



Matemática Superior Aplicada

matematica.superior.aplicada@gmail.com

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz

Auxiliares de Cátedra:

Dr. Juan Ignacio Manasaldi (jmanasaldi@frro.utn.edu.ar)

Ing. Amalia Rueda: (amalia.r739@gmail.com)



Optimización Multidimensional No Restringida

Método del Gradiente

- Utiliza una aproximación lineal para obtener una dirección de descenso de $f(\underline{x})$.
- Dirección de descenso: El vector $\underline{d}$ es una *dirección de descenso* de una función $f(\underline{x})$ si existe un $\delta > 0$ tal que:

$$f(\underline{x} + \lambda \underline{d}) < f(\underline{x}) \quad \forall \lambda \in (0, \delta)$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + \lambda \underline{d}) - f(\underline{x})}{\lambda} < 0$$

Optimización Multidimensional No Restringida

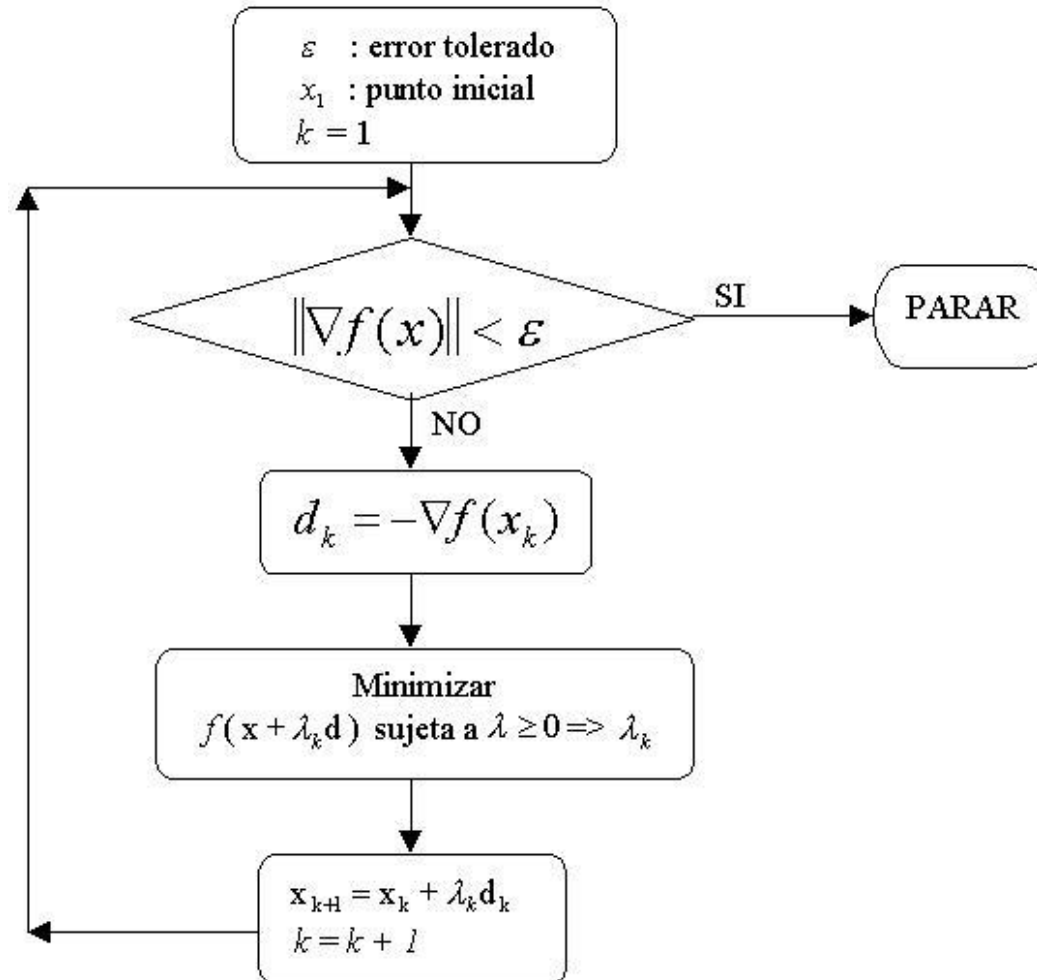
Método del Gradiente

- La búsqueda se realiza lo largo de la dirección $\underline{d}$, minimizando el límite citado anteriormente.
- Si $f(\underline{x})$ es diferenciable en $\underline{x}$ con gradiente no nulo la dirección de descenso con mayor pendiente es:

$$\underline{d} = -\frac{\underline{\nabla} f(\underline{x})}{\|\underline{\nabla} f(\underline{x})\|}$$

Método del Gradiente

Algoritmo



Ejemplo

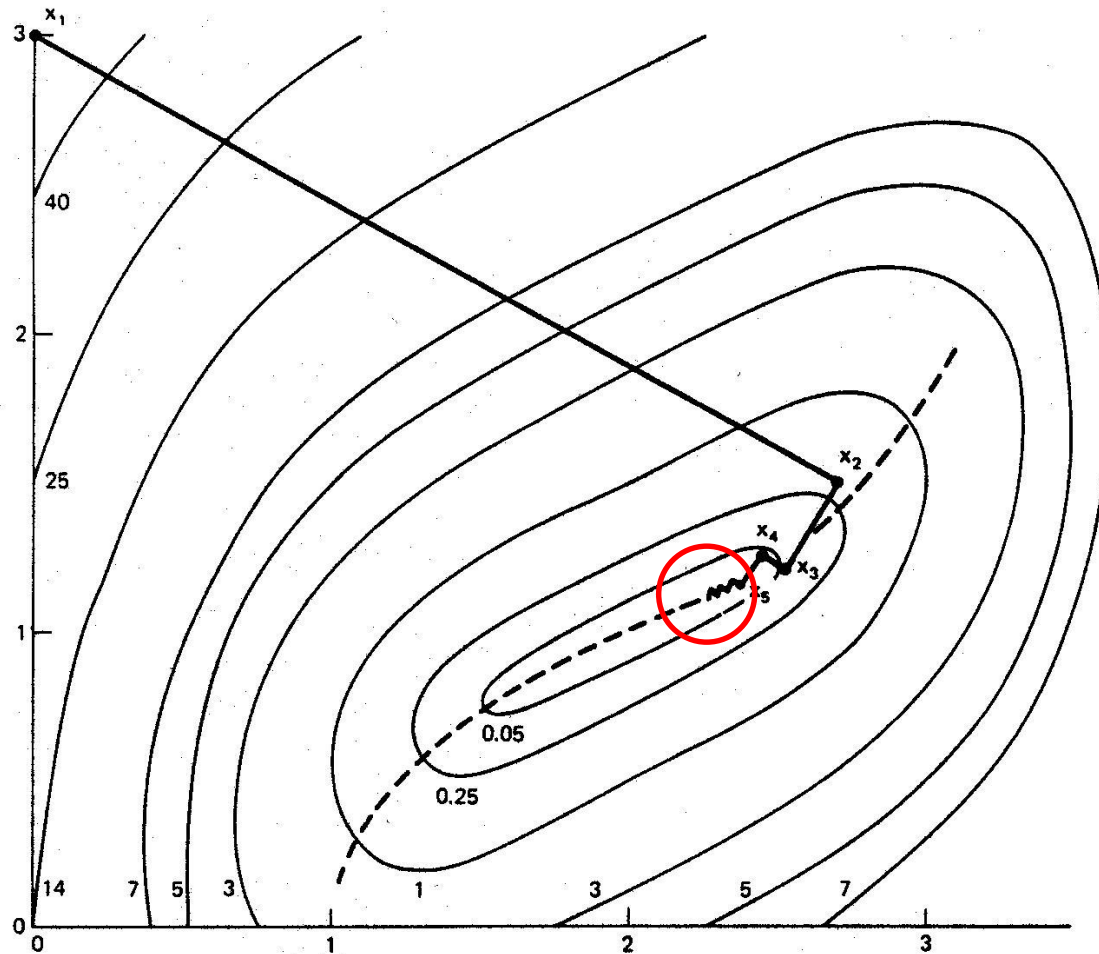
Problema: *Minimizar* $(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$, *punto de inicio:* (0.00, 3.00).

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

$$\underline{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) \\ -4(x_1 - 2x_2) \end{bmatrix}$$

k	$\begin{matrix} \mathbf{x}_k \\ f(\mathbf{x}_k) \end{matrix}$	$\nabla f(\mathbf{x}_k)$	$\ \nabla f(\mathbf{x}_k)\ $	$\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$	λ_k	$\mathbf{x}_{k+1}$
1	$\begin{pmatrix} 0.00, 3.00 \\ 52.00 \end{pmatrix}$	$(-44.00, 24.00)$	50.12	$(44.00, -24.00)$	0.062	$(2.70, 1.51)$
2	$\begin{pmatrix} 2.70, 1.51 \\ 0.34 \end{pmatrix}$	$(0.73, 1.28)$	1.47	$(-0.73, -1.28)$	0.24	$(2.52, 1.20)$
3	$\begin{pmatrix} 2.52, 1.20 \\ 0.09 \end{pmatrix}$	$(0.80, -0.48)$	0.93	$(-0.80, 0.48)$	0.11	$(2.43, 1.25)$
4	$\begin{pmatrix} 2.43, 1.25 \\ 0.04 \end{pmatrix}$	$(0.18, 0.28)$	0.33	$(-0.18, -0.28)$	0.31	$(2.37, 1.16)$
5	$\begin{pmatrix} 2.37, 1.16 \\ 0.02 \end{pmatrix}$	$(0.30, -0.20)$	0.36	$(-0.30, 0.20)$	0.12	$(2.33, 1.18)$
6	$\begin{pmatrix} 2.33, 1.18 \\ 0.01 \end{pmatrix}$	$(0.08, 0.12)$	0.14	$(-0.08, -0.12)$	0.36	$(2.30, 1.14)$
7	$\begin{pmatrix} 2.30, 1.14 \\ 0.009 \end{pmatrix}$	$(0.15, -0.08)$	0.17	$(-0.15, 0.08)$	0.13	$(2.28, 1.15)$
8	$\begin{pmatrix} 2.28, 1.15 \\ 0.007 \end{pmatrix}$	$(0.05, 0.08)$	0.09			

Ejemplo



```

x=[0.5,0.5];
delta=1;
h=1e-5;
n=length(x);
while delta>1e-4,
    for i=1:n
        ep=zeros(size(x));
        ep(i)=h;
        gradf(i)=(fex(x+ep)-fex(x-ep))/2/h;
    end
    direc=-gradf/norm(gradf);
    clear alpha f
    alpha(1)=0.1;
    alpha(2)=0.2;
    alpha(3)=0.3;
    f(1)=fex(x+alpha(1)*direc);
    f(2)=fex(x+alpha(2)*direc);
    f(3)=fex(x+alpha(3)*direc);
    i=3;

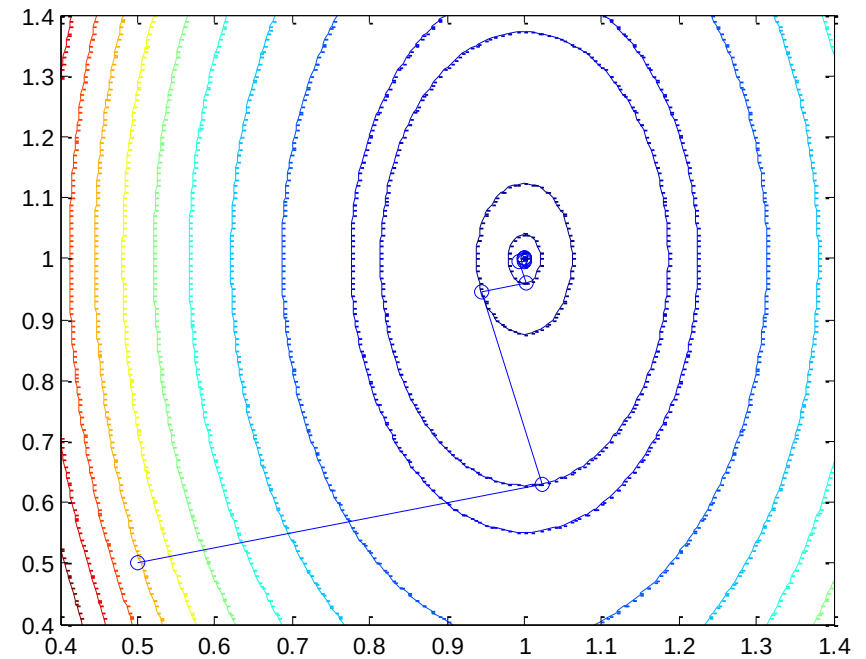
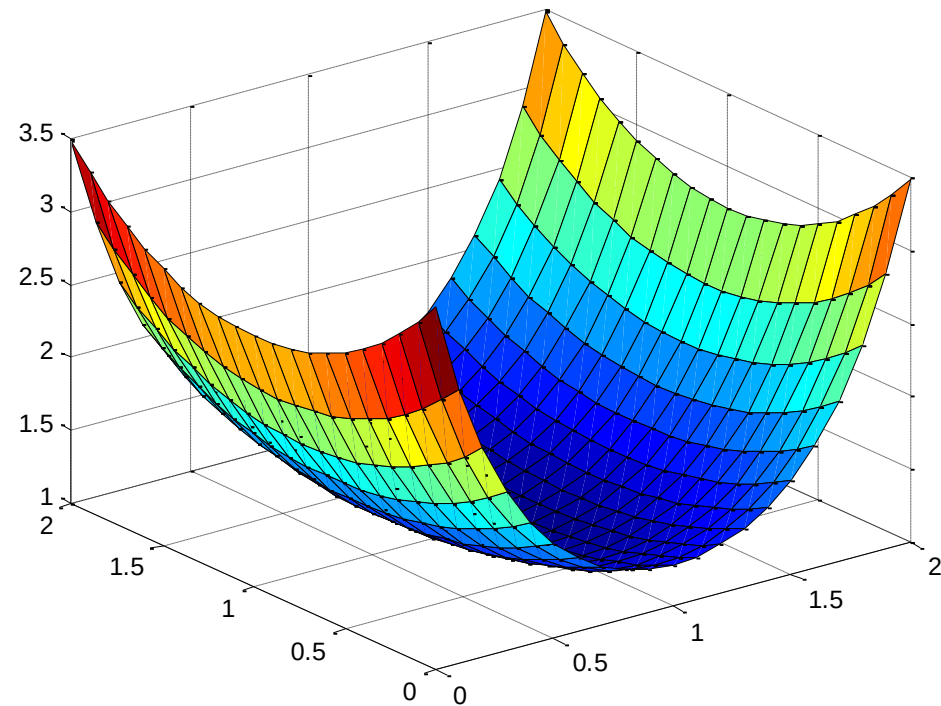
```

```

while abs(alpha(i)-alpha(i-1))>1e-6
    ft=f(i-2:i)';
    at=alpha(i-2:i)';
    a=[ones(3,1),at,at.^2];
    coeff=a\ft; i=i+1;
    alpha(i)=-coeff(2)/2/coeff(3);
    f(i)=fex(x+alpha(i)*direc);
end
x=x+alpha(i)*direc;
delta=abs(alpha(i));
end

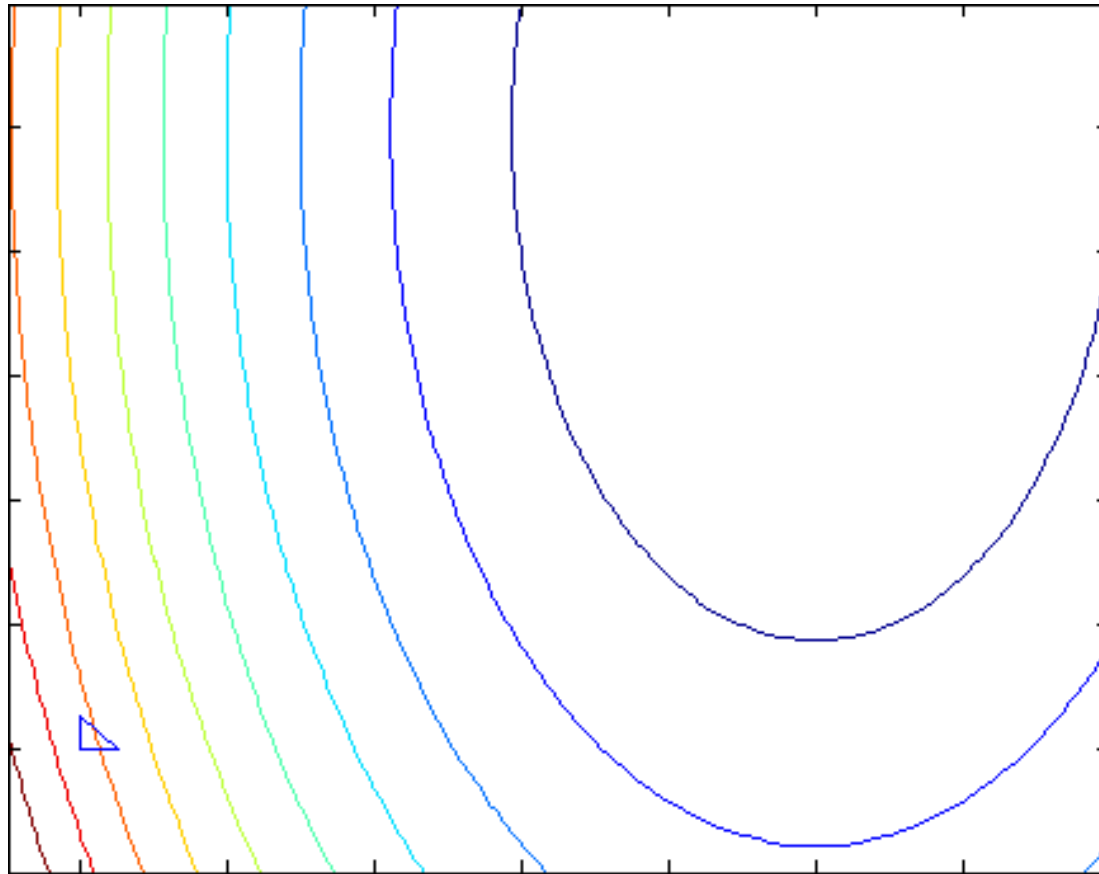
```

$$f(x) = \exp\left((x_1 - 1)^2 + \frac{(x_2 - 1)^2}{4}\right)$$



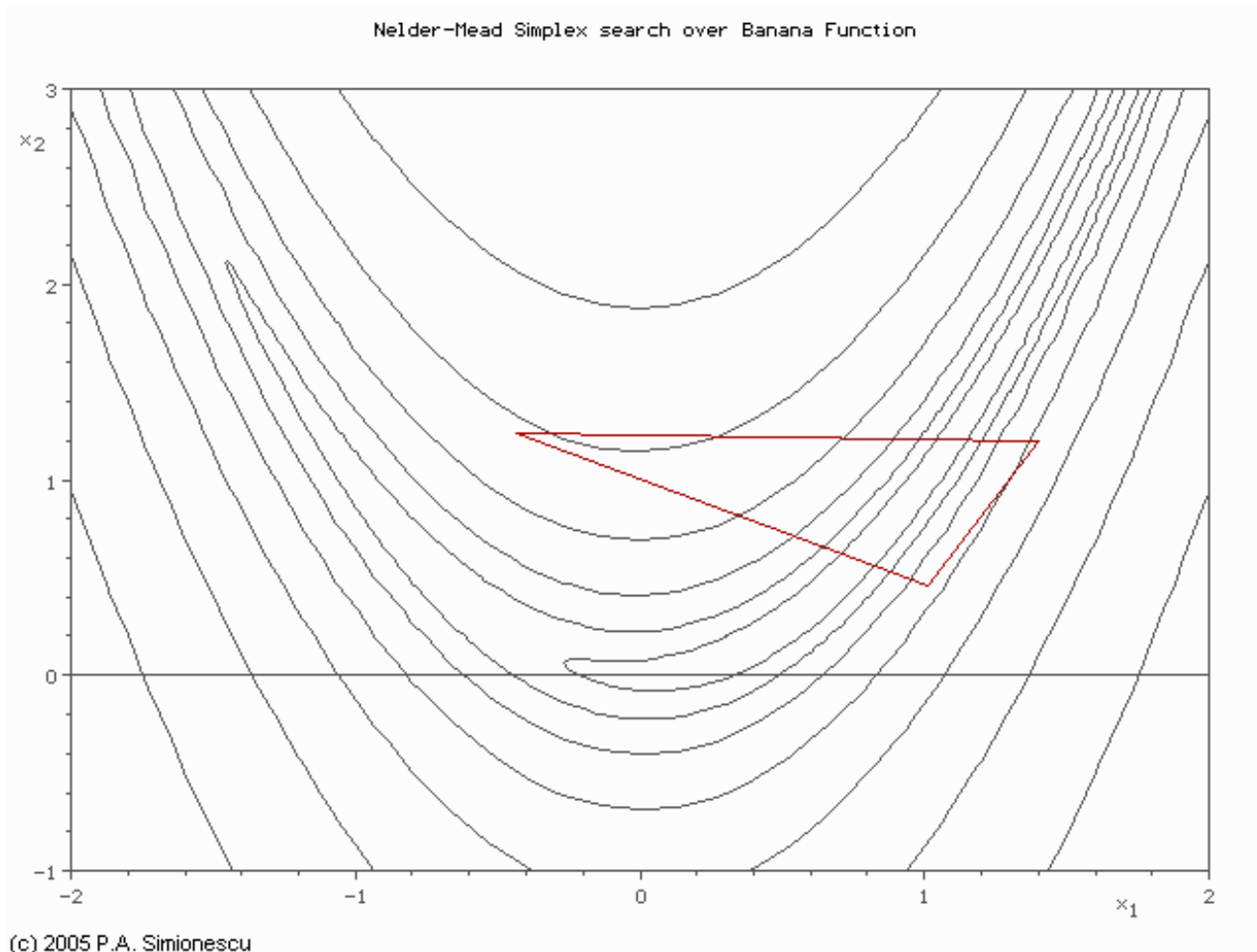
Optimización Multidimensional – Método Simplex

$$f(x) = \exp \left((x_1 - 1)^2 + \frac{(x_2 - 1)^2}{4} \right)$$



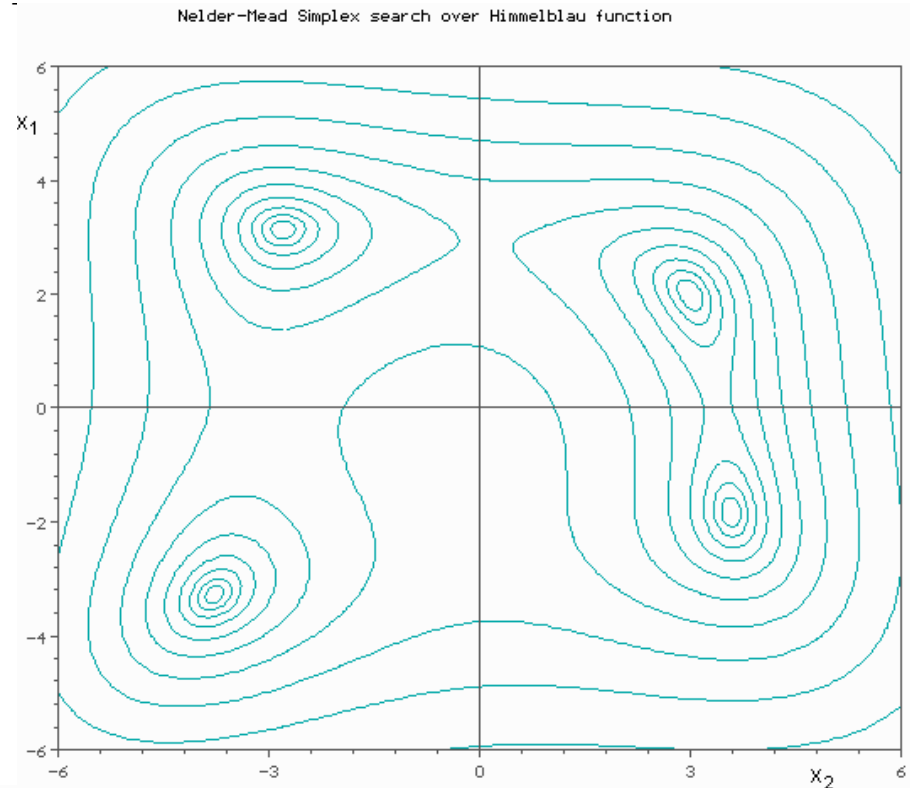
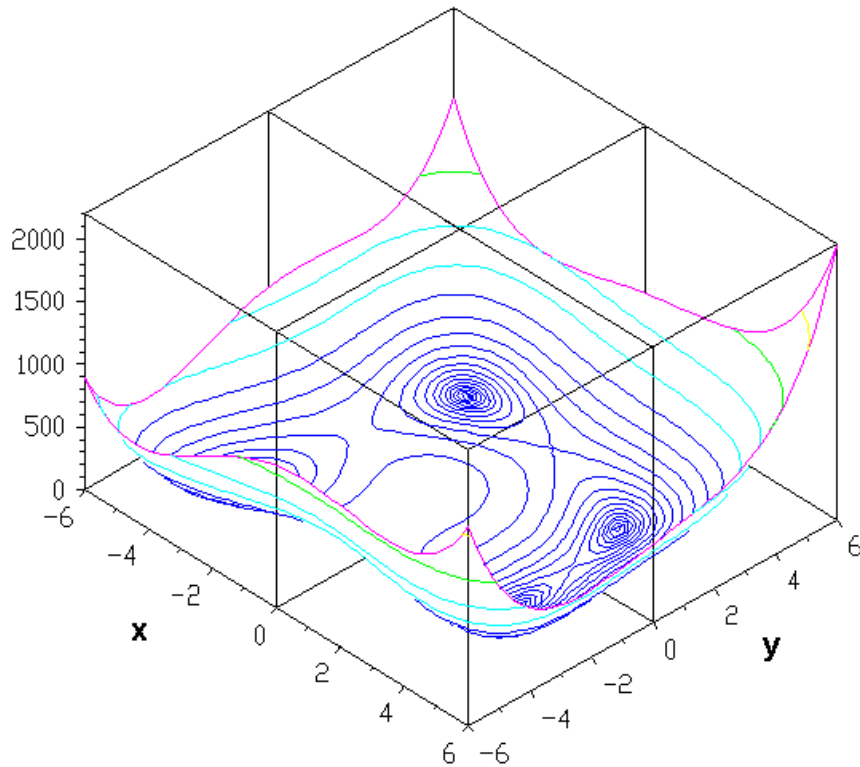
Optimización Multidimensional – Método Simplex

Función de Rosenbrock ‘banana’ : $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$



Optimización Multidimensional – Método Simplex

Función de Himmelblau: $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$



(c) P.A. Simionescu 2006