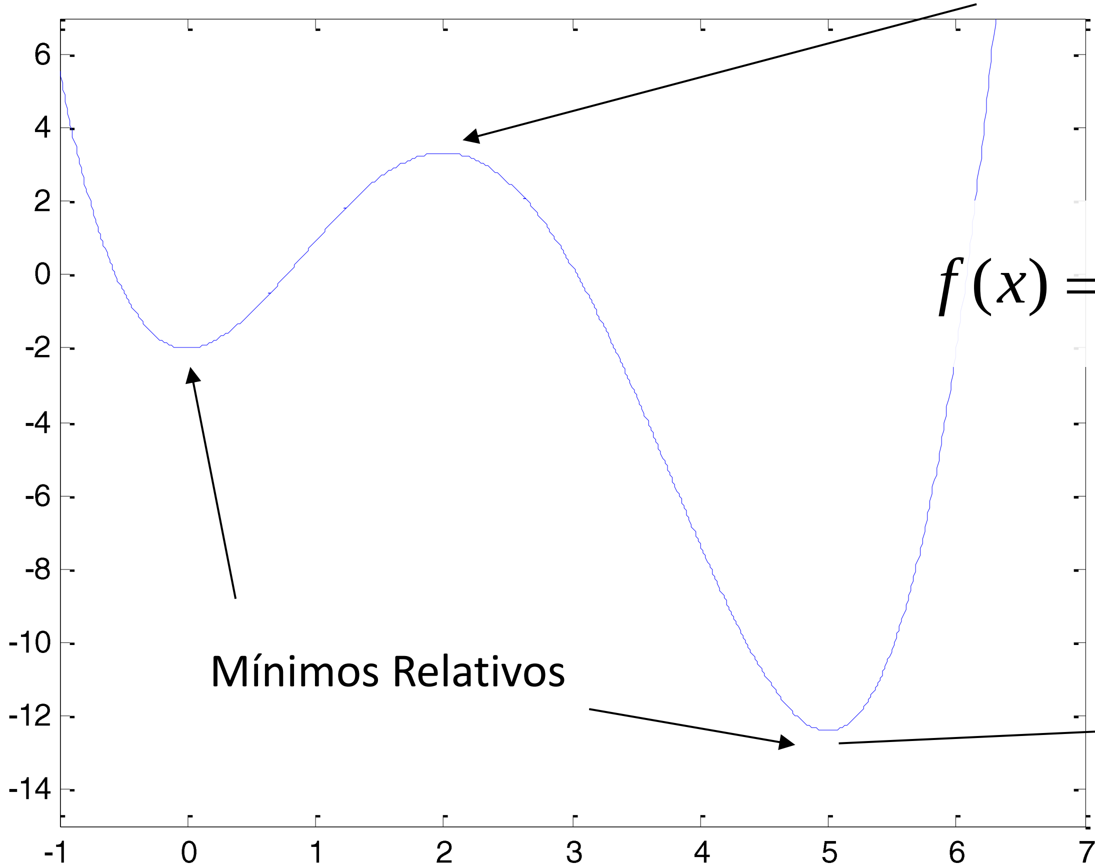
Optimización Unidimensional

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
Auxiliares: Ing. Juan Pablo Camponovo
Sr. Alejandro Jesus Ladreyt
Ing. Juan Ignacio Manassaldi

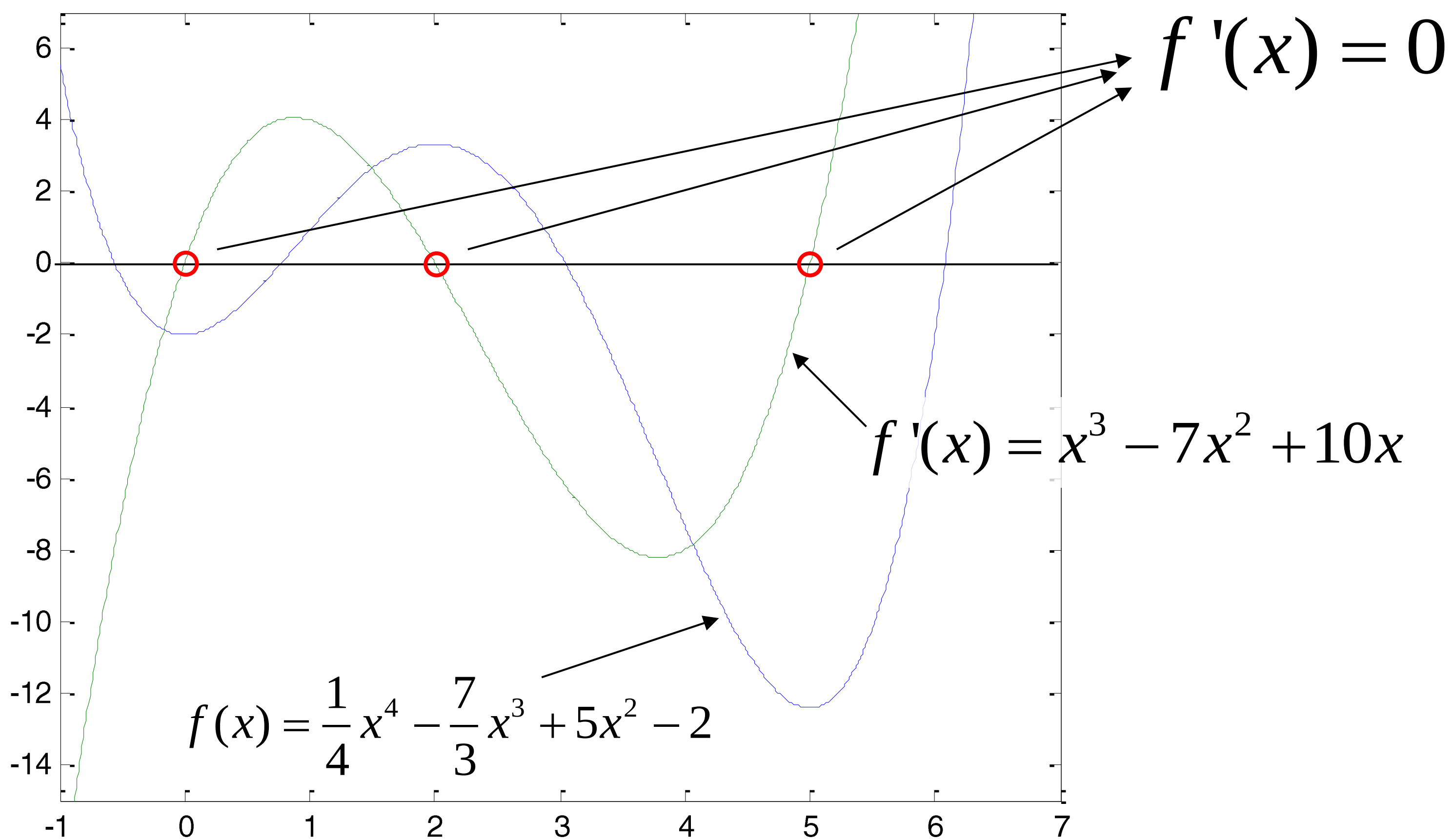
Optimización Unidimensional

Encontrar el valor mínimo o máximo de una función en una variable



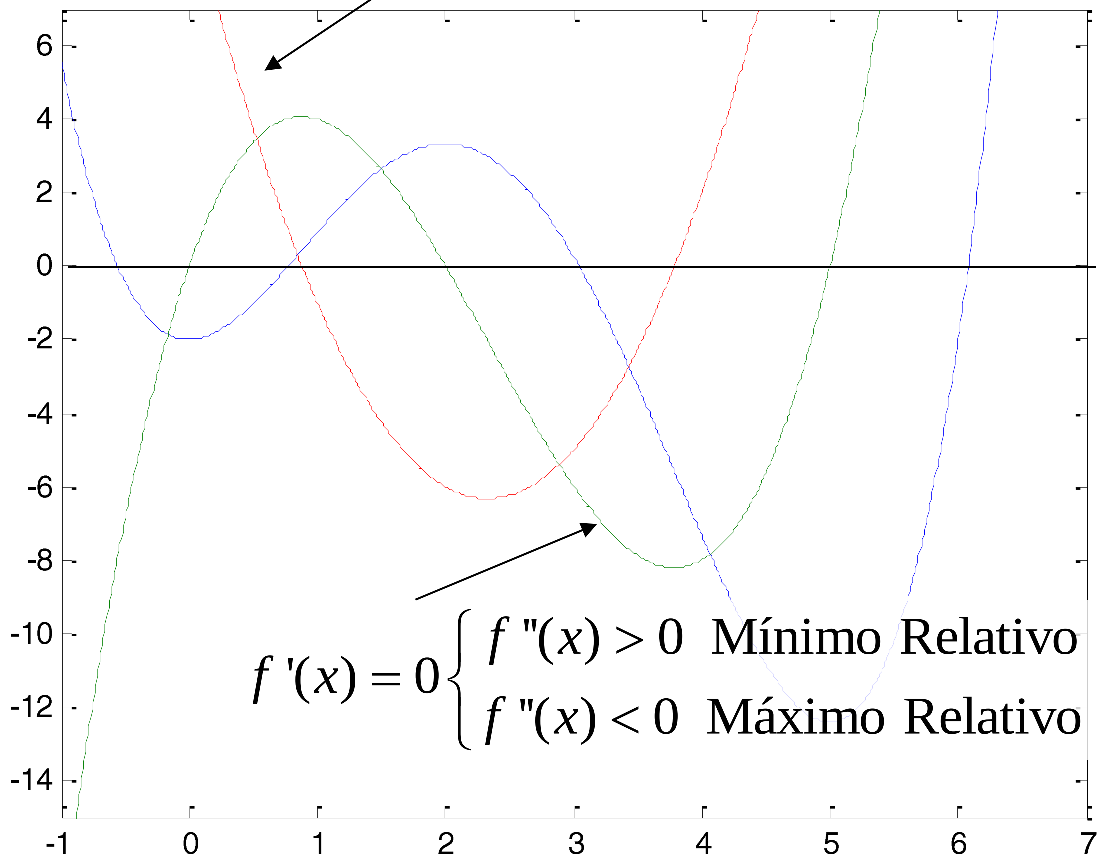
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$

Condición necesaria de mínimo o máximo: $f'(x) = 0$



Optimización Unidimensional

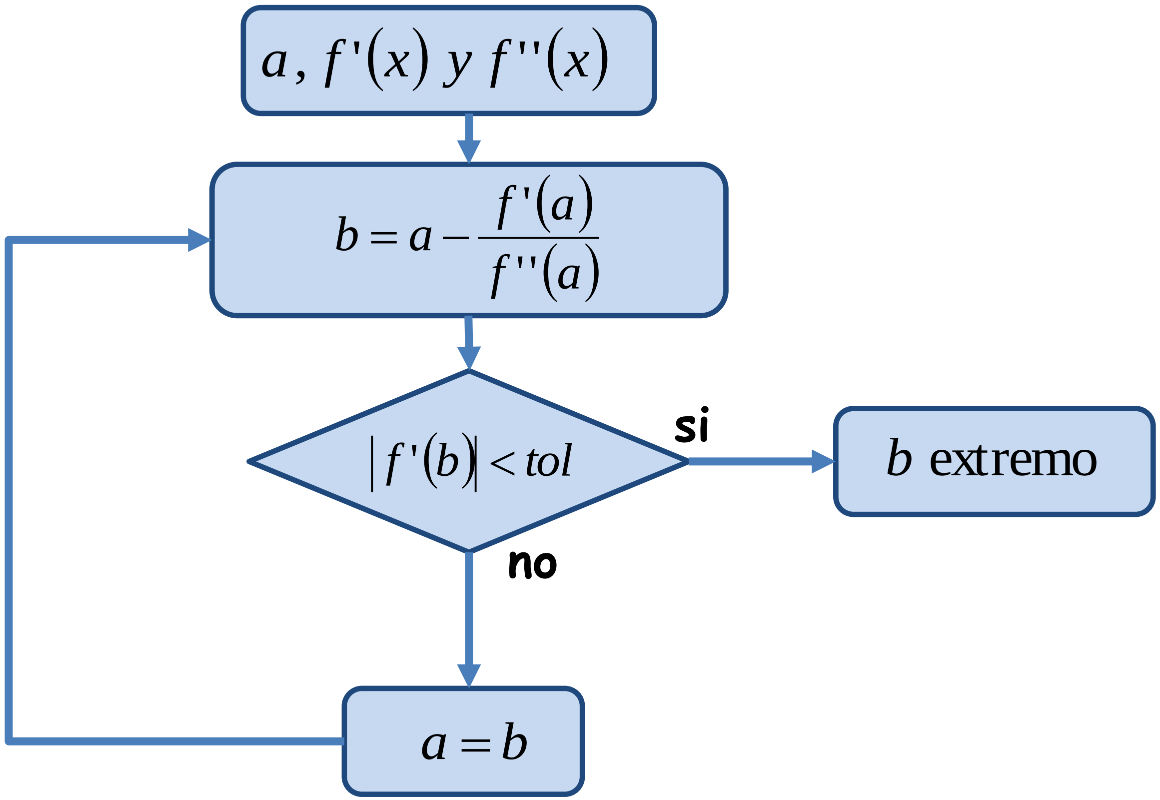
$$f''(x) = 3x^2 - 14x + 10$$



$$f'(x) = 0 \begin{cases} f''(x) > 0 \ \text{Mínimo Relativo} \\ f''(x) < 0 \ \text{Máximo Relativo} \end{cases}$$

Método de newton

Se basa en encontrar la raíz de $f\,'(x) = 0$ aplicando el método de Newton-Rhapson.



Método de interpolación parabólica sucesivas

Este método encuentra la parábola que pasa por tres puntos de la función y encuentra el extremo de la misma. Luego se eligen tres nuevos puntos y se repite el procedimiento hasta satisfacer la tolerancia.

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

¿Cómo encontrar la parábola?

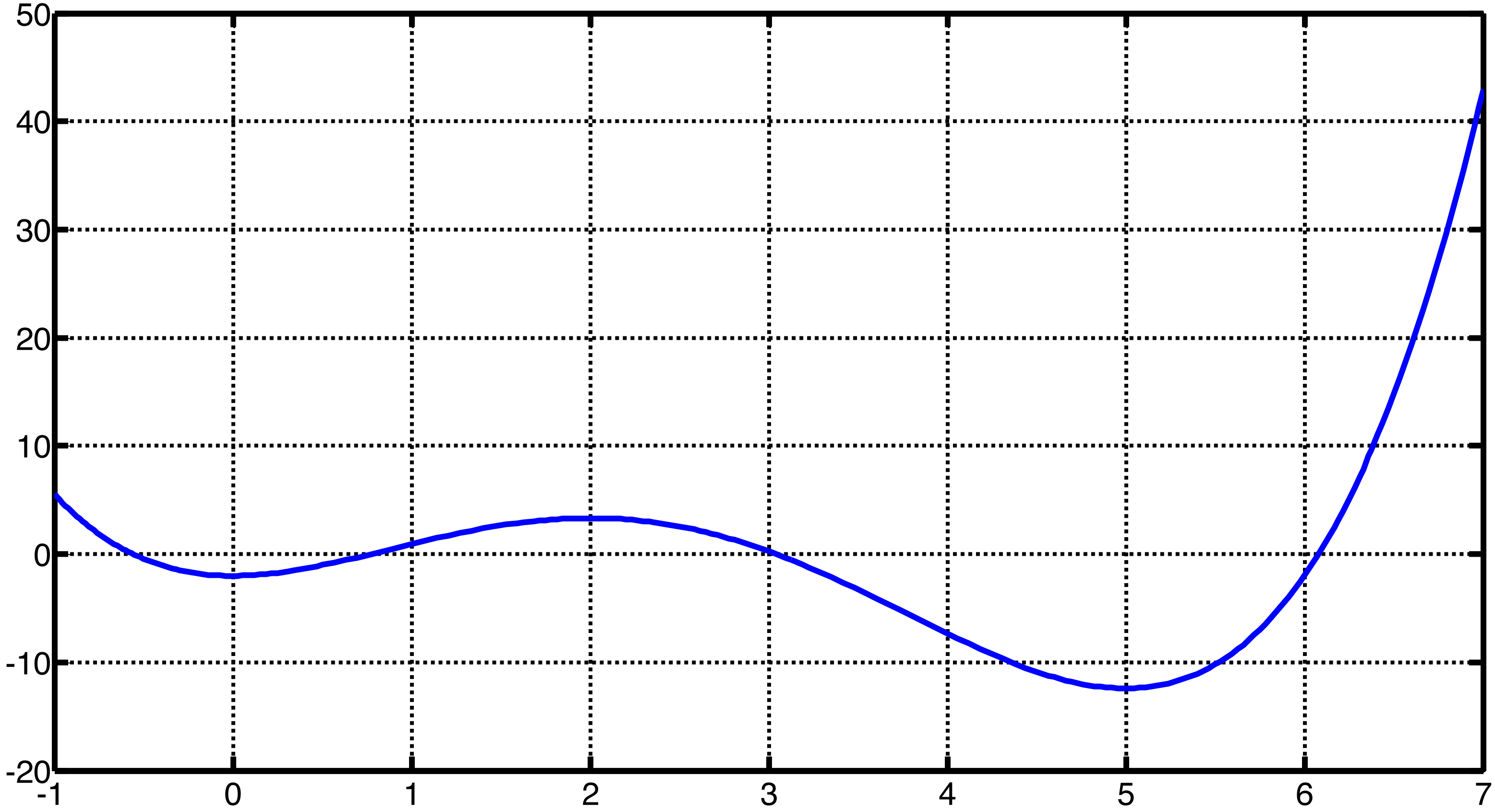
¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

¿Cómo elijo los nuevos puntos?

¿Cuál es el criterio de tolerancia?

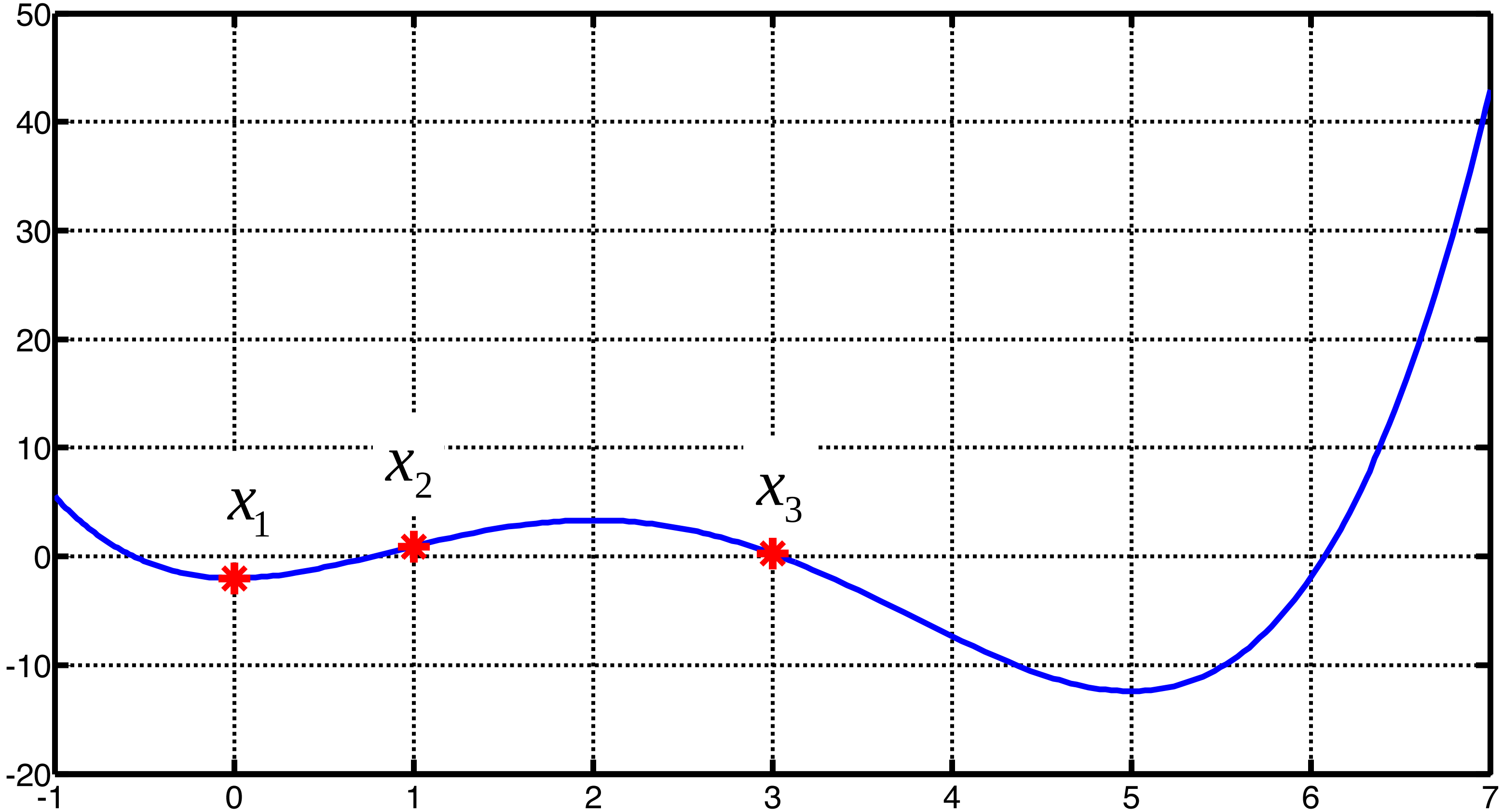
Ejemplo:

$$max \;\; f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$



¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

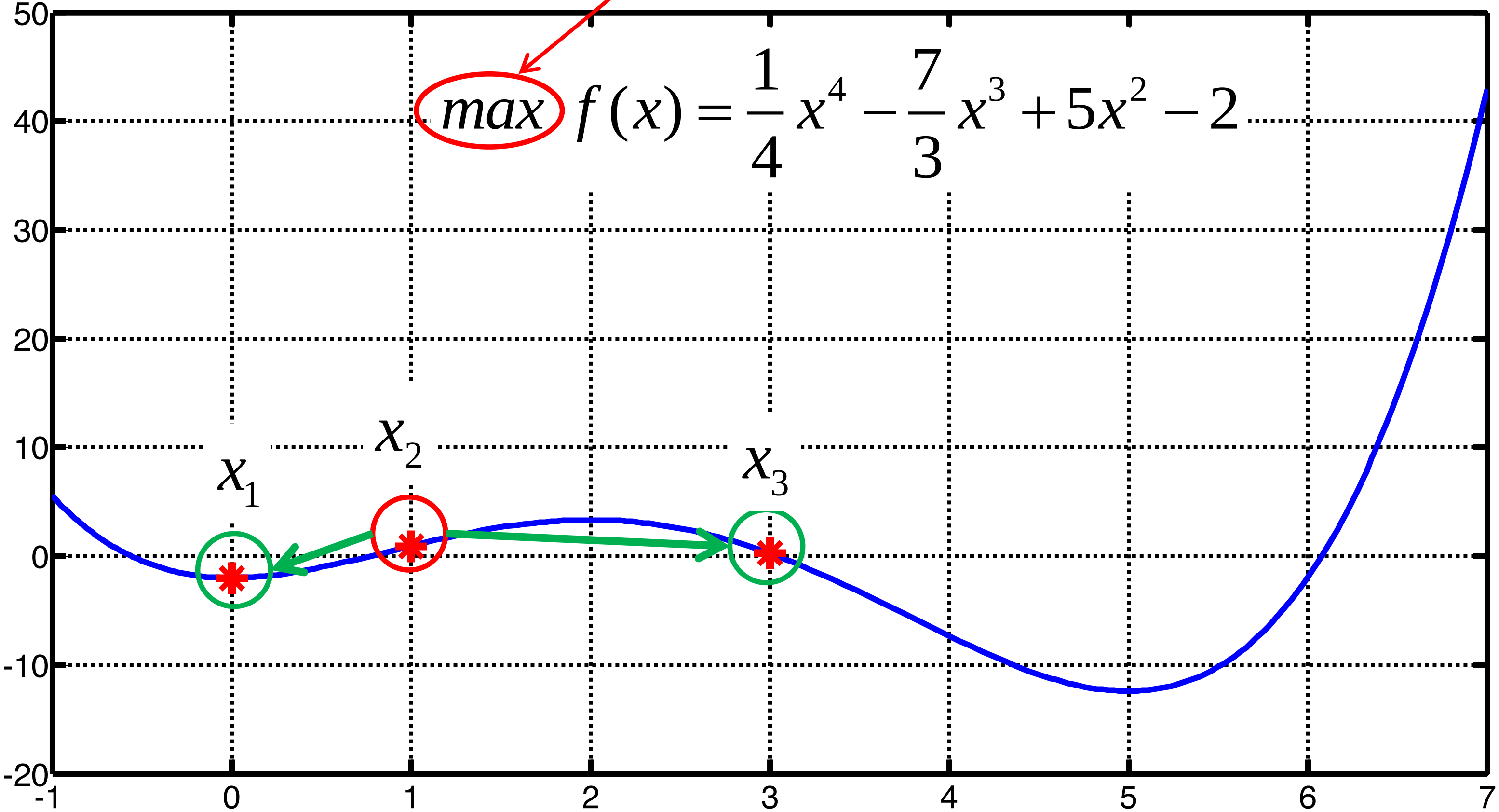
$$\max f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$



Método de interpolación parabólica sucesivas (1)

$$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$$
$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 0.9167$$
$$x_3 = 3 \quad f(x_3) = 0.25$$

El valor de la función en el punto intermedio mayor que el de los extremos



¿Cómo encontrar la parábola?

La parábola debe pasar por los siguientes puntos:

$$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2 \quad \Rightarrow \quad (0; -2)$$

$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 0.9167 \quad \Rightarrow \quad (1; 0.9167)$$

$$x_3 = 3 \quad f(x_3) = 0.25 \quad \Rightarrow \quad (3; 0.25)$$

$y = ax^2 + bx + c$ ⇒ Los tres puntos deben cumplir esta ecuación

$$a0^2 + b0 + c = -2$$

$$a1^2 + b1 + c = 0.9167$$

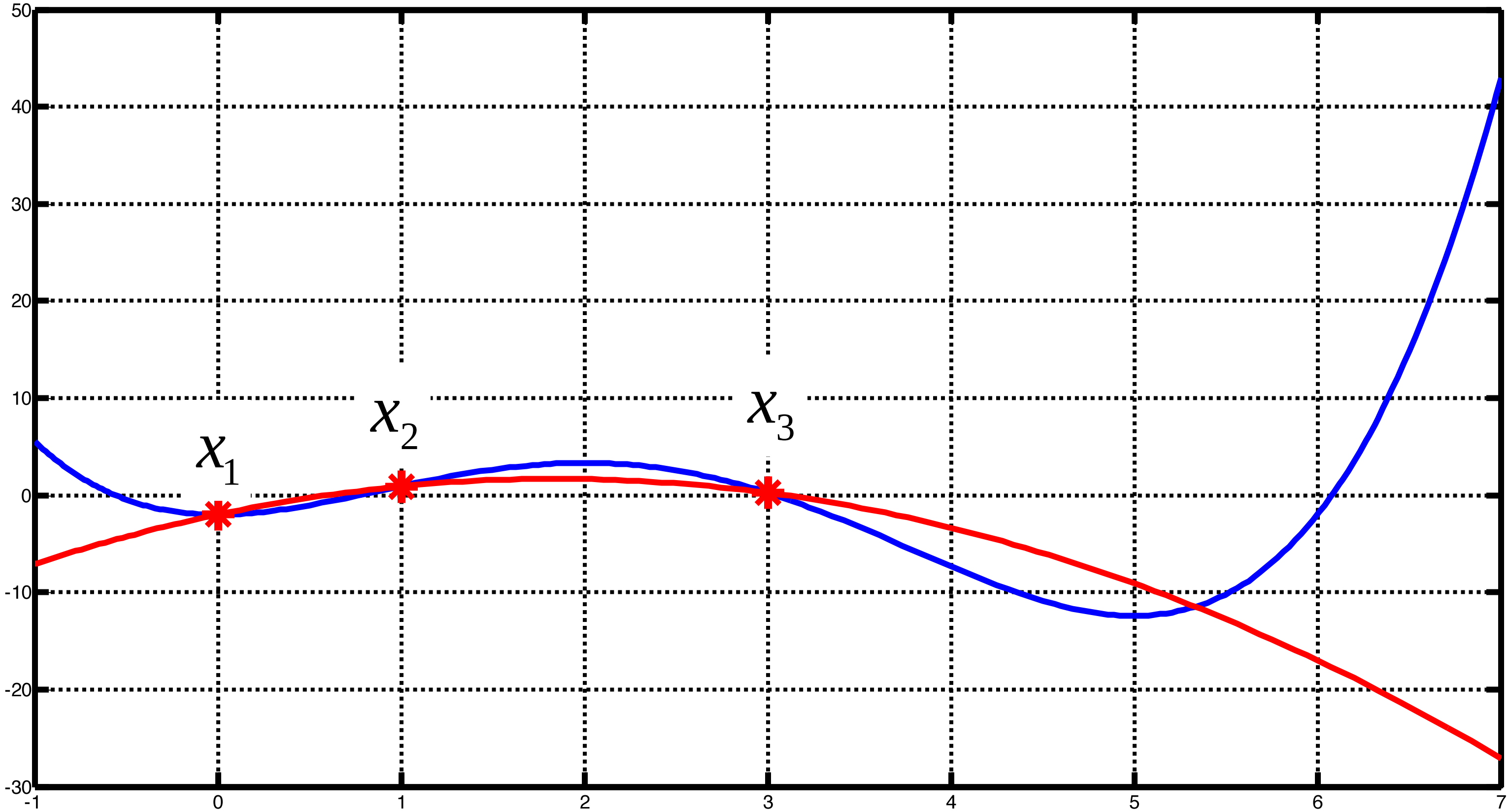
$$a3^2 + b3 + c = 0.25$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.9167 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ Sistema 3x3

$$\begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.9167 \\ 0.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Resolvemos}} \begin{aligned} a &= -1.0833 \\ b &= 4 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

$$y = -1.0833x^2 + 4x - 2$$

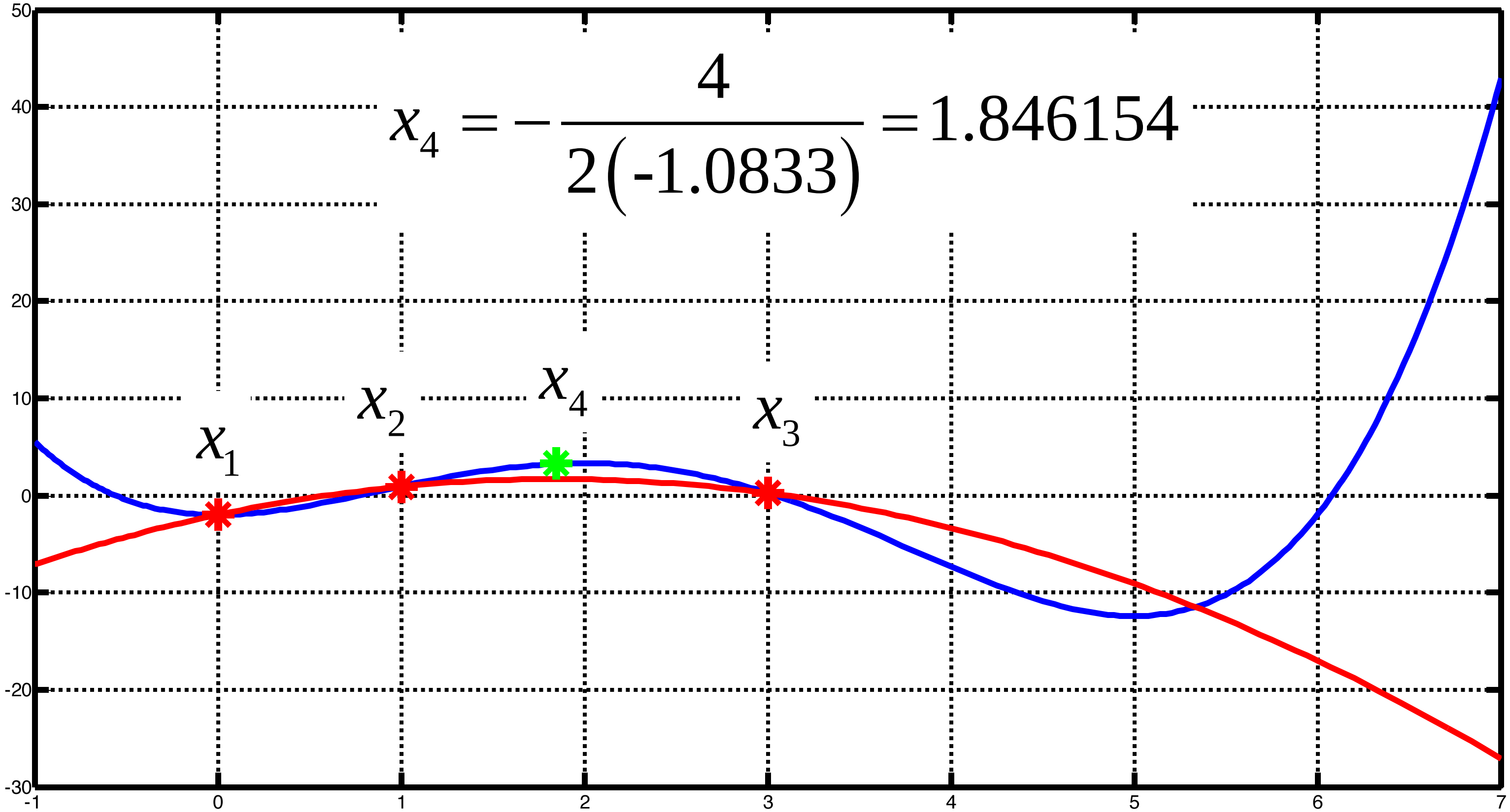


¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y' = 0$$

El nuevo punto corresponde al extremo de la parábola:

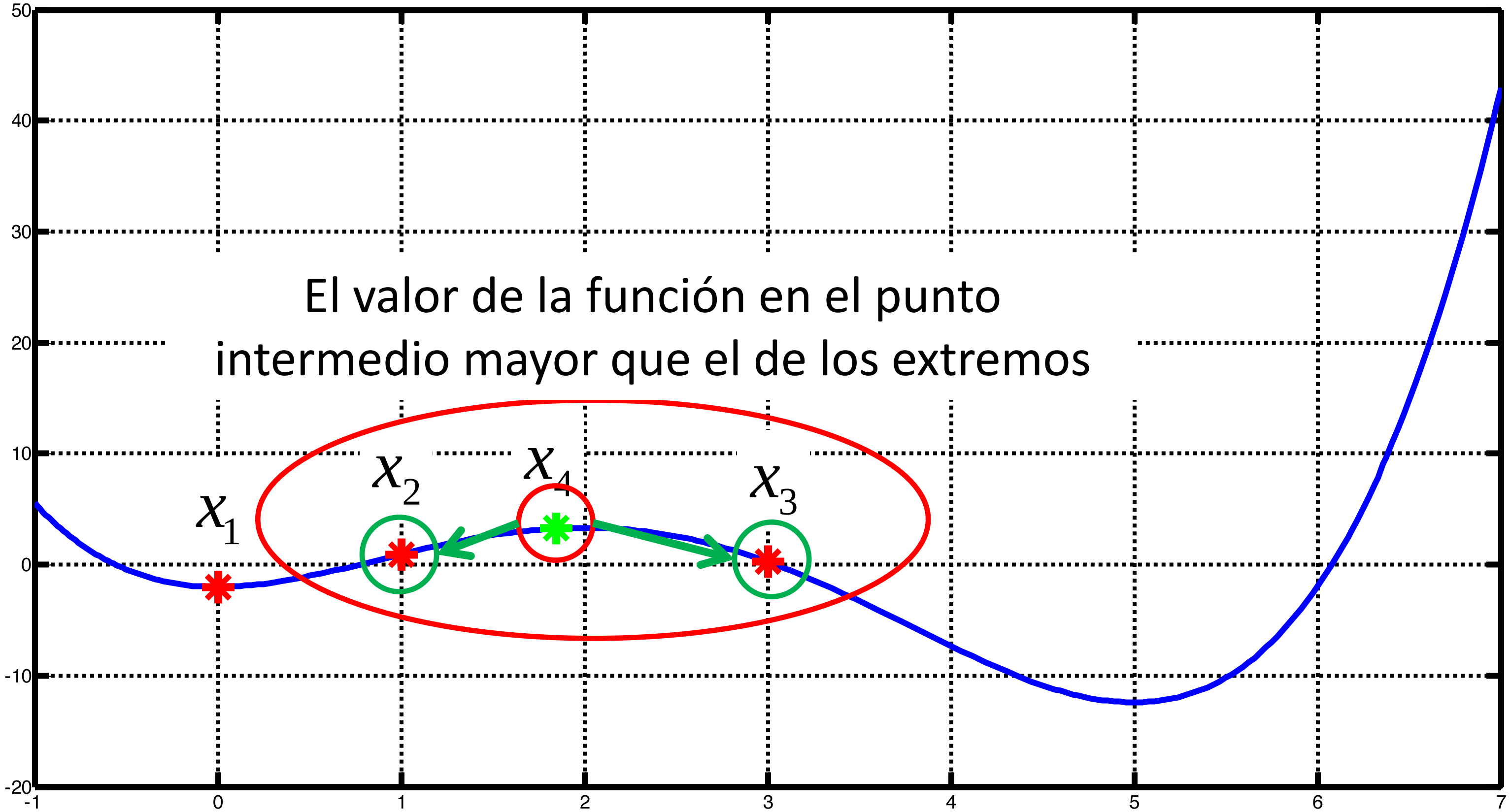
$$x_4 = -\frac{4}{2(-1.0833)} = 1.846154$$



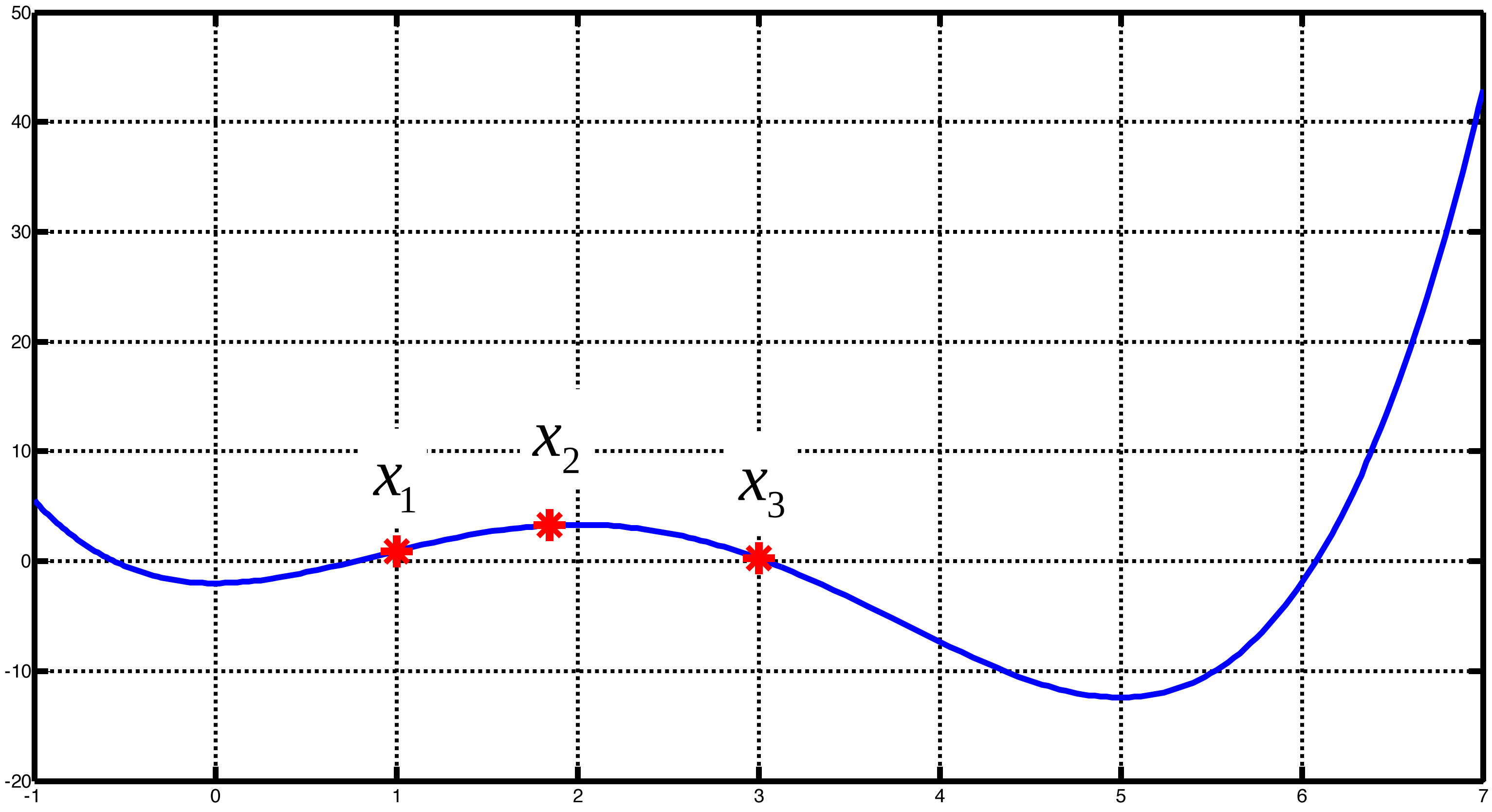
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

Debemos quedarnos con el nuevo punto y dos de los anteriores.

¿Cuáles son los nuevo tres puntos?



Nuevo intervalo:

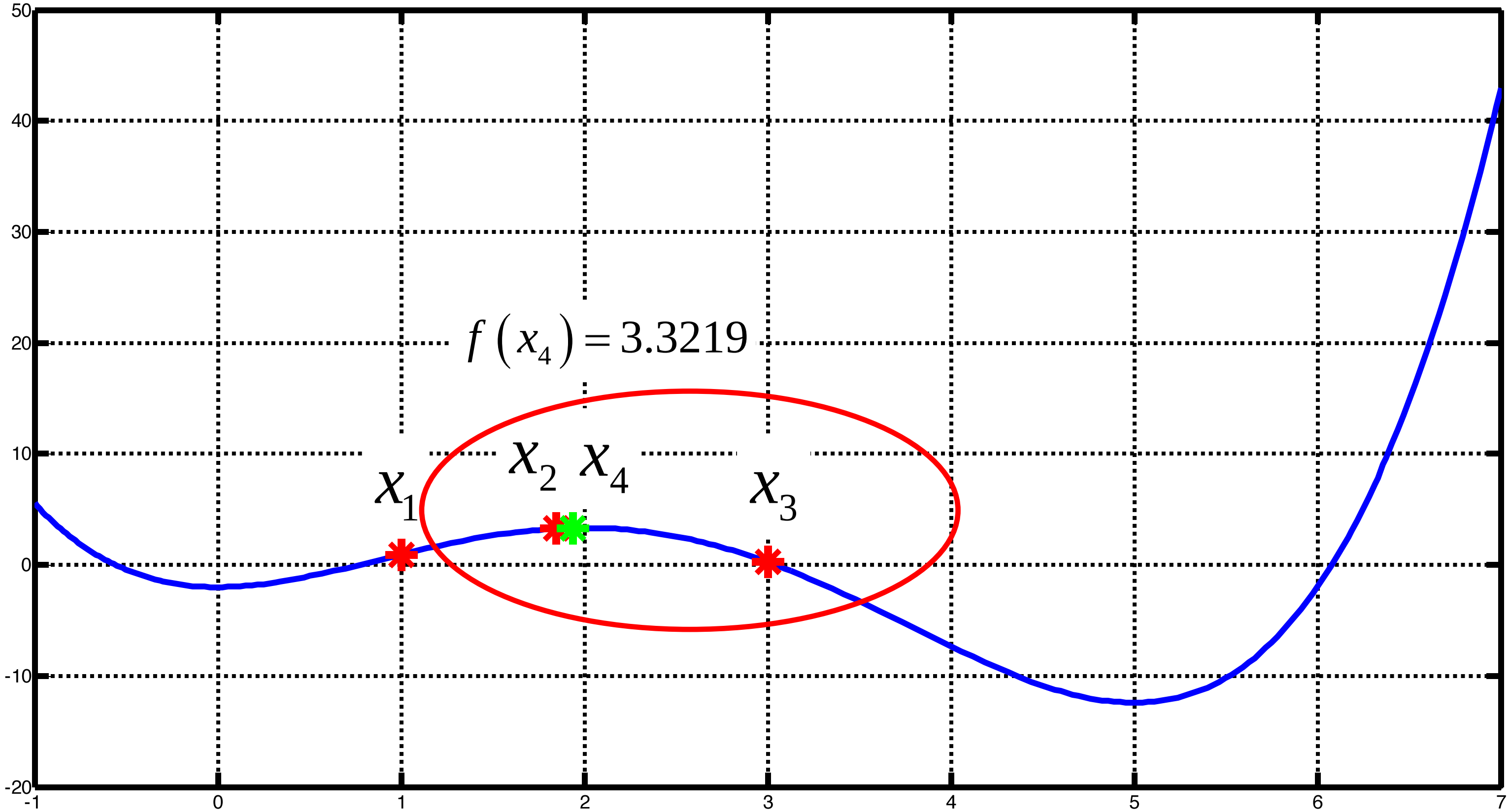


Método de interpolación parabólica sucesivas (1)

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 1.8461^2 & 1.8461 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9167 \\ 3.2636 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$a = \text{-}2.6928$$
$$b = 10.4378$$
$$c = \text{-}6.8284$$

$$x_4 = -\frac{10.4378}{2(\text{-}2.6928)} = 1.9381$$

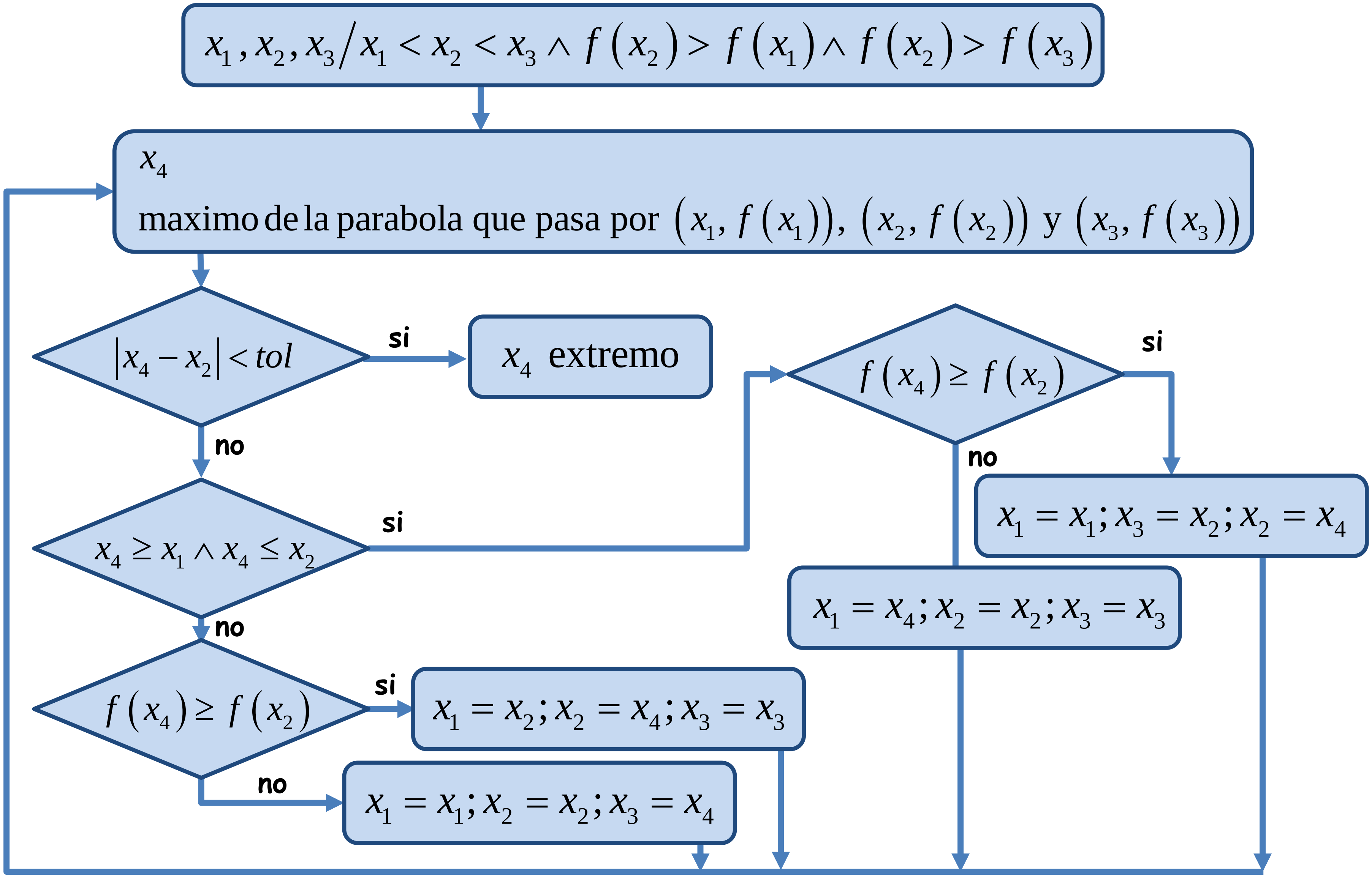


¿Cuál es el criterio de tolerancia?

El nuevo punto encontrado va convergiendo al valor optimo

x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
0	-2	1	0.91666667	3	0.25	1.84615385	3.26368124

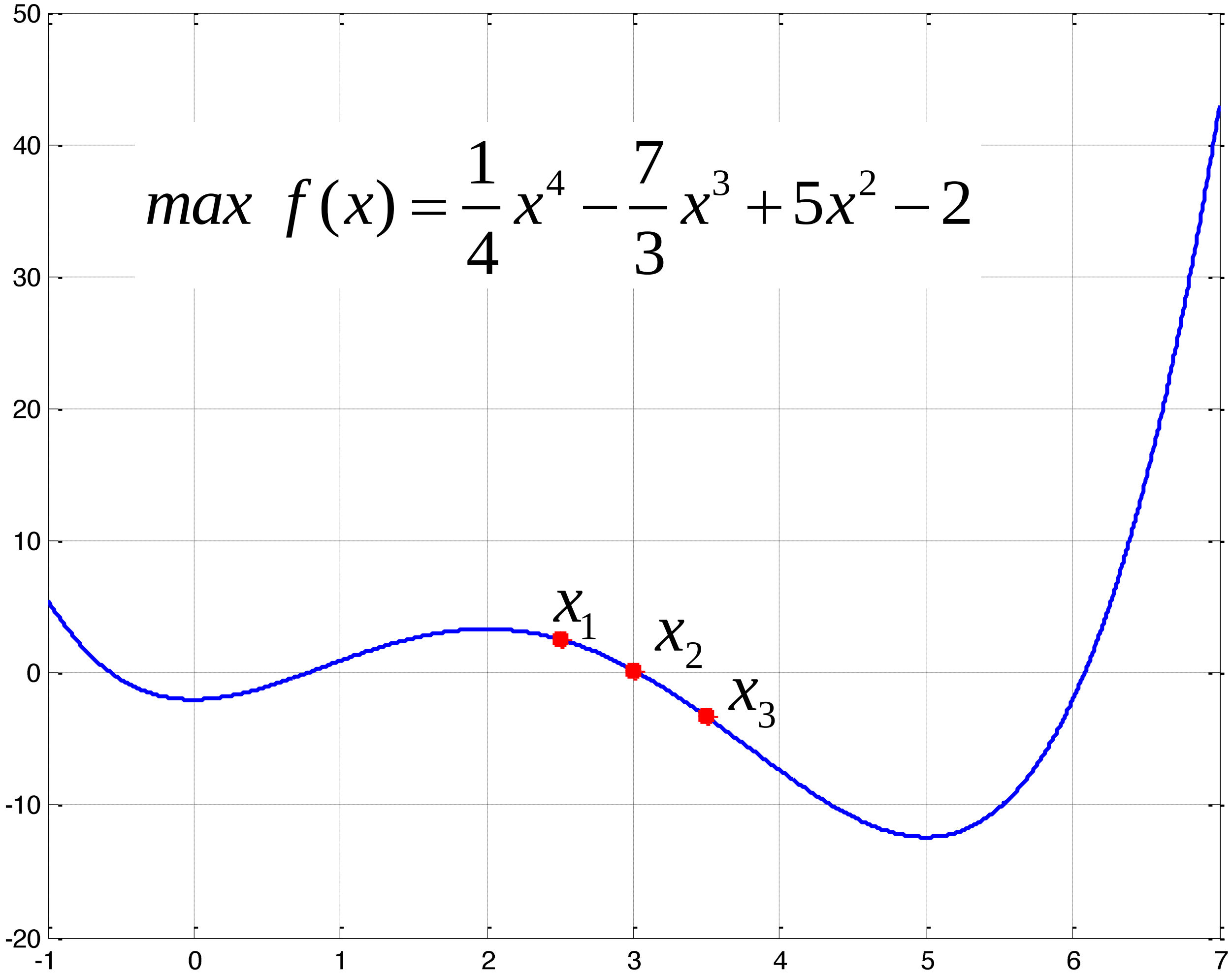
Método de interpolación parabólica sucesivas (1) (maximizar)



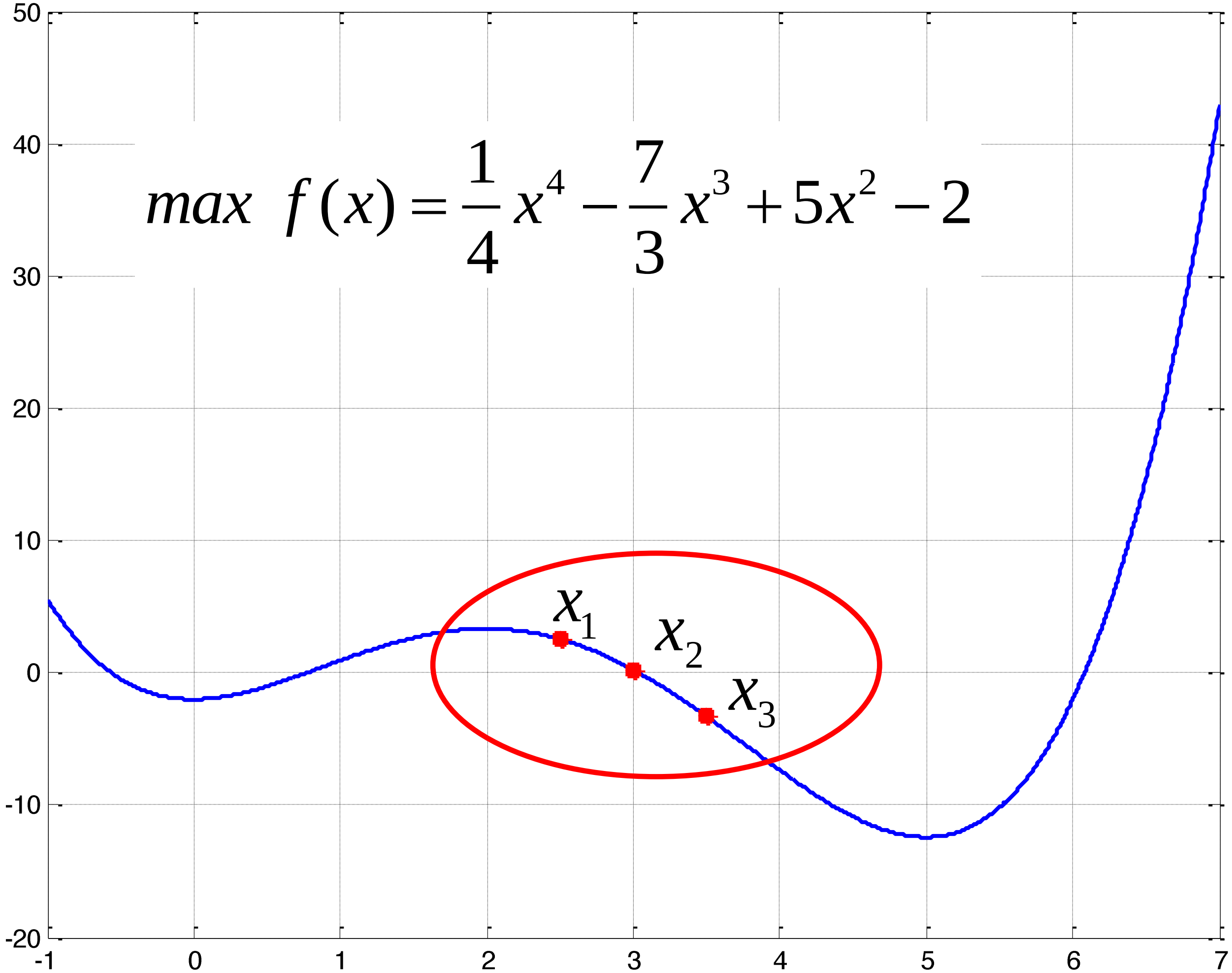
Método de interpolación parabólica sucesivas (2)

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

$$max\ \ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$

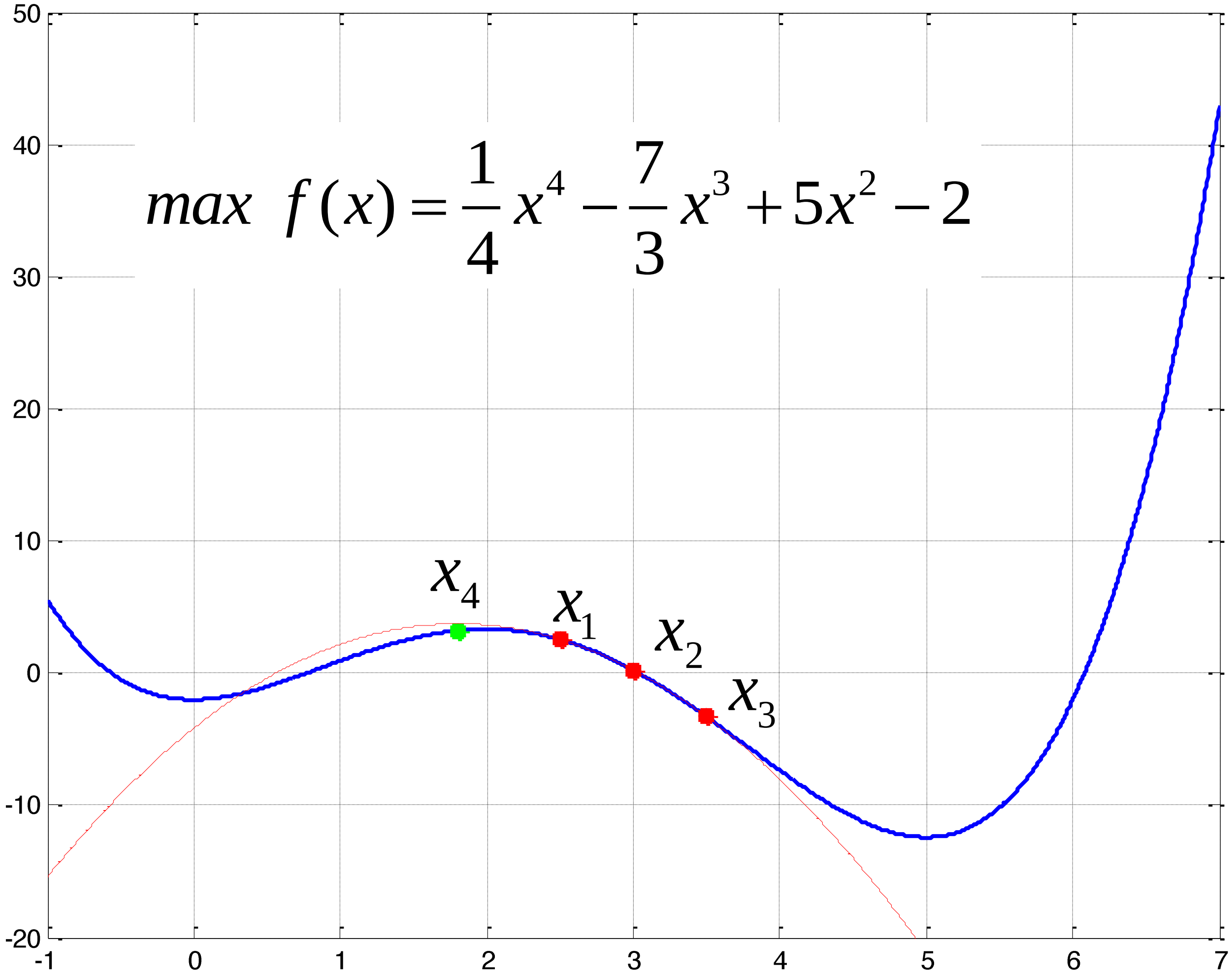


Solo necesitamos tres puntos del dominio



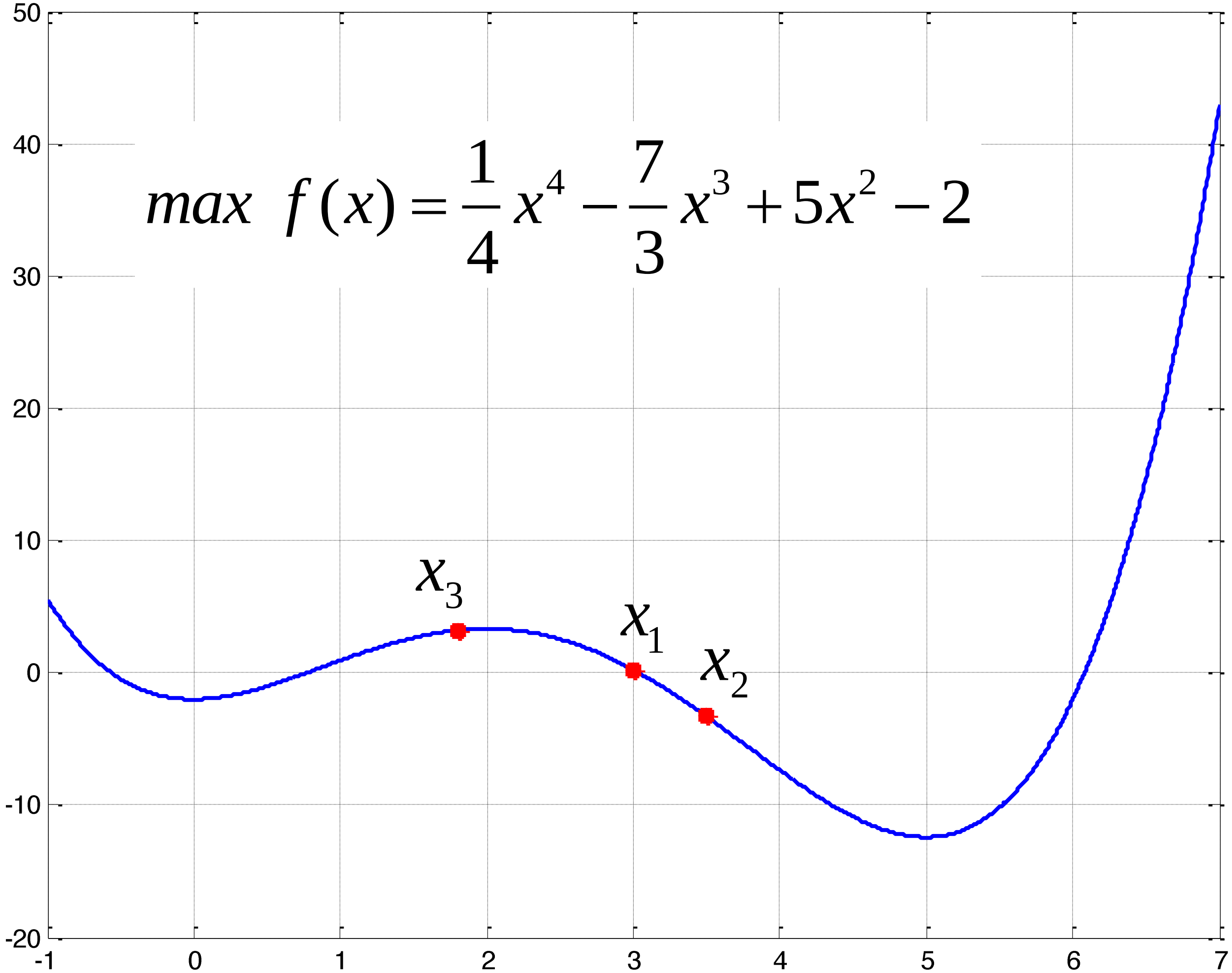
Método de interpolación parabólica sucesivas (2)

Encontramos la parábola que pasa por los tres puntos. El nuevo punto corresponde al ***extremo*** de la misma.



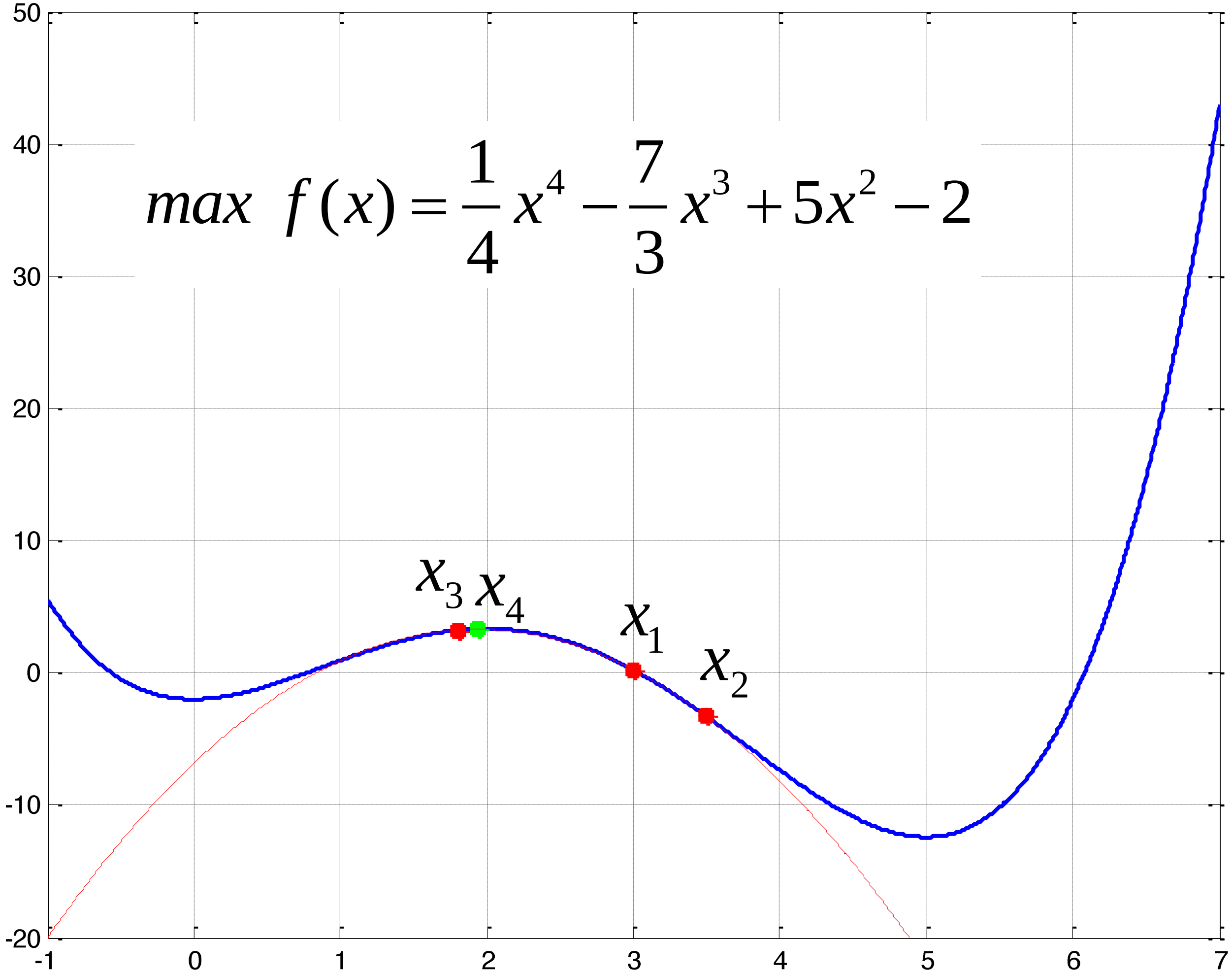
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

Nos quedamos con los tres últimos

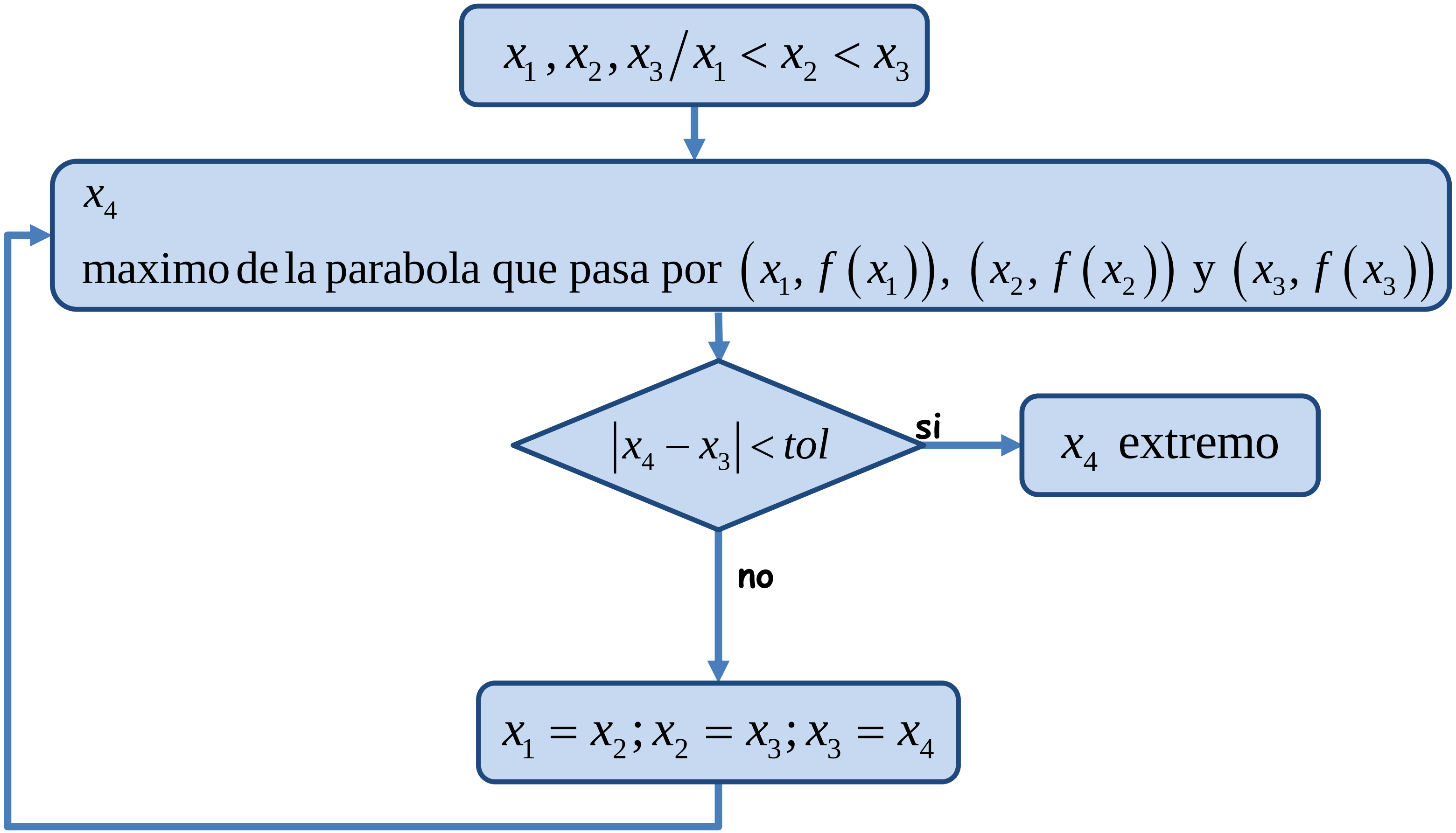


$$max \;\; f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$

Continuamos… hasta satisfacer la tolerancia



Método de interpolación parabólica sucesivas (1) (maximizar)



¿Cuál es la diferencia?

En funciones de un solo máximo (o mínimo) ambos llegan al mismo resultado.

Para funciones con varios extremos:

- La metodología (1) converge a un máximo o mínimo según lo que estemos buscando. Podemos decidir que buscar.
- La metodología (2) puede llevarnos a un extremo que no corresponde al que estamos buscando.

Tip: Existe una formula directa para el calculo del nuevo punto

$$x_4 = \frac{f(x_1)\left(x_2^{\,2} - x_3^{\,2}\right) + f(x_2)\left(x_3^{\,2} - x_1^{\,2}\right) + f(x_3)\left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right)}{2f(x_1)\left(x_2 - x_3\right) + 2f(x_2)\left(x_3 - x_1\right) + 2f(x_3)\left(x_1 - x_2\right)}$$

Método de interpolación parabólica sucesivas

Ejemplo: $max \quad 2sen(x) - \frac{x^2}{10}$

x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
0		1		4			

$$x_4 = \frac{f(x_1)\left(x_2^{\,2} - x_3^{\,2}\right) + f(x_2)\left(x_3^{\,2} - x_1^{\,2}\right) + f(x_3)\left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right)}{2f(x_1)(x_2 - x_3) + 2f(x_2)(x_3 - x_1) + 2f(x_3)(x_1 - x_2)}$$

Método de la relación dorada

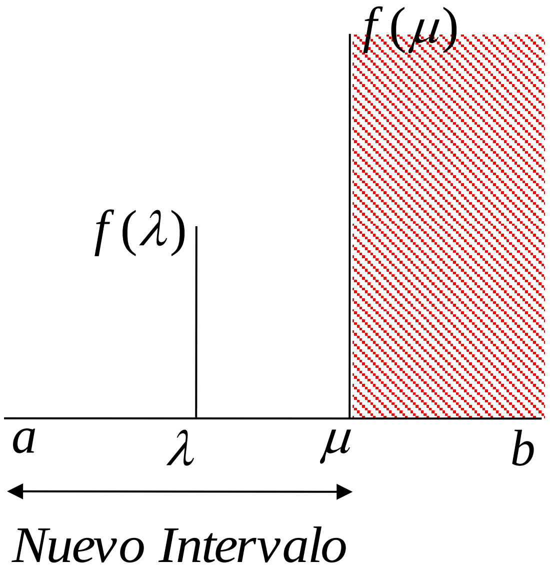
(Minimización)

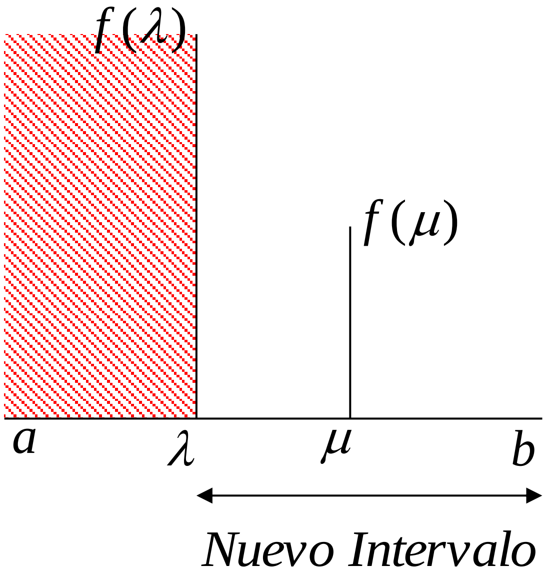
Sea $\lambda, \mu \in [a, b]$ tal que $\lambda < \mu$

$\therefore$

Si $f(\lambda) < f(\mu)$, luego $f(x) \geq f(\lambda) \quad \forall x \in (\mu, b]$

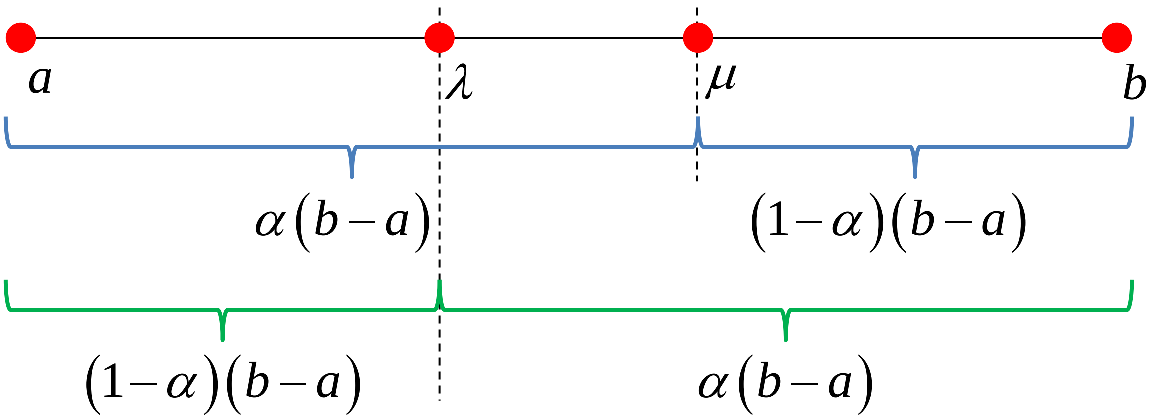
Si $f(\lambda) \geq f(\mu)$, luego $f(x) \geq f(\mu) \quad \forall x \in [a, \lambda)$





Método de la relación dorada

Expresamos a λ y μ como una fracción α del intervalo [a,b]:



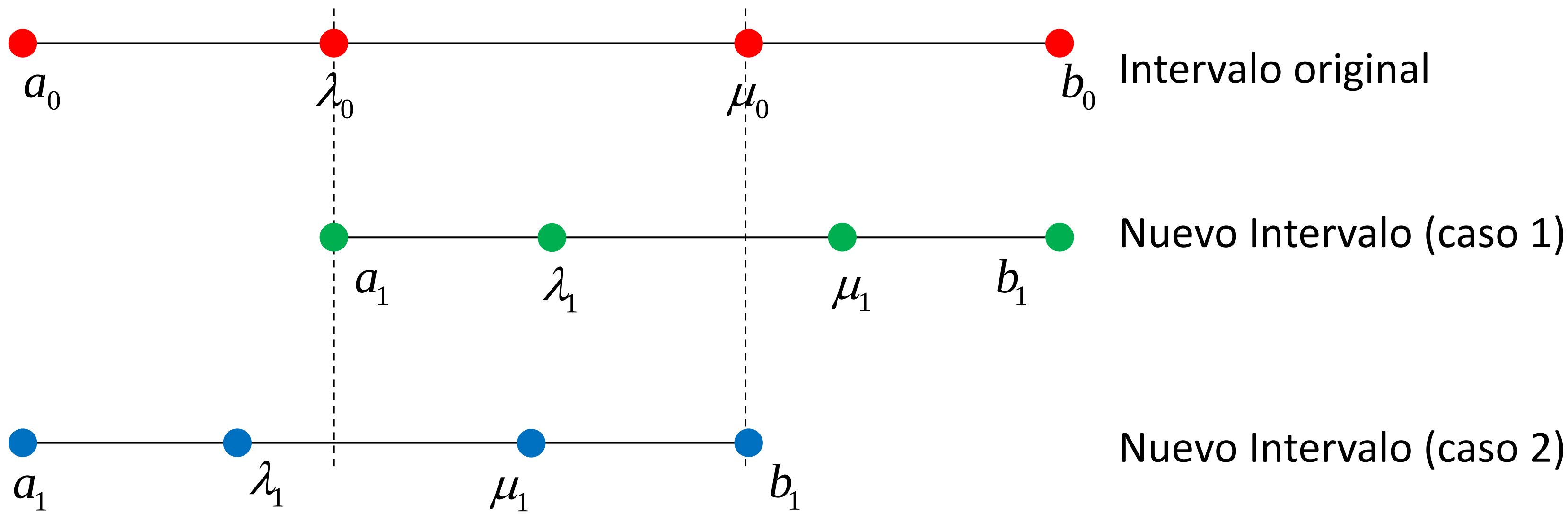
Analizando la grafica anterior encontramos las siguientes expresiones de λ y μ :

$$\lambda = b - \alpha(b-a)$$

$$\mu = a + \alpha(b-a)$$

$$¿\alpha?$$

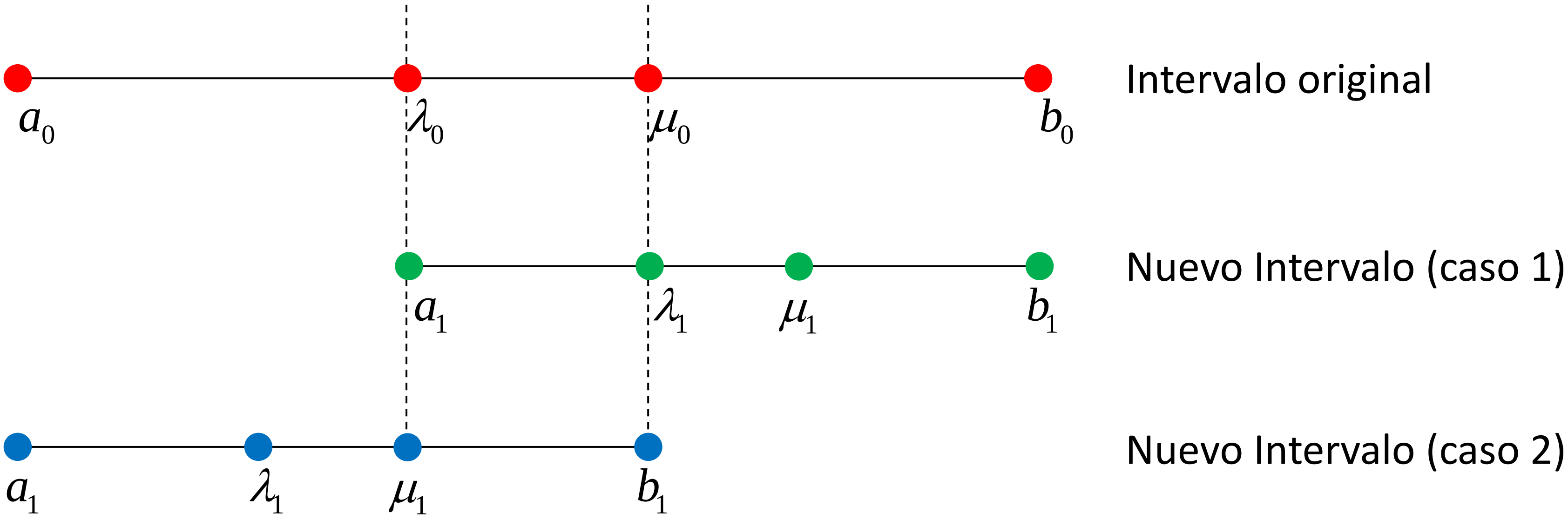
Valor aleatorio: $\alpha=0.7$:



En cada iteración debemos calcular λ y μ

Método de la relación dorada

Buscamos α de manera que se cumpla lo siguiente:



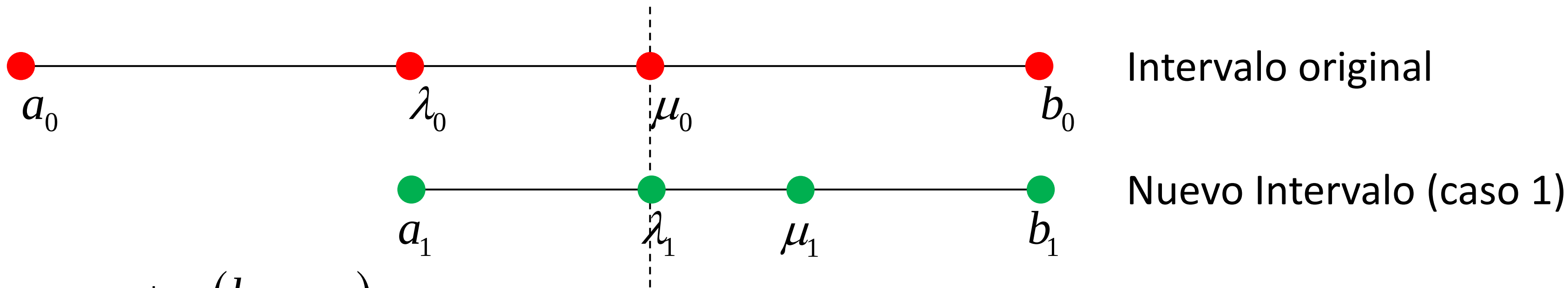
Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$

Caso 2: $\mu_1 = \lambda_0$

En cada iteración solo debemos calcular λ o μ

Método de la relación dorada

Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$



$$\mu_0 = a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right)$$
$$\lambda_1 = b_1 - \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_1 - \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$

De la grafica:

$$b_1 = b_0$$
$$a_1 = \lambda_0 = b_0 - \alpha\left(b_0 - a_0\right)$$

Reemplazando:

$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha\left(b_0 - \left(b_0 - \alpha\left(b_0 - a_0\right)\right)\right)$$
$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha\left(b_0 - b_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right)\right)$$
$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha^2\left(b_0 - a_0\right)$$

Método de la relación dorada

$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha^2\left(b_0 - a_0\right)$$

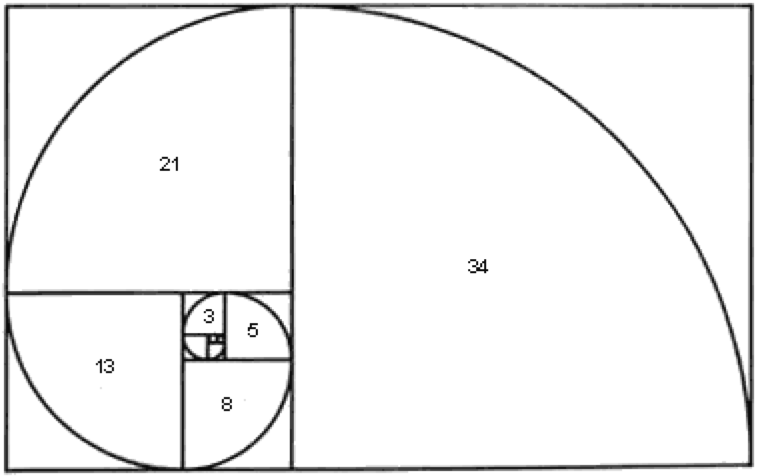
$$\alpha^2 \cancel{\left(b_0 - a_0\right)} + \alpha \cancel{\left(b_0 - a_0\right)} - \cancel{\left(b_0 - a_0\right)} = 0$$

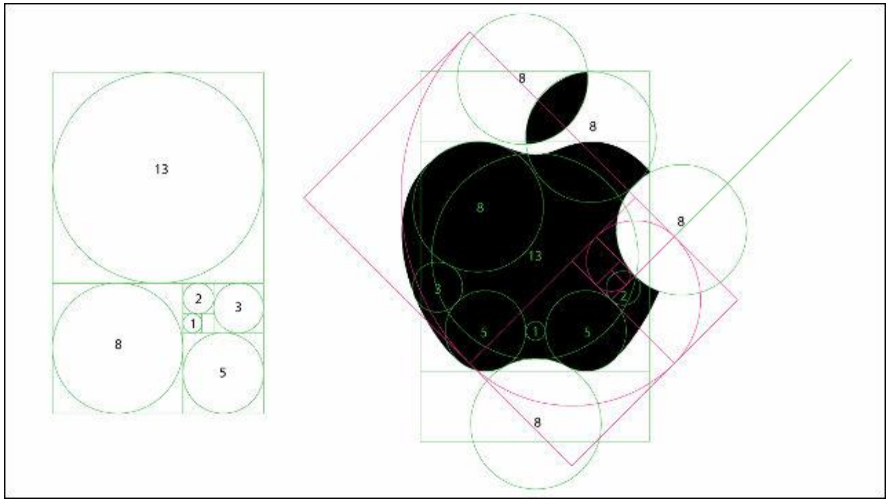
$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \begin{cases} \alpha_1 \cong 0.618 \\ \alpha_2 \cong -1.618 \end{cases}$$

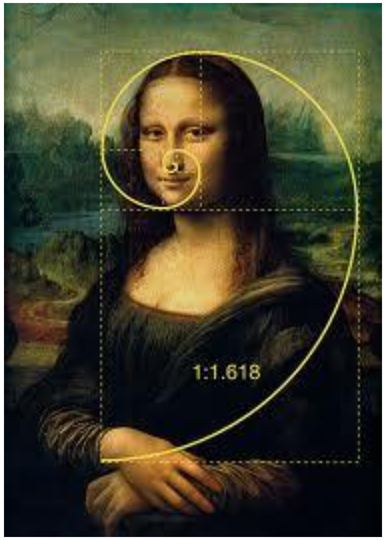
¡Encontramos el α!

Analizando el Caso 2 se llega a la misma conclusión

Golden Ratio



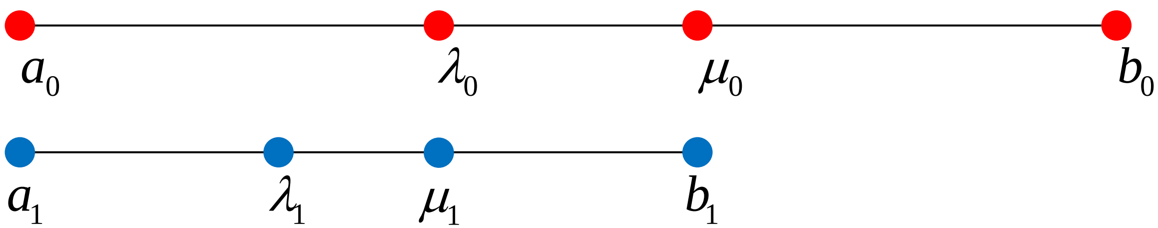




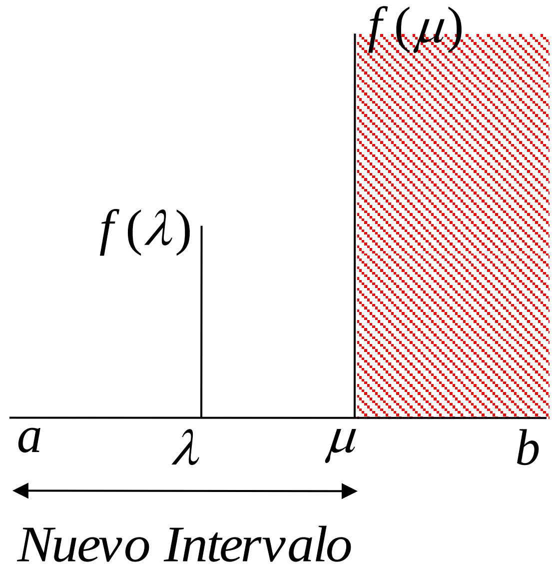
Método de la relación dorada

(Minimización)

Si $f(\lambda) < f(\mu)$



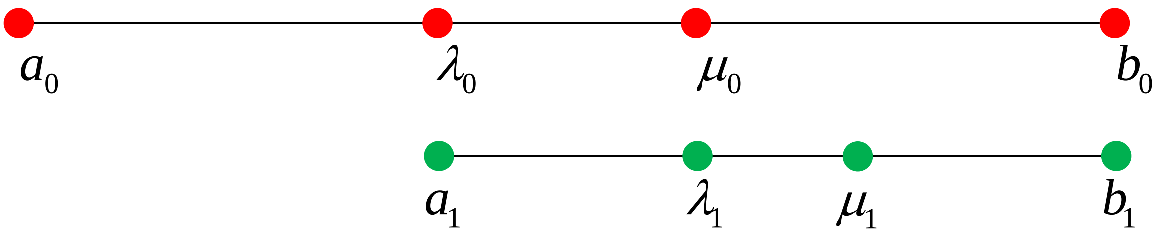
$$a_1 = a_0$$
$$b_1 = \mu_0$$
$$\mu_1 = \lambda_0$$
$$\lambda_1 = b_1 - \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$



Método de la relación dorada

(Minimización)

Si $f(\lambda) \geq f(\mu)$

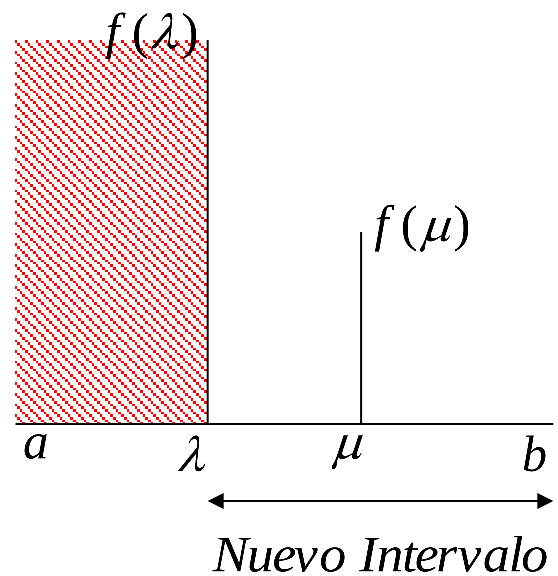


$$a_1 = \lambda_0$$

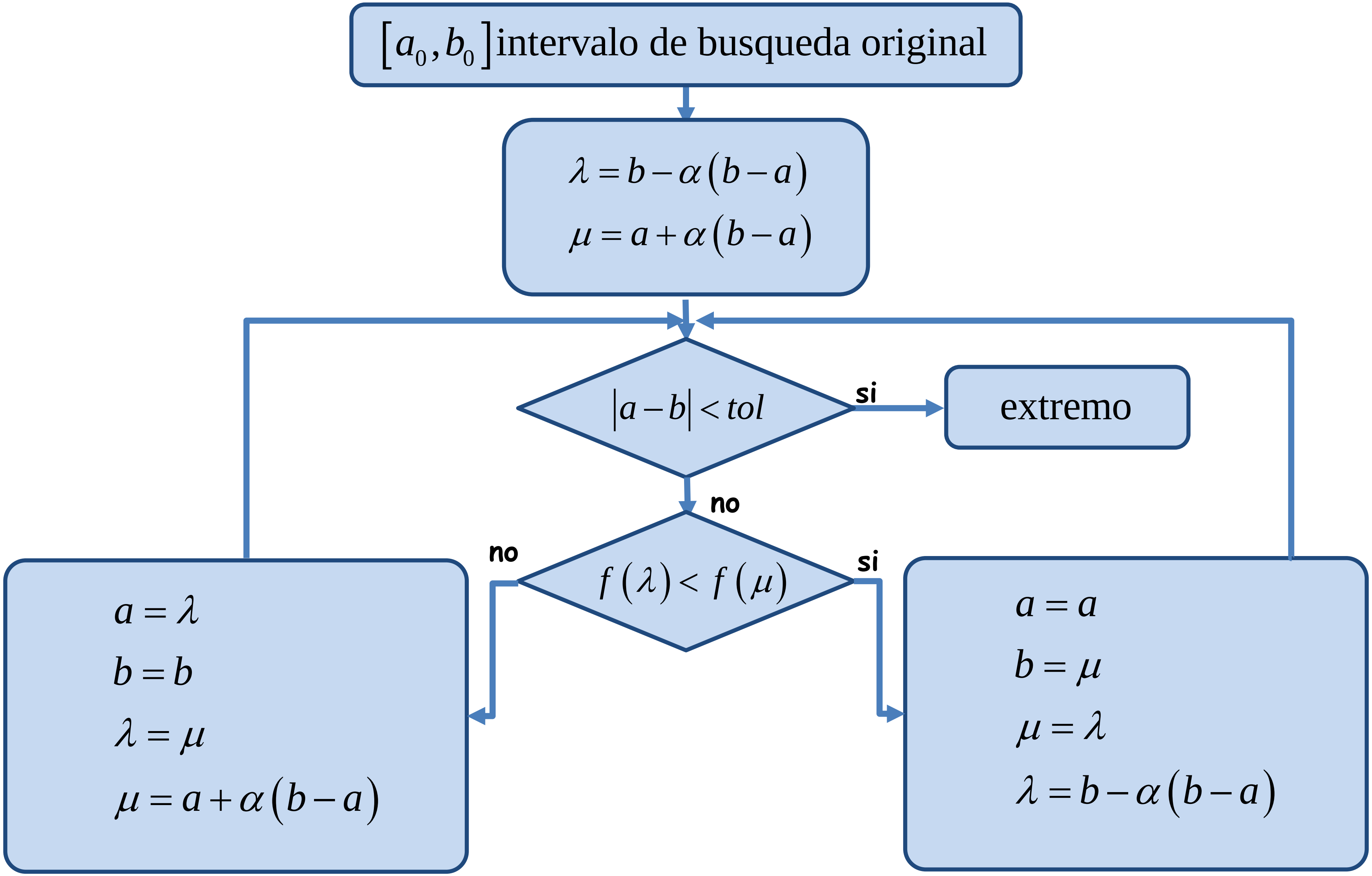
$$b_1 = b_0$$

$$\lambda_1 = \mu_0$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$



Método de la relación dorada (minimizar)



Plantear Caso de Maximización