Propiedades de los Sistemas de Ecuaciones Algebraicas Lineales

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

Planteo del problema. Teoremas básicos

- Se trata de resolver *n* ecuaciones lineales simultáneas con *n* incógnitas:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ con \ i = 1,2,\ldots,n$$

O, en su forma matricial compacta

$$\underline{\underline{A}} . \underline{x} = \underline{b}$$

donde:
$\underline{\underline{A}} = [a_{ij}]$ es la matriz de coeficientes (cuadrada, nxn)
$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ es el vector de incógnitas,
$\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$ el vector de términos independientes.

- Para el caso que nos interesa, tanto la matriz $\underline{\boldsymbol{A}}$ como el vector $\underline{\boldsymbol{b}}$ tienen componentes reales.
- En adelante se obviará la notación transpuesta de la matriz, suponiendo que en las operaciones entre matrices se disponen éstas de tal forma que sean compatibles para las mismas.

- Definimos la denominada matriz aumentada como:

$$\underline{\underline{A}}_b = \left[\underline{\underline{A}}\ \underline{b} \right]\ Matriz\ ampliada\ de\ \underline{\underline{A}}\ \left[n\ x\ (n+1) \right]$$

- Dado que $\underline{b}$ es un vector columna; y recordando la definición de rango de una matriz: $r(\underline{A})$, el teorema básico de existencia de solución establece:
  1) El SEAL tiene solución sí y sólo sí: $r(\underline{A}) = r(\underline{A}_b)$.
  2) Si $r(\underline{A}) = r(\underline{A}_b) = k < n$, luego las $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son variables cuyas columnas son linealmente independientes en A, de modo que las restantes (n-k) variables pueden asignarse arbitrariamente. O dicho de otra forma, hay una familia paramétrica de $(n-k)$ soluciones.
  3) Si $r(\underline{A}) = r(\underline{A}_b) = n$, hay una única solución.

- Corolario: Para el caso homogéneo ($\underline{b} = \underline{0}$), o sea $\underline{A}.\boldsymbol{x} = \underline{0}$ habrá solución no trivial, si y sólo si $r(\underline{A}) < n$.

- Para estos problemas, cosa que no ocurre en el caso no lineal, existe solución analítica (recordemos la denominada *Regla de Crámer*), pero la dificultad reside principalmente en computar esa solución.
- La evaluación de determinantes no hace práctico dicho procedimiento analítico.
- El problema es desarrollar algoritmos computacionales más eficientes, es decir que sean más rápidos, sobre todo en el número de operaciones necesarias y que además sean robustos de modo que la solución calculada sea lo más precisa posible.

- Un punto vital es discutir cómo se espera que sea la matriz de coeficientes. En general, puede encontrarse entre alguna de estas dos categorías:

  i. Llena pero no muy grande. Es decir con muy pocos ceros, y en donde *n* no sea mayor que *100*, por ejemplo.

  ii. Dispersa y relativamente muy grande, denominadas también ralas.

- En estos casos, son muy pocos (en relación al orden) los elementos distintos de cero y *n* puede ser mayor a *1000*.

- Naturalmente, los métodos desarrollados deben estar dirigidos a resolver alguna de estas dos categorías, y si es posible haciendo uso de sus características para incrementar su eficiencia.

- Un problema, cual es la condición del sistema, se puede analizar considerando un vector residual $\underline{r}$, cuando se tiene una solución calculada $\underline{x}^{(c)}$. Esto es:

$$\underline{r} = \underline{b} - \underline{\underline{A}} . \underline{x}^{(c)}$$

se sabe que si $\underline{x}^*$ es la solución exacta del SEAL:

$$\underline{\underline{A}} . \underline{x}^* = \underline{b} \text{ o bien } \underline{r} = \underline{b} - \underline{\underline{A}} . \underline{x}^* = \underline{0}$$

entonces será:

$$\underline{r} = \underline{\underline{A}} . \left(\underline{x}^* - \underline{x}^{(c)} \right)$$

luego,

$$\left(\underline{x}^* - \underline{x}^{(c)} \right) = \underline{\underline{A}}^{-1} . \underline{r}$$

- de donde se ve que aunque $\underline{r}$ tenga elementos muy chicos, si $\underline{A}^{-1}$ (matriz inversa) contiene coeficientes muy grandes, la diferencia entre $\underline{x}^*$ y $\underline{x}^{(c)}$ puede ser aún muy grande. Esto permite anticipar la importancia de un escalado en los coeficientes de la matriz $\underline{A}$ original, ya que aunque el vector residual $\underline{r}$ impuesto sea pequeño, el error encontrado para la solución puede ser muy grande.