bien en el problema presentado el ruido no

afecta sensiblemente la calidad del control, en otros casos la >performance= de los observadores puede ser inadecuada cuando existen ruidos en el proceso y/o en la medición. En tales casos, deberá recurrirse a filtros o estimadores de concepción estocástica.

El error entre los valores real y estimado de h_1 es también un llamado de atención con respecto a la utilización de observadores. Si el modelo del observador difiriera sensiblemente del comportamiento real de la variable, entonces podrían originarse errores apreciables en la estimación, imposibilitando alcanzar los objetivos de control deseados. Este resultado enfatiza la conveniencia de medir la variable a controlar; sin embargo, cuando tal medición no se dispone, es inevitable recurrir a su estimación.

XX.3.2. Un estimador lineal óptimo: el filtro de Kalman

Retomemos ahora el caso de la estimación de estados en presencia de ruidos de proceso y de medición. A tales efectos, consideremos un sistema lineal (o linealizado) representado por el siguiente modelo estocástico y discreto:

$$x_{k+1} = \varphi_k x_k + w_k \quad (5.a)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (5.b)$$

donde x_k es el vector de estados en el tiempo t_k ; φ_k es la matriz de transición de estados; z_k es el vector de las mediciones (observaciones); H_k es una matriz hipotética de salida (no ruidosa) que establece la relación entre las mediciones y los estados; w_k es el ruido del proceso; y v_k es el ruido de la medición. Ambos ruidos se asumen como secuencias aleatorias “blancas”, de covarianza conocida y no correlacionados entre sí, es decir:

$$E[w_k w_i^T] = \delta_{ki} Q_k \quad (6.a)$$

$$E[v_k v_i^T] = \delta_{ki} R_k \quad (6.b)$$

$$E[w_k v_i^T] = 0; \quad \forall k, i \quad (6.c)$$

donde el supraíndice T indica “transpuesto”; $E[]$ simboliza al “valor esperado”; Q y R son las matrices de covarianza de los ruidos del proceso y de la medición, respectivamente; y δ_{ki} es la delta de Kronecker usual.

El problema de estimación asociado al modelo de las ecns. (5) consiste en determinar los estados del sistema que permitan minimizar (con algún criterio de optimización), el siguiente error de estimación:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (7)$$

donde el símbolo $\hat{}$ representa al valor estimado; y el supraíndice $-$ indica que se trata de un valor disponible previo a la medición efectuada en el tiempo t_k . La matriz de covarianza del error de estimación es:

$$P_k^- [e_k^- e_k^{-T}] = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \quad (8)$$

El criterio de optimización consiste en minimizar el error medio cuadrático

de cada uno de los términos de la diagonal principal de \mathbf{P}_k , que representan las varianzas del error de estimación. Este problema ha sido tratado en la literatura (Kalman, 1960), y su solución es conocida como el filtro de Kalman (FK). Posteriormente los resultados se extendieron al caso continuo (Kalman y Bucy, 1961).

En definitiva, el FK es un estimador de estados que puede ser implementado a partir del algoritmo indicado en la Tabla 4 (Brown, 1983).

Tabla XX.4. El Filtro de Kalman (discreto)

Paso	Ecuaciones	Comentarios
1	Fijar: $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ y \mathbf{P}_k^-	Se fijan valores "a priori" del vector de estados y de la covarianza del error.
2	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$	Calcular la "ganancia de Kalman", \mathbf{K}_k .
3	$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$	Actualizar la estimación con las mediciones.
4	$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$	Calcular la matriz de covarianza del error.
5	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k$ $\mathbf{P}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k$	Calcular los nuevos vectores de estados y de la covarianza del error.
6	Retomar el Paso 2.	Continuar con el algoritmo recursivo.

Como puede observarse, el FK es un algoritmo *recursivo* de implementación computacional relativamente sencilla, que requiere básicamente cálculo vectorial (o matricial) elemental. El algoritmo presentado en la Tabla 4 puede ser reescrito de otras maneras alternativas, y por tal motivo ecuaciones formalmente diferentes podrían encontrarse en la literatura. Además, dicho algoritmo corresponde a un modelo discreto con mediciones discretas, pero existen también versiones del FK para el caso de un modelo discreto con mediciones continuas, o de modelos continuos con mediciones discretas o continuas (ver por ejemplo, Jazwinski, 1970).

Extensión del FK para procesos con entradas determinísticas

En muchos casos, el proceso posee entradas determinísticas, y entonces el modelo de la ecn. (5.a) se transforma en:

$$x_{k+1} = \varphi_k x_k + B u + W_k \tag{9}$$

donde $\mathbf{B} u$ es la entrada determinística adicional. La aplicación del principio de superposición para sistemas lineales, permite determinar que el FK resultante es formalmente idéntico al de la Tabla 4, con la ecuación de proyección de los estados (primera ecuación del Paso 5 del algoritmo), reemplazada por:

$$\hat{x}_{K+1}^- = \varphi \hat{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t_{k+1}, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (10)$$

El problema del regulador lineal estocástico

El problema que comentaremos en este punto es una aplicación del FK, y surge como una continuación natural y extensión del problema del regulador lineal determinístico ya tratado en el Capítulo XVI, pero ahora para el caso de procesos con ruidos de estadística conocida. En la bibliografía, este problema se conoce también como LQG (“linear quadratic regulator”).

Consideremos un proceso descrito por el modelo de estados estocástico y discreto de las ecns. (5,6). Como ya se mencionara en otras ocasiones, este modelo puede surgir de una linealización y una posterior discretización de las ecuaciones de balance de un proceso real. El problema de optimización consiste en determinar el vector de control u que permita minimizar el siguiente funcional de costo, similar al de la ecn. (13) del Capítulo XVI:

$$J = E \left\{ x^T(t_f) S x(t_f) + \int_0^{t_f} [x^T(t) W_x x(t) + u^T(t) W_u u(t)] dt \right\} \quad (11)$$

Nótese que el funcional de la ecn. (11) incluye al operador E “valor esperado”, para considerar las características estocásticas del problema.

Para resolver este problema es necesario estimar los estados x del proceso, a partir de las mediciones z . Si el proceso y las mediciones fueran “libres de ruido” (o con un ruido relativamente reducido), para determinar el vector x sería posible utilizar un observador (como el comentado en el punto XX.3.1.); pero como el sistema considerado es estocástico (donde los ruidos pueden tornar erróneas las estimaciones de un observador), es conveniente implementar una estrategia de estimación estocástica.

Desde un punto de vista teórico, para poder resolver el problema se requiere que el sistema de las ecns. (5) sea controlable con respecto a la entrada u ; y observable con respecto a las mediciones z . Si se cumplen estas condiciones, la solución del problema se divide en los dos pasos siguientes (Brown, 1983):

- 1) estimar los estados por medio de un FK (ver algoritmo de la Tabla 4); y
- 2) calcular la matriz de realimentación K_1 como si las mediciones de los estados fueran exactas y libres de ruido (problema del regulador lineal determinístico); es decir:

$$u_k = -K_1 x_k \quad (12)$$

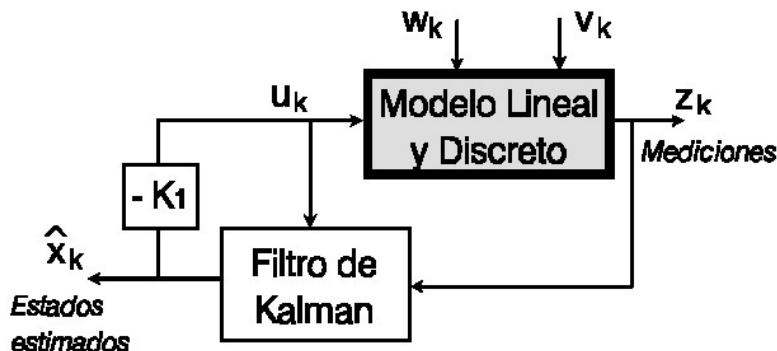


Figura XX.8: El regulador lineal estocástico óptimo. Esquema en bloques para la simulación numérica.

En definitiva, la solución del problema se resume en la Figura 8.

XX.4. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN PARA PROBLEMAS NUMÉRICAMENTE “MAL CONDICIONADOS”

En este punto consideraremos un problema de estimación relacionado principalmente con la implementación de mediciones “fuera de línea”, y que surge con gran frecuencia en aplicaciones científicas y/o tecnológicas. Cuando se efectúan mediciones, es frecuente que la señal provista por el medidor difiera de la señal que realmente se pretende medir, ya sea porque el medidor -caracterizado por una función de transferencia g -, “altera” la señal original, o por la presencia de ruidos de medición (n). En estos casos diremos que el medidor provee sólo una medición indirecta (z) de la variable a medir (u).

En muchas aplicaciones de índole práctica, la relación entre z , g y u está representada por medio de la siguiente versión estocástica de una integral de Fredholm de primera especie:

$$z(t) = \int_0^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau + n(t) \quad (13)$$

La función de transferencia, $g(t, \tau)$, se conoce también como el “ensanchamiento instrumental” del medidor. El problema de estimación (o “deconvolución”) asociado a la ecn. (13) consiste en encontrar un algoritmo estimador (o “filtro”), que permita determinar $u(t)$ a partir de la medición z , el ensanchamiento g , y la estadística del ruido de medición. La Figura 9 ilustra los conceptos anteriores. El símbolo “ $\hat{}$ ” indica el valor estimado de la variable.

La ecn. (13) puede considerarse como una operación de filtrado de la señal $u(t)$, a través de un filtro lineal y variante en el tiempo representado por $g(t, \tau)$. La función g es invariante en el tiempo cuando $g(t, \tau) = g(t - \tau)$. En tal caso, la forma de g no depende de τ ; y la ecn. (13) se transforma en una verdadera integral de convolución. La “deconvolución” es la operación de filtrado inverso, que permite

estimar la variable $u(t)$. El medidor "ideal" es aquel que no introduce ruido de medición, y cuya función g es una Delta de Dirac; en tal caso, la ecn. (13) se transforma en $z=u$, y entonces la medición es idéntica a la variable a medir.

A efectos de la implementación en computadora de los algoritmos estimadores, se requiere la versión discreta de la ecn. (13):

$$z(k) = \sum_a^b g(k, k_0) u(k_0) + n(k) = y(k) + n(k) \quad (14)$$

donde k y k_0 son los valores discretos correspondientes a t y τ , respectivamente; $[a, b]$ es un soporte lo suficientemente ancho como para incluir todos los valores no nulos de $z(k)$; $y(k)$ es la medición libre de ruido; y $n(k)$ es un ruido aleatorio, de media nula y varianza r . En notación vectorial, la ecn. (14) resulta:

$$z = Gu + n = y + n \quad (15)$$

donde \mathbf{G} ($n \times p$) es una matriz; y \mathbf{z} ($n \times 1$), \mathbf{u} ($p \times 1$) y \mathbf{n} ($n \times 1$) son vectores columna. La solución más inmediata del problema de inversión numérica, es por medio del método de *mínimos cuadrados* (MC) (Noble y Daniel, 1977). A partir de la ecn. (15), la estimación de u resulta:

$$\hat{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{z} \quad (16)$$

La estimación de u a través de la ecn. (16) resolvería nuestro problema. Sin embargo, muchas aplicaciones ingenieriles se caracterizan por su mal condicionamiento numérico, evidenciado por un número de condición de $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ excesivamente grande. (El número de condición de la matriz $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ se define como la relación entre el mayor y el menor de sus valores singulares). Cuando el problema es numéricamente mal condicionado, la estimación por mínimos cuadrados no resulta adecuada (como veremos más adelante a través de un ejemplo). La inversión numérica de problemas mal condicionados es usual en ciencia y tecnología. Tales problemas surgen, por ejemplo, cuando un sensor actúa como filtro pasa-bajos de la señal que intenta medir.

A continuación, se analizarán algunas técnicas numéricas adecuadas para la inversión de problemas mal condicionados. Clasificaremos las técnicas según sean aplicables a modelos determinísticos o estocásticos. Las técnicas basadas en modelos estocásticos son más complejas, pero resultan más adecuadas cuando se conoce la estadística del ruido de medición.

XX.4.1. Técnicas Determinísticas de Inversión Numérica

En las técnicas presentadas en este punto se consideran nulos los ruidos de medición; es decir, se asume $n=0$ en las ecns. (13-15).

a) *Aproximaciones Sucesivas* (AS)

La técnica consiste en sucesivas aplicaciones de la operación de convolución a la medición y funciones relativas. Se define el siguiente conjunto de funciones diferencia (Ishige y col., 1971):

$$\Delta z_0(k) = z(k) \quad (17.a)$$

$$\Delta z_i(k) = \Delta z_{i-1}(k) - \sum_{-\infty}^{+\infty} g(k, k_0) \Delta z_{i-1}(k_0); \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (17.b)$$

Entonces, la n-ésima aproximación de $u(k)$ se obtienen como:

$$\hat{u}_n(k) = \sum_{i=1}^n \Delta z_i(k) \quad (18)$$

En teoría, cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene la solución exacta. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas se observa que al aumentar el número de aproximaciones, la estimación se torna cada vez más oscilatoria. Por tal motivo, es necesario detener el procedimiento para algún n dado.

b) *Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR)*

La ecn. (16) representa una solución del problema de inversión, por mínimos cuadrados no-restringidos; pero esa solución tiene inconvenientes numéricos cuando el problema es numéricamente mal condicionado. La deconvolución resulta mejor condicionada utilizando la siguiente expresión:

$$\hat{u} = (G^T G + \beta I)^{-1} G^T z \quad (19)$$

donde el factor de amortiguamiento β es un parámetro ajustable de la técnica. El término βI reduce el mal condicionamiento del problema, al asegurar que la matriz $(G^T G + \beta I)$ resulte definida positiva.

c) *Descomposición en Valores Singulares (DVS)*

Es una técnica alternativa a la de MCR; y consiste en la descomponer la matriz G a través de (Golub y Reinsch, 1970; Hanson, 1970):

$$G = W Q V^T \quad (20)$$

donde Q es una matriz diagonal, cuyos elementos son los valores singulares de G ; y W, V son matrices ortogonales cuyas columnas w_j y v_j son los autovectores de GG^T y $G^T G$, respectivamente. La solución restringida óptima es:

$$\hat{u} = V(Q^T Q + \beta I)^{-1} Q^T W^T z = \sum_{j=1}^p w_j^T z \left(\frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \beta} \right) v_j \quad (21)$$

donde σ_j ($j=1, \dots, p$) son los valores singulares de G .

d) *Transformada de Fourier (TF)*

Esta técnica es aplicable sólo cuando el ensanchamiento g es invariante en

el tiempo; es decir, si $g(t,\tau) = g(t-\tau)$. En tal caso, la ecn. (14) se transforma en una convolución discreta, y utilizando la transformada discreta de Fourier resulta (Papoulis, 1986):

$$Z(m) = G(m) U(m) \quad (22)$$

donde Z , G y U son las transformadas discretas de Fourier de z , g y u , respectivamente; y m es la frecuencia discreta. Una estimación (restringida) de $U(m)$ se obtiene como:

$$\hat{U}(m) = \begin{cases} \frac{Z(m)}{G(m)} & ; m \leq m_c \\ 0 & ; m > m_c \end{cases} \quad (23)$$

donde m_c es una frecuencia crítica a seleccionar. La idea de la restricción introducida por la ecn. (23) es la de eliminar todas las componentes de alta frecuencia de $u(t)$, que incluyen ruidos de medición muy amplificadas por el factor $1/G(m)$ (función monótonamente decreciente, y aproximadamente nula para $m > m_c$).

XX.4.2. Técnicas Estocásticas de Inversión Numérica

Las técnicas presentadas en este punto asumen la existencia de ruido de medición. Comentaremos sólo dos técnicas, basadas en el filtro de Wiener en los dominios temporal y frecuencial. Además, presentaremos exclusivamente las expresiones finales a utilizar en cada caso. Antecedentes y mayores detalles pueden consultarse en Wiener (1949) y Brown (1983).

a) Filtro de Wiener en el Dominio Temporal (FWt)

Se asume que: a) la entrada \mathbf{u} no está correlacionada con el ruido \mathbf{n} ; y b) los valores esperados de \mathbf{u} y \mathbf{z} son nulos. Entonces, puede demostrarse que una estimación óptima de \mathbf{u} es:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_u G^T \left(G \sum_u G^T + \sum_n \right)^{-1} \mathbf{z} \quad (24)$$

donde Σ_u y Σ_n son las matrices de covarianza asociadas a \mathbf{u} y \mathbf{n} , respectivamente. Si estas variables se asumen como un "ruido blanco", entonces Σ_u y Σ_n resultan matrices diagonales. En una primera aproximación, pueden utilizarse las siguientes expresiones para las matrices de covarianza (Gugliotta y col., 1990):

$$\sum_n = r \mathbf{I} \quad (25.a)$$

$$\sum_u = c_1 \text{diag} \{ z^2(1), \dots, z^2(n) \} \quad (c_1 > 0) \quad (25.b)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad; y r y c_1 son parámetros a ajustar. Una expresión más simplificada de la ecn. (25.b) es: $\Sigma_u = q \mathbf{I}$, siendo q un parámetro de ajuste.

Este método es muy simple de aplicar, pero tiene la limitación de involucrar

matrices muy grandes, y de incluir el ajuste de los parámetros r y c_1 o q (en realidad, la estimación de u resulta más afectada por la relación r/q que por los ajustes individuales de ambos valores).

b) *Filtro de Wiener en el Dominio Frecuencial (FWf)*

Consideremos el modelo estocástico invariante en el tiempo, derivado a partir de la ecn. (14):

$$z(k) = \sum_a^b g(k - k_0) u(k_0) + n(k) \quad (26)$$

Si se asume que: a) $u(k)$, $z(k)$ y $n(k)$ son variables estocásticas de media cero; y b) $u(k)$ y $n(k)$ no están correlacionadas, entonces la estimación óptima en el dominio frecuencial de $u(k)$ viene dada por (Wiener, 1949):

$$\hat{U}(m) = \frac{\bar{G}(m)}{G(m)\bar{G}(m) + \frac{\varphi_n(m)}{\varphi_u(m)}} Z(m) \quad (27)$$

donde $U(m)$, $G(m)$ y $Z(m)$ son las transformadas discretas de Fourier de $u(k)$, $g(k)$ y $z(k)$, respectivamente; y φ_n y φ_u son los espectros de potencia de $n(k)$ y $u(k)$, respectivamente. Si consideramos que $n(k)$ es un ruido blanco estacionario, y que $u(k)$ puede ser aproximado por $z(k)$, entonces el cociente φ_n/φ_u resulta una función creciente en m . Como $G(m)$ es una función decreciente, para frecuencias altas $G(m) \approx 60$, y la inversión numérica a través de la ecn. (27) queda asegurada por el término (positivo) φ_n/φ_u . En algunas aplicaciones prácticas se encuentra conveniente reemplazar: $\varphi_n/\varphi_u = c m^2$ (siendo c un parámetro de ajuste). En general, valores elevados de c producen una estimación suave de u , pero distorsionada respecto al valor real; mientras que valores muy bajos de c originan oscilaciones numéricas muy pronunciadas.

XX.4.3. Ejemplos Simulados

Ejemplo 1

Consideremos las funciones $u(k)$ y $g(k)$ indicadas en la Figura 10.a), donde el “ensanchamiento instrumental” $g(k)$ lo asumimos invariante en el tiempo, es decir: $g(k) = g(k - k_0)$. La convolución numérica de ambas funciones permite obtener la medición libre de ruido, $y(k)$; y la medición real, $z(k)$, representadas en la Figura 10.b). Para el cálculo de $z(k)$, se adoptó un ruido de medición, $n(k)$, de características aleatorias, con media nula y distribución normal.

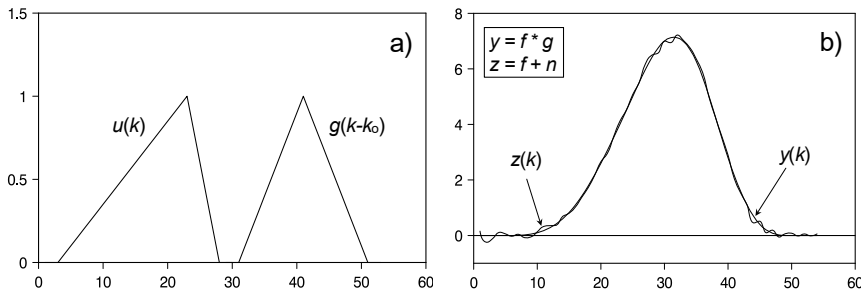


Figura XX.10: a) señal a estimar (u) y función de ensanchamiento (g); b) mediciones libre de ruido (y) y real (z).

La estimación más inmediata de $u(k)$ es a partir de la técnica de MC. En la Figura 11.a), se observa una estimación prácticamente exacta cuando se asume nulo el ruido de medición; sin embargo, éste no es el caso real en la práctica. La Figura 11.b) indica la ineficacia del método de MC, cuando la medición es ruidosa. Obsérvese que el ruido “esconde” totalmente la verdadera señal $u(k)$.

En la Figura 12, se muestran las estimaciones de $u(k)$ a partir de técnicas determinísticas. En la Figura 12.a), se presentan las estimaciones mediante las técnicas de MCR y DVS, observándose resultados prácticamente coincidentes. (Aunque no se muestran simulaciones, la técnica de AS provee resultados similares). En la Figura 12.b) se indica la estimación por la técnica frecuencial de TF, en la cual se adoptaron 256 puntos para la discretización de g y de z , lo que permitió aplicar un algoritmo convencional de transformada rápida de Fourier (FFT). En MCR y en DVS, a medida que se aumenta el parámetro β , se obtienen soluciones menos oscilatorias, pero más apartadas de la señal real. Efectos similares se observan en TF, al disminuir la frecuencia de corte, m_c .

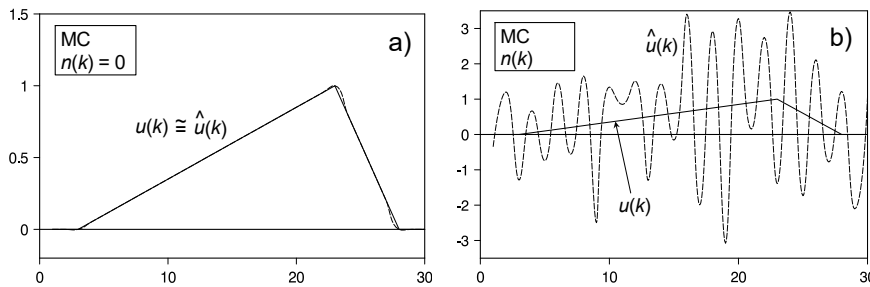


Figura XX.11: Efecto del ruido de medición en la estimación de $u(k)$ por mínimos cuadrados (MC). a) Medición libre de ruido; b) medición con ruido.

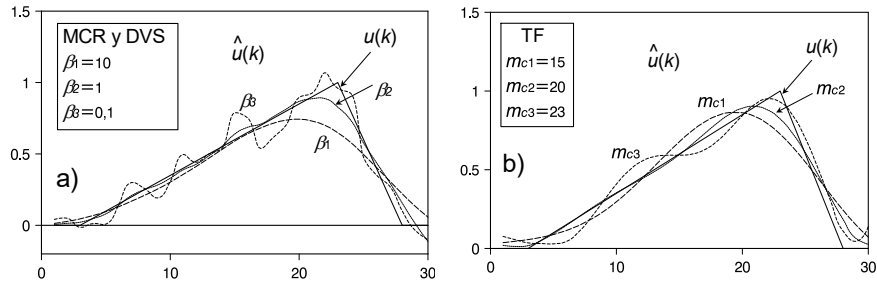


Figura XX.12: Estimaciones con técnicas determinísticas. a) MCR y DVS; b) TF.

En la Figura 13, se muestran las estimaciones de $u(k)$ a partir de técnicas estocásticas. En la Figura 13.a), se presentan las estimaciones mediante el filtro de Wiener en el dominio temporal (FWt); y en la Figura 13.b), los resultados correspondientes al filtro de Wiener en el dominio frecuencial (FWf). Al igual que en las técnicas determinísticas, las estimaciones menos oscilatorias se apartan más de la solución real.

Nótese que para el ejemplo aquí presentado, todas las técnicas utilizadas (determinísticas o estocásticas), proveen resultados cualitativamente similares. Sin embargo, en otros problemas donde el mal condicionamiento numérico es más elevado, la aplicación de técnicas estocásticas suele ser notoriamente ventajosa, particularmente si se conoce la estadística del ruido.

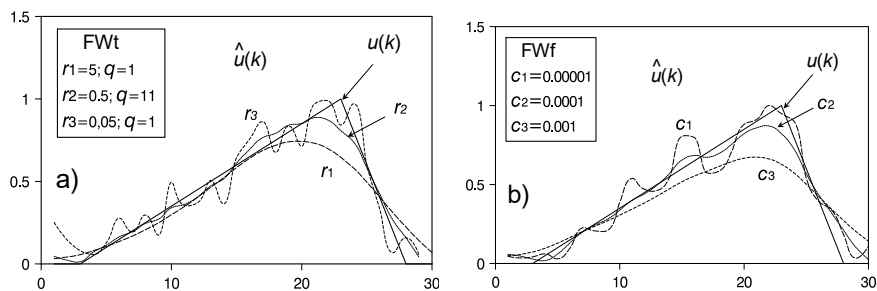


Figura XX.13: Estimaciones con técnicas estocásticas. a) FWt; b) FWf.

Ejemplo 2

Consideremos la medición de la distribución de tamaños de partículas (DTP) de un látex, por dispersión de luz dinámica (Kourti y col., 1990). El instrumento provee una medición $z(t)$ dada por:

$$z(t) = \int G(D, t) u(D) dD \tag{28}$$

donde D es el diámetro de partícula; $u(D)$ es la DTP a medir; y $G(D, t)$ es el

“ensanchamiento” no uniforme característico de la medición, cuya versión discreta puede expresarse como ($M \geq N-1$):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-a} & e^{-a/2} & e^{-a/3} & \dots & e^{-a/N} \\ e^{-2a} & e^{-2a/2} & e^{-2a/3} & \dots & e^{-2a/N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-Ma} & e^{-Ma/2} & e^{-Ma/3} & \dots & e^{-Ma/N} \end{bmatrix} \quad (29)$$

donde a es un parámetro que depende de las condiciones de medición y de la discretización usada. Para la DTP, es usual adoptar una distribución normal logarítmica, $N(D)$, dada por:

$$N(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma D} \exp \left[-\frac{(\ln D - \ln D_g)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (30)$$

donde D_g es el diámetro medio geométrico de la distribución; y σ es la varianza. A efectos de la simulación, se adoptaron los siguientes valores: $M=N=50$; $a=1$; $D_g = 50$ nm, y $\sigma = 0,1$.

La dificultad del presente problema reside en las características del >núcleo= de la ecn. (28), evidenciado por las columnas de la matriz G . En efecto, todas las columnas de G contienen exponenciales decrecientes, funciones sumamente suaves que dificultan la inversión numérica. En la Figura 14.a), se muestran: i) la señal a medir, $u(k)$; ii) la medición, $z(k)$; y iii) tres valores característicos del ensanchamiento, representados por tres columnas de la matriz G . En la Figura 14.b), se muestran las estimaciones obtenida por MCR y por FWt. El presente problema es numéricamente más dificultoso que el antes analizado; y por tal motivo, la calidad de las estimaciones es inferior.

Los ejemplos simulados indican las notorias dificultades numéricas introducidas por el ruido de medición. En general, los problemas de inversión correspondientes a ensanchamientos instrumentales “suaves” presentan una dificultad aún mayor. En los ejemplos analizados, todas las técnicas proveen resultados muy similares. Sin embargo, si se pudiera conocer la estadística del ruido de medición, las técnicas estocásticas permitirían una mejor estimación de la señal $u(k)$, ya que puede introducirse información “a priori” sobre las características del ruido, en búsqueda de la mejor solución.

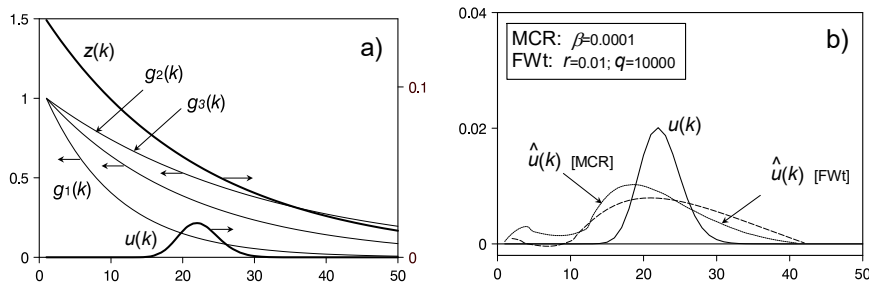


Figura XX.14: Estimación de la DTP de un látex: a) funciones de ensanchamiento, DTP real y medición; b) estimaciones de la DTP por MCR y FWt.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- P.1) Suponer que el sensor de nivel del ejemplo de la Figura 6 tiene una dinámica dada por: $dh_{2,m}/dt = -k h_{2,m} + h_2$. Simular el sistema para distintos valores de k , y observar las dificultades para controlar h_1 cuando k disminuye (es decir, cuando aumenta la constante de tiempo del medidor tornándolo más “lento”).
- P.2) a) Linealizar y discretizar el modelo matemático del ejemplo de la Figura 6. b) Desarrollar el Filtro de Kalman para estimar h_1 a partir de mediciones de h_2 . c) Comparar los resultados con los del caso determinístico.
- P.3) Considerar el problema P.3) del Capítulo XVI. Discretizar el modelo y resolver el problema del regulador óptimo estocástico en base al esquema de la Figura 8.

BIBLIOGRAFÍA CITADA

- Amy, L. (1992). “*Automation Systems for Control and Data Acquisition*”, Instrument Society of America (ISA), North Carolina.
- Anderson, B. y J. Moore (1979). “*Optimal Filtering*”, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Brown, R. (1983). “*Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*”, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Golub, G. y C. Reinsch (1970). “*Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions: Handbook for Automatic Computation*”, II. Linear Algebra. Wilkinson y Reinsch, Ed., Springer-Verlag, New York.
- Gugliotta, L., J. Vega y G. Meira (1990). “*Instrumental Broadening Correction in Size Exclusion Chromatography. Comparison of Several Deconvolution Techniques*”, J. Liq. Chromatogr., 13(9), 1671-1708.
- Hanson, R. (1970). “*A Numerical Method for Solving Fredholm Integral Equations of the First Kind using Singular Values*”, Technical Memorandum No. 243, Aug. 14. Jet Propulsory Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena.
- Ishige, T., S. Lee y A. Hamielec (1971). “*A Solution of Tung's Axial Dispersion Equation by Numerical Techniques*”. J. Appl. Polym. Sci., 15, 1607.
- Jazwinski, A. (1970). “*Stochastic Processes and Filtering Theory*”, Academic Press, Inc., New York.
- Kalman, R. (1960). “*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*”, J. of Basic Eng. Trans. ASME, Vol. 82D, 34-45.
- Kourti, T, J. MacGregor, A. Hamielec, D. Nicoli y V. Elings (1990). “*On-Line Particle Size Determination during Latex Production Using Dynamic Light Scattering*”. En “*Polymer Characterization. Physical Property, Spectroscopic, and Chromatographic Methods*”. Craver y Provder Ed., ACS Series.
- Luenberger, D. (1971). “*An Introduction to Observers*”, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16, 6, 596.
- Noble, B. y J. Daniel (1977). “*Applied Linear Algebra*”, Second Ed. Prentice Hall, New York.
- Papoulis, A. (1986). “*Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación Espectral*”, Marcombo, Boixareu Ed., Barcelona.
- Ray, H. (1981). “*Advanced Process Control*”, McGraw-Hill, Inc., Chemical Engineering Series, New York.
- Stephanopoulos, G. (1984). “*Chemical Process Control: An Introduction to Theory and Practice*”, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wiener, N. (1949). “*Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*”. J. Wiley & Sons, Inc., New York.

