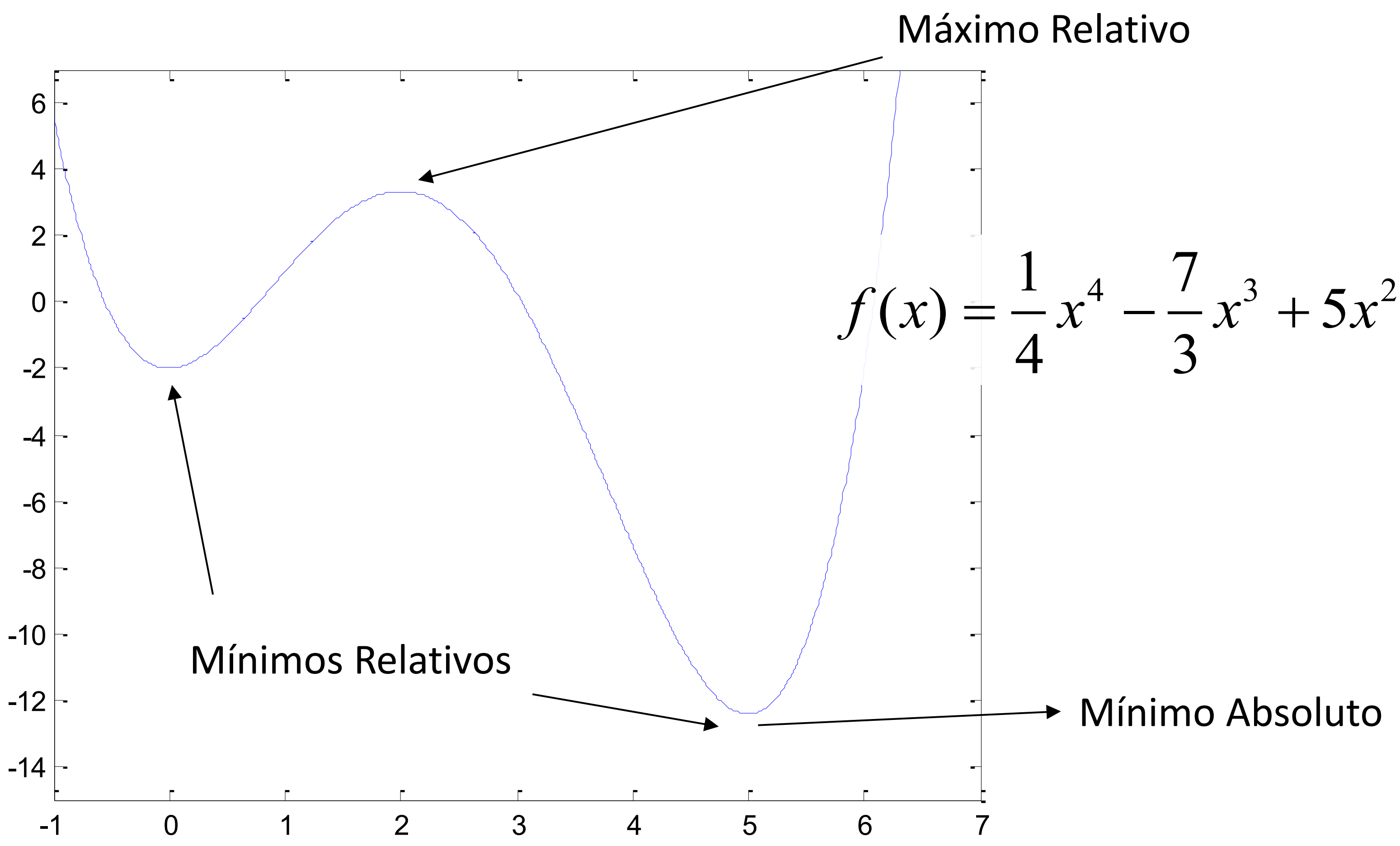
Optimización Unidimensional
2025

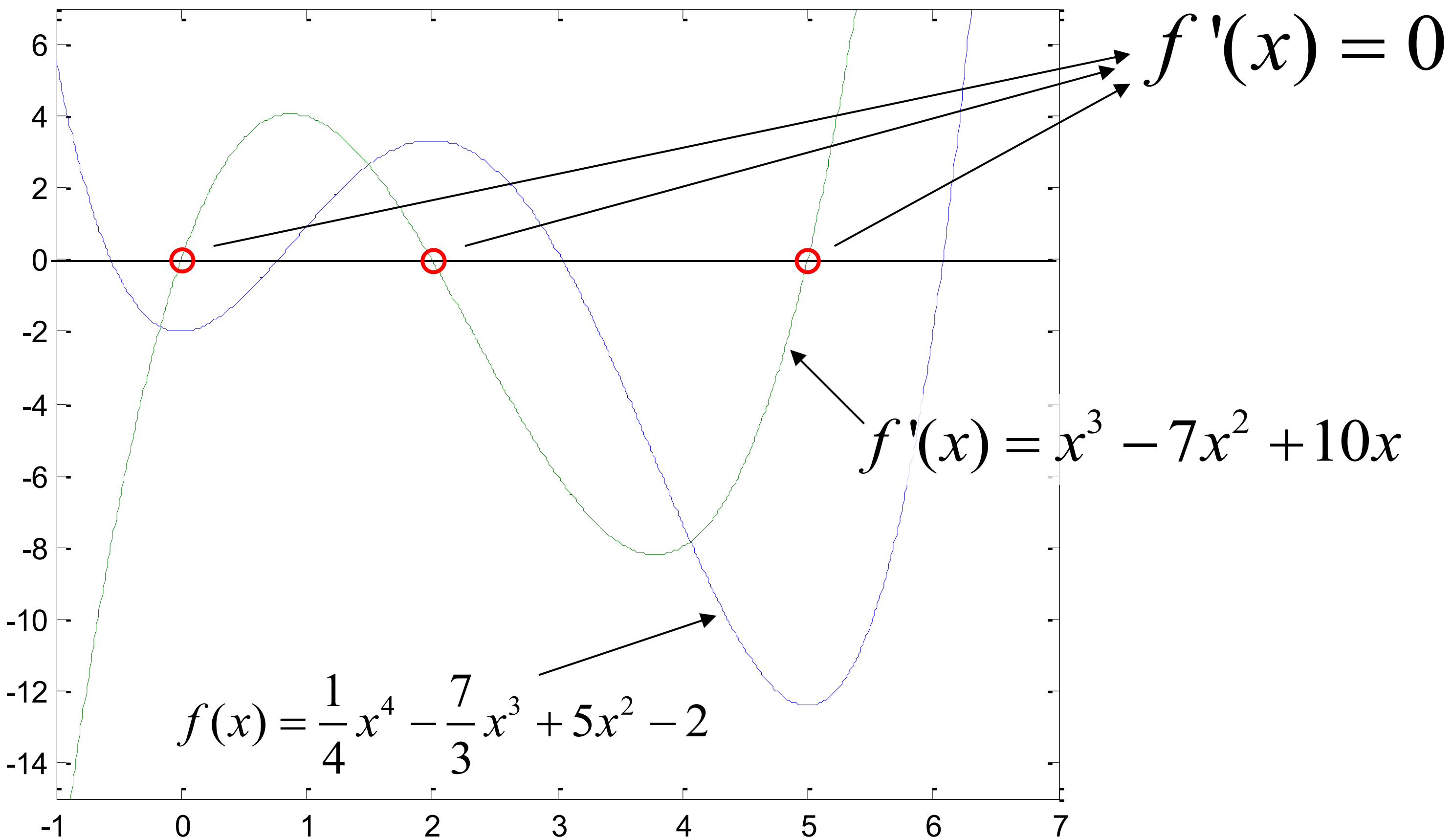
Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
JTP: Ing. Amalia Rueda

Encontrar el valor mínimo o máximo de una función en una variable

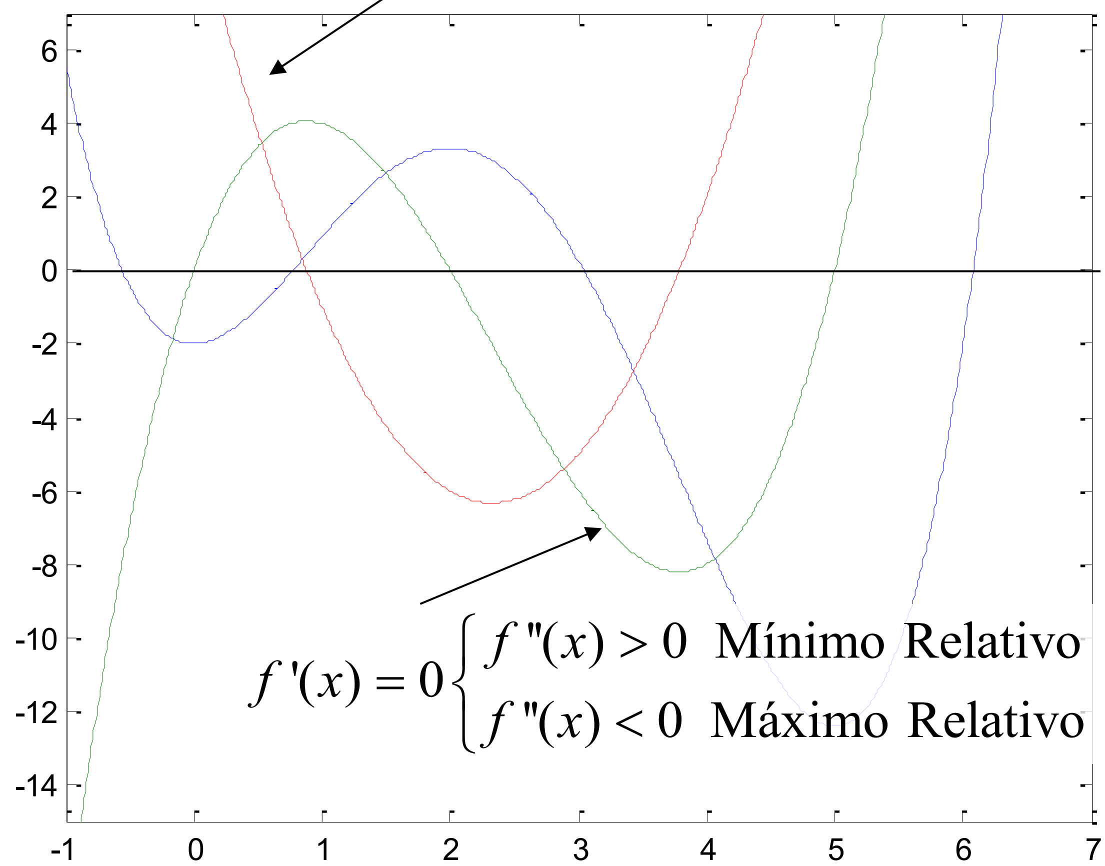


$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$

Condición necesaria de mínimo o máximo: $f'(x) = 0$



$$f''(x) = 3x^2 - 14x + 10$$



$$f'(x) = 0 \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{Mínimo Relativo} \\ f''(x) < 0 & \text{Máximo Relativo} \end{cases}$$

Método de Newton

Taylor de segundo orden: $f(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

Utilizando el valor actual de la variable en un proceso iterativo $x^{(k)}$ se aproxima por Taylor de segundo orden el valor de la función en el siguiente punto $x^{(k+1)}$:

$$f\left(x^{(k+1)},x^{(k)}\right)=f\left(x^{(k)}\right)+f'\left(x^{(k)}\right)\left(x^{(k+1)}-x^{(k)}\right)+\frac{f''\left(x^{(k)}\right)}{2!}\left(x^{(k+1)}-x^{(k)}\right)^2$$

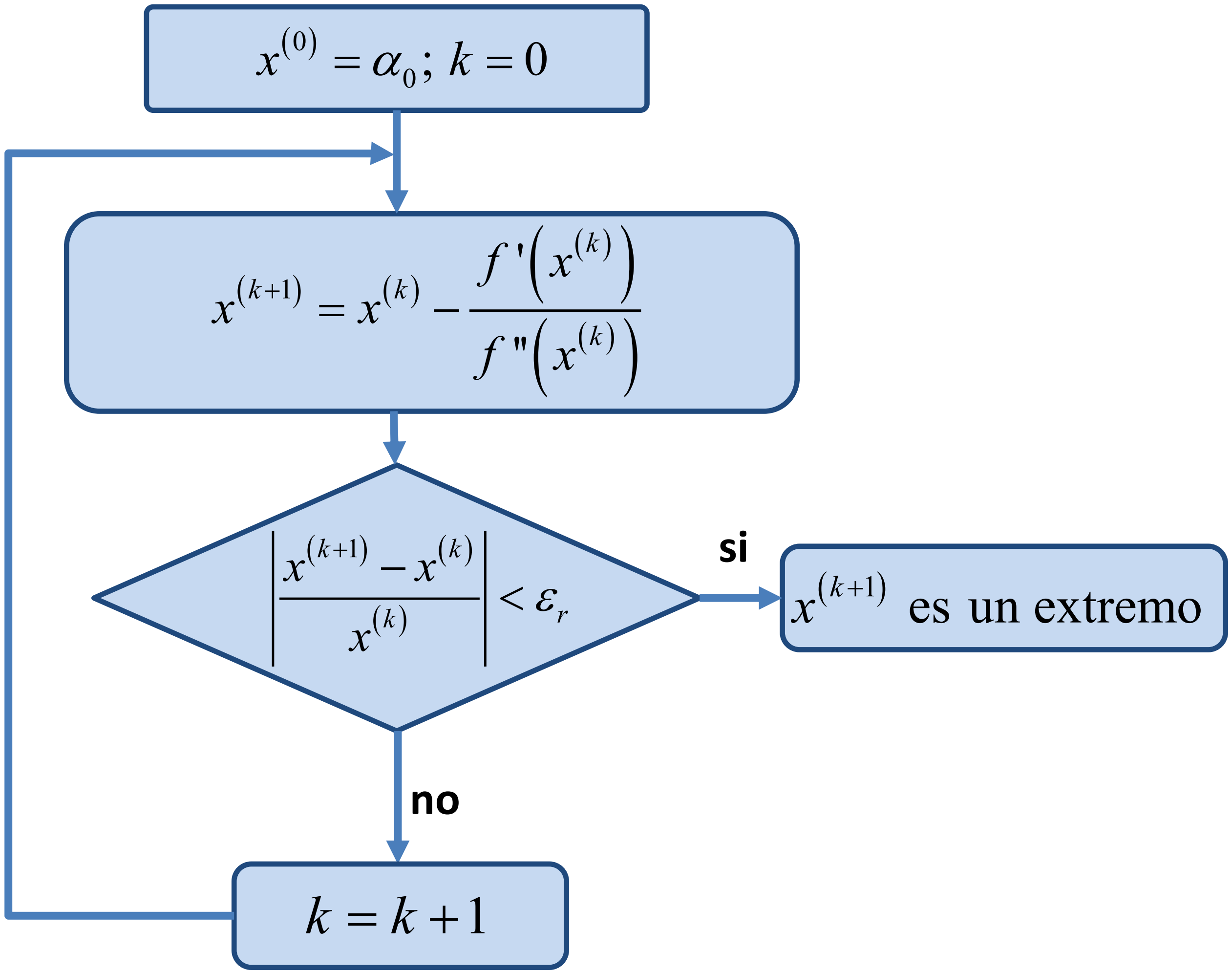
Buscamos que el siguiente punto sea un punto crítico: $\frac{d\,f\left(x^{(k+1)},x^{(k)}\right)}{dx^{(k+1)}}=0$

$$0+f'\left(x^{(k)}\right)1+\frac{\cancel{2}\,f''\left(x^{(k)}\right)}{\cancel{2}!}\left(x^{(k+1)}-x^{(k)}\right)=0$$

$$\boxed{x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f'\left(x^{(k)}\right)}{f''\left(x^{(k)}\right)}}$$

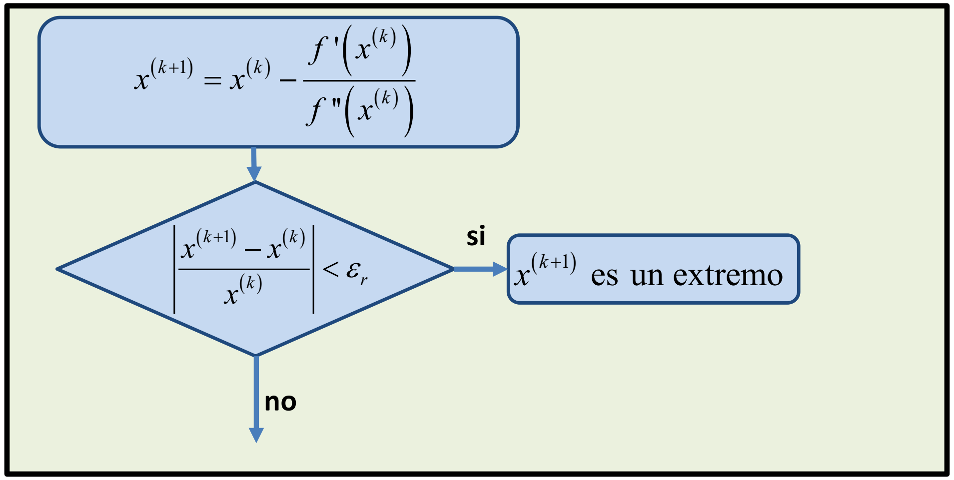
Formula recursiva del método de newton

Método de Newton



Método de Newton (en Scilab)

```
function out=newton(funp, funpp, x0, tol)
x=x0;
for k=1:100
```




```
end
if k == 100
        out=[];
        disp('no converge');
end
endfunction
```

Método de Newton

Ejemplo: $min\ e^{x} + 1.5x^{2}$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	*error*
0				

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'\left(x^{(k)}\right)}{f''\left(x^{(k)}\right)}$$

Método de interpolación parabólica sucesivas

Este método encuentra la parábola que pasa por tres puntos de la función y encuentra el extremo de la misma. Luego se eligen tres nuevos puntos y se repite el procedimiento hasta satisfacer la tolerancia.

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

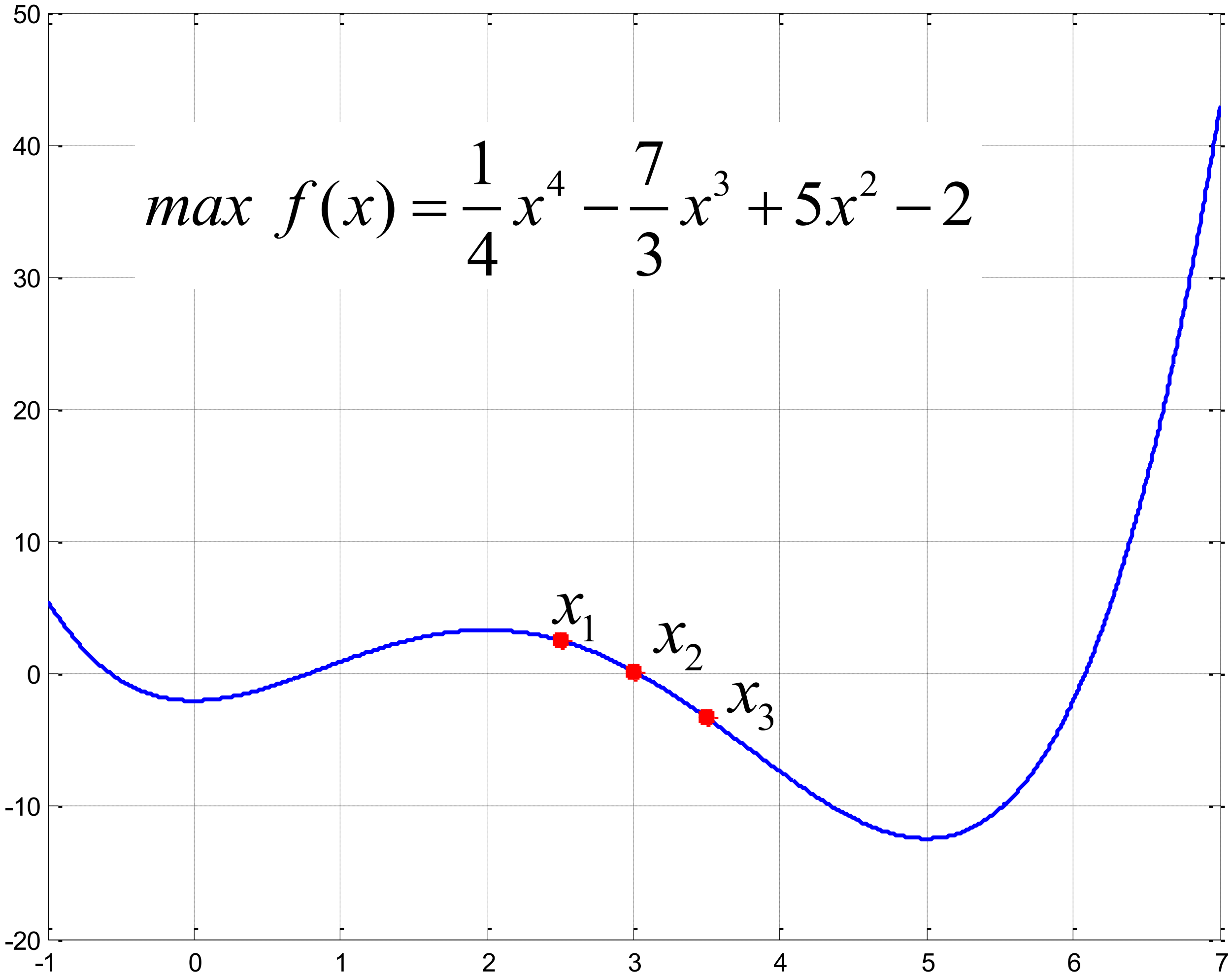
¿Cómo encontrar la parábola?

¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

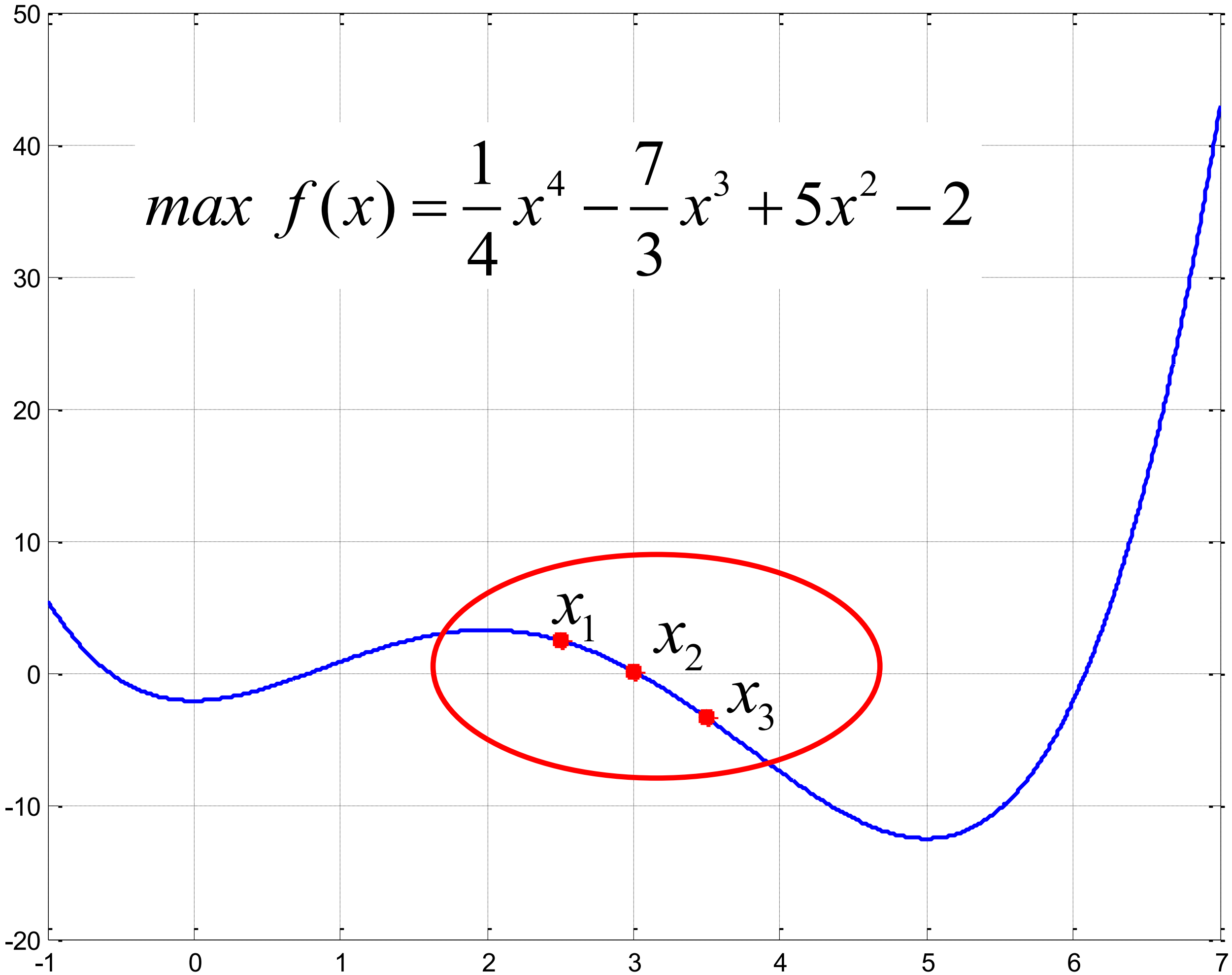
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

¿Cuál es el criterio de tolerancia?

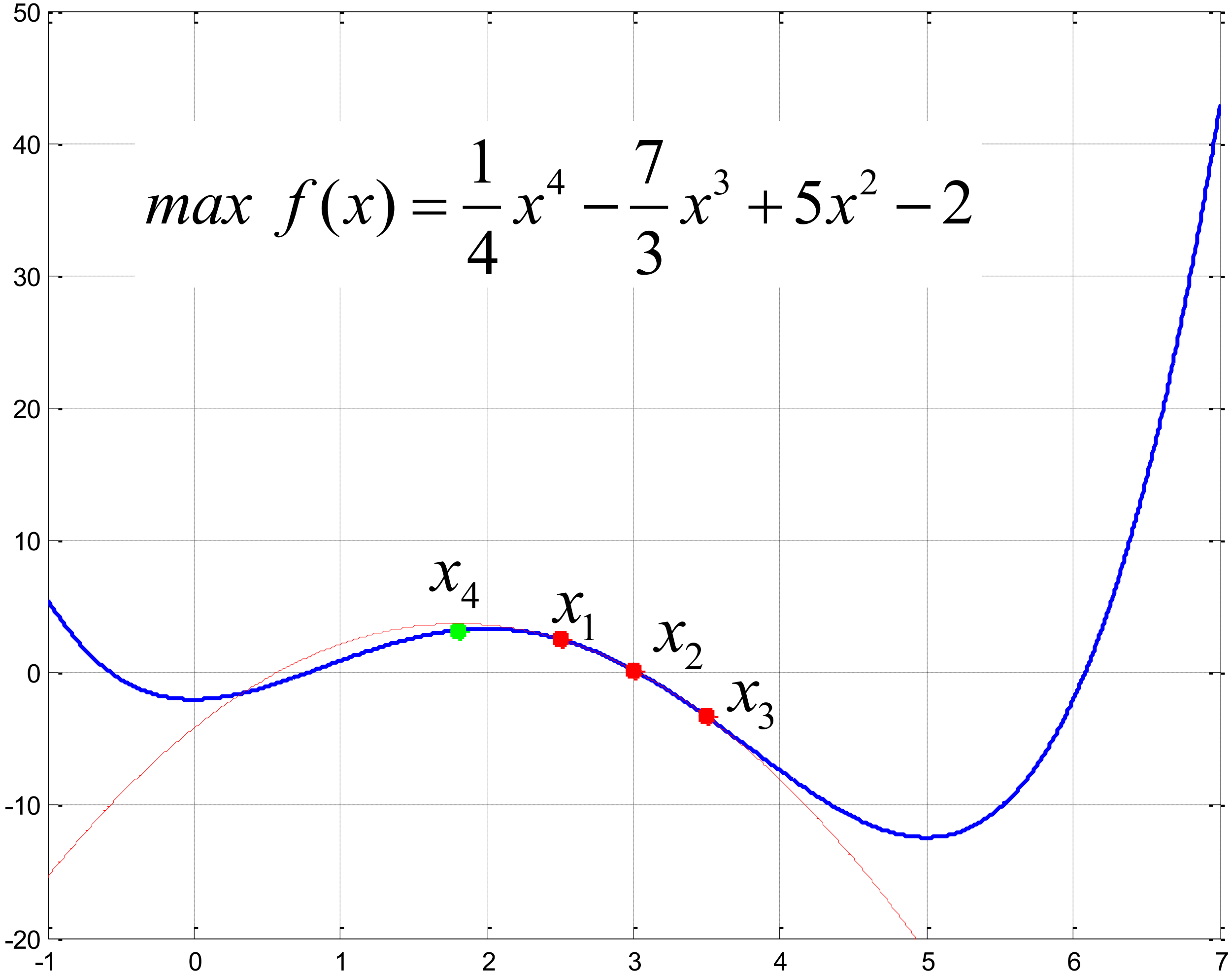
¿Cómo elegir los tres valores de arranque?



Solo necesitamos tres puntos del dominio



Encontramos la parábola que pasa por los tres puntos. El nuevo punto corresponde al ***extremo*** de la misma.



¿Cómo encontrar la parábola?

La parábola debe pasar por los siguientes puntos:

$$x_1 = 2.5 \quad f(x_1) = 2.55729 \qquad (2.5;2.55729)$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 0.25 \qquad (3;0.25)$$

$$x_3 = 3.5 \quad f(x_3) = -3.27604 \qquad (3.5;-3.27604)$$

$y = ax^2 + bx + c$ → Los tres puntos deben cumplir esta ecuación

$$\begin{cases} a2.5^2 + b2.5 + c = 2.55729 \\ a3^2 + b3 + c = 0.25 \\ a3.5^2 + b3.5 + c = -3.27604 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.5^2 & 2.5 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 3.5^2 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.55729 \\ 0.25 \\ -3.27604 \end{bmatrix}$$

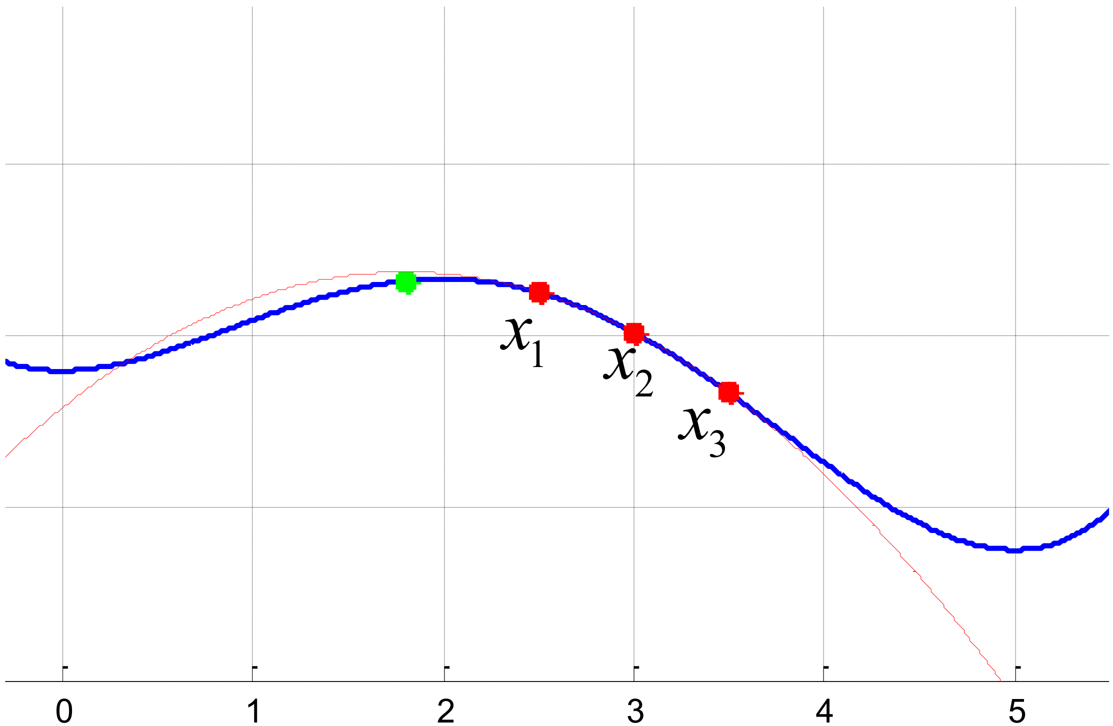
$Ax = b$ Sistema 3x3

$$\begin{bmatrix} 2.5^2 & 2.5 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 3.5^2 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.55729 \\ 0.25 \\ -3.27604 \end{bmatrix}$$

Resolvemos

$$a = -2.4375$$
$$b = 8.791667$$
$$c = -4.1875$$

$$y = -2.4375x^2 + 8.791667x - 4.1875$$

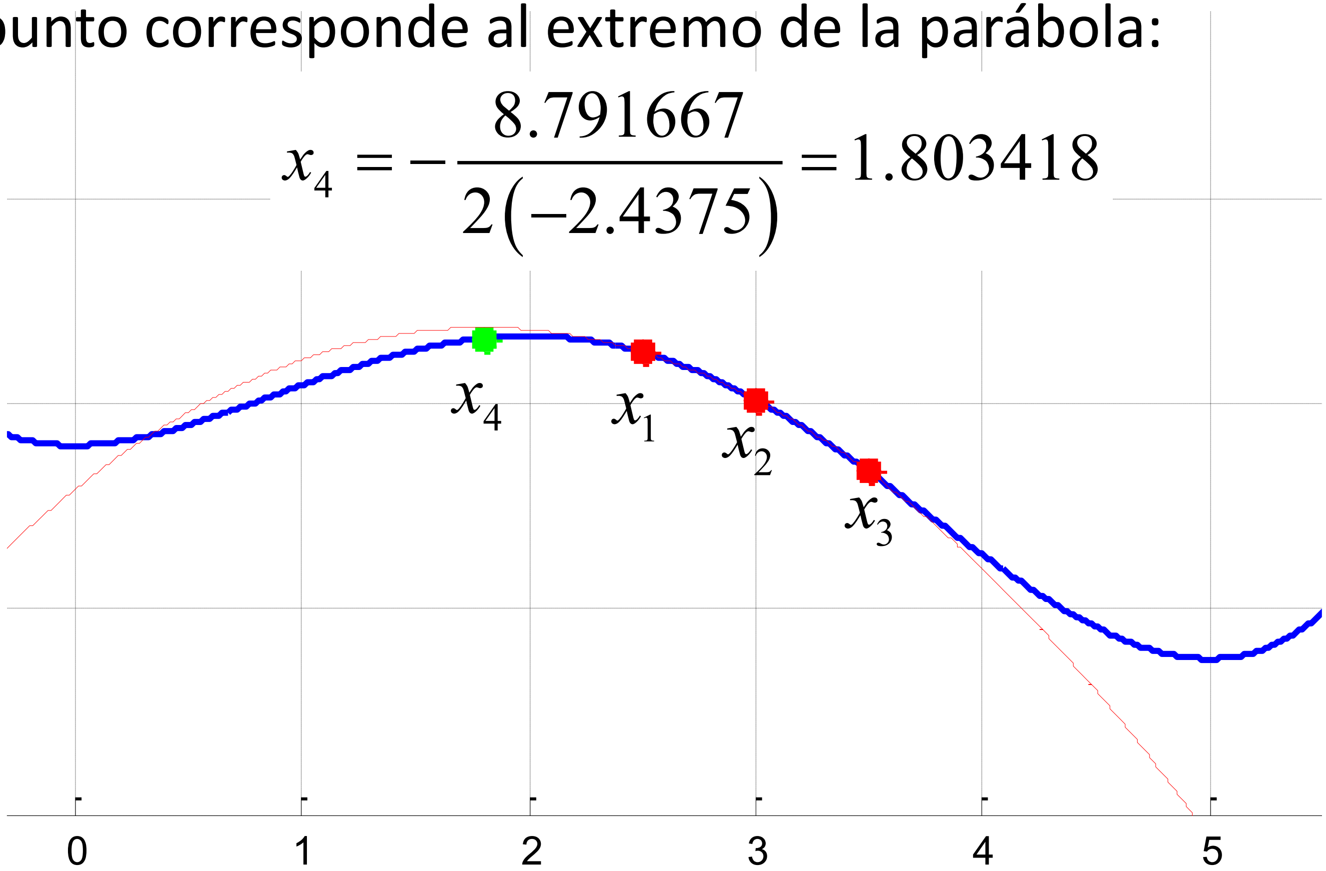


¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

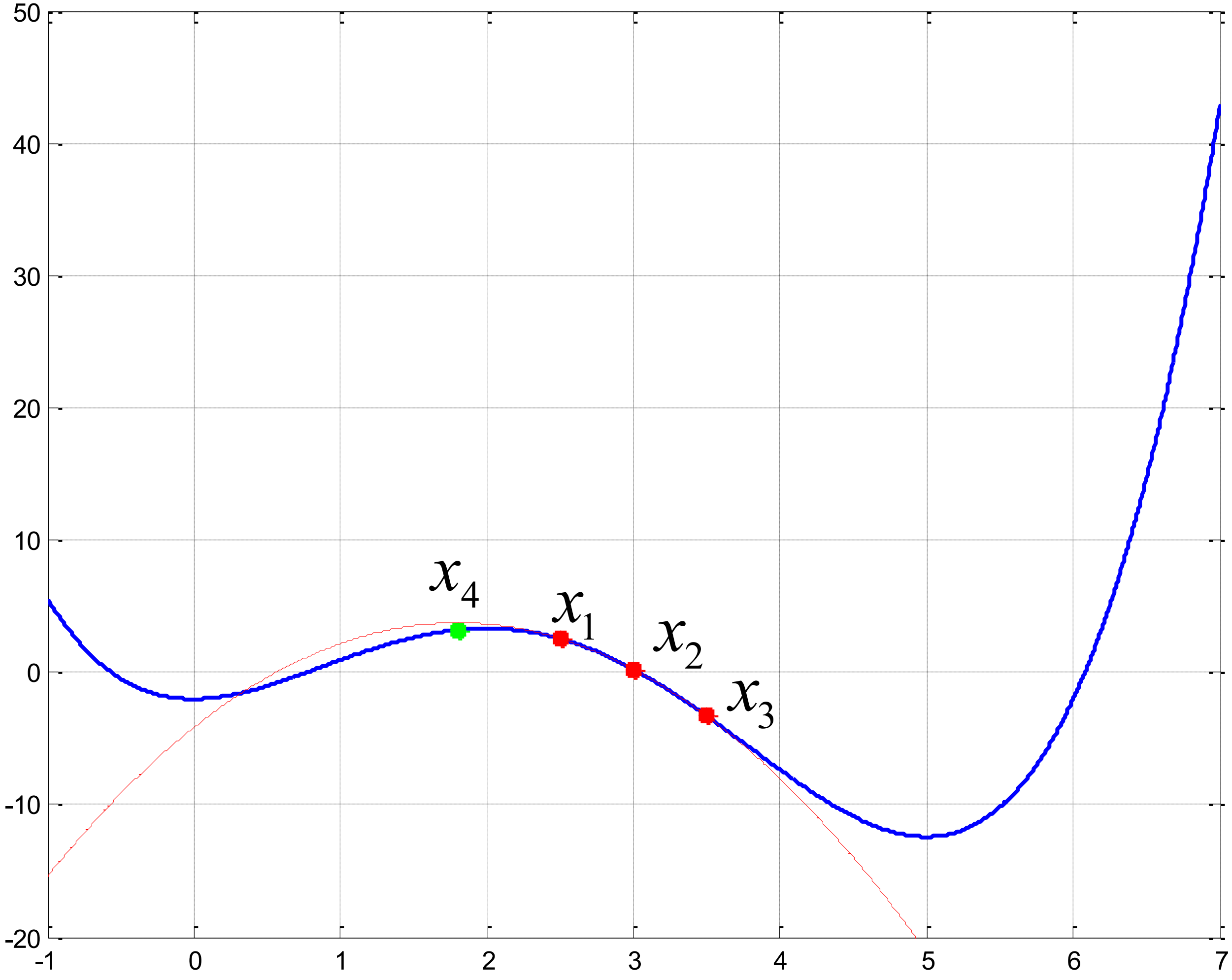
$$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow y' = 2ax + b \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y' = 0$$

El nuevo punto corresponde al extremo de la parábola:

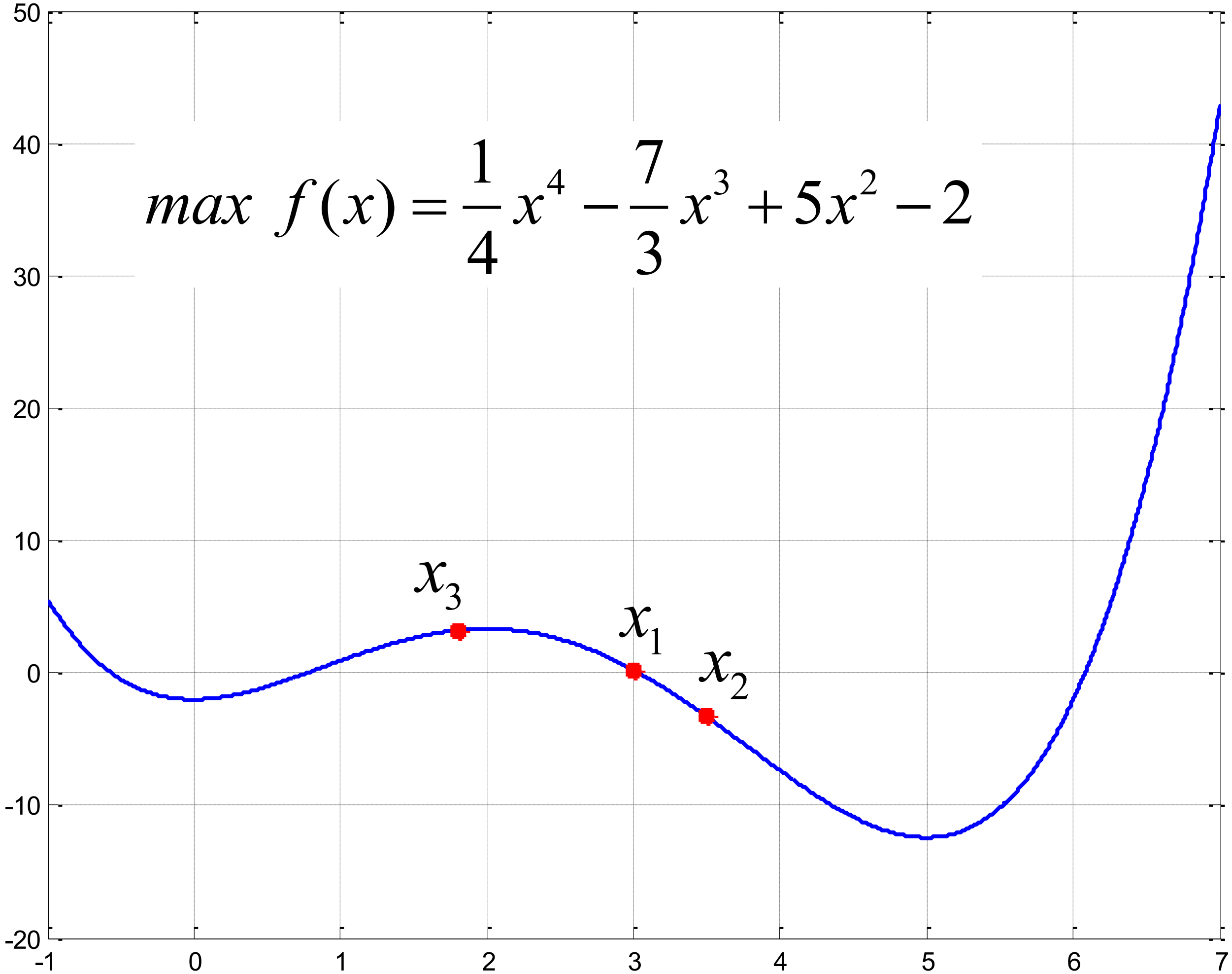
$$x_4 = -\frac{8.791667}{2(-2.4375)} = 1.803418$$



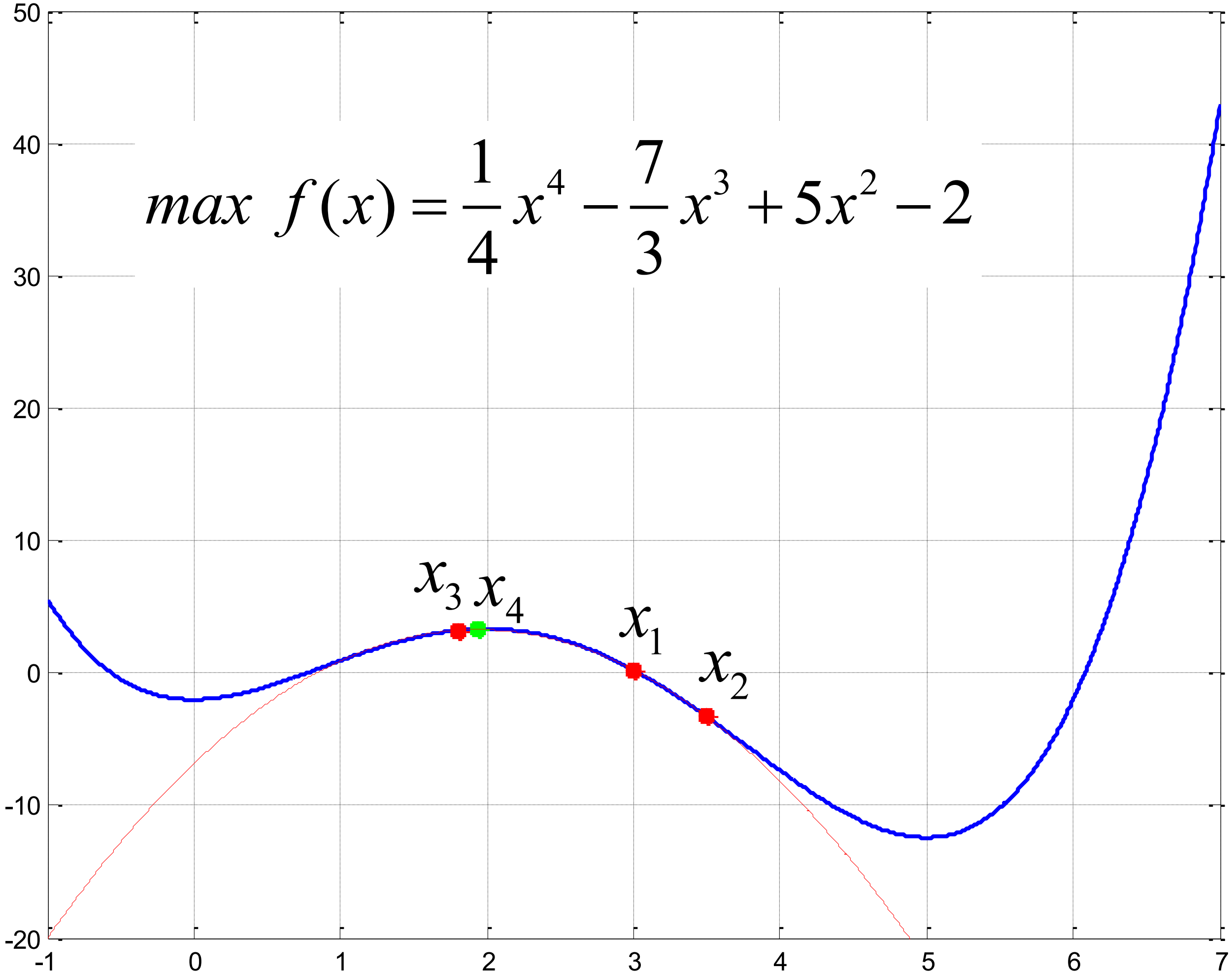
¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos



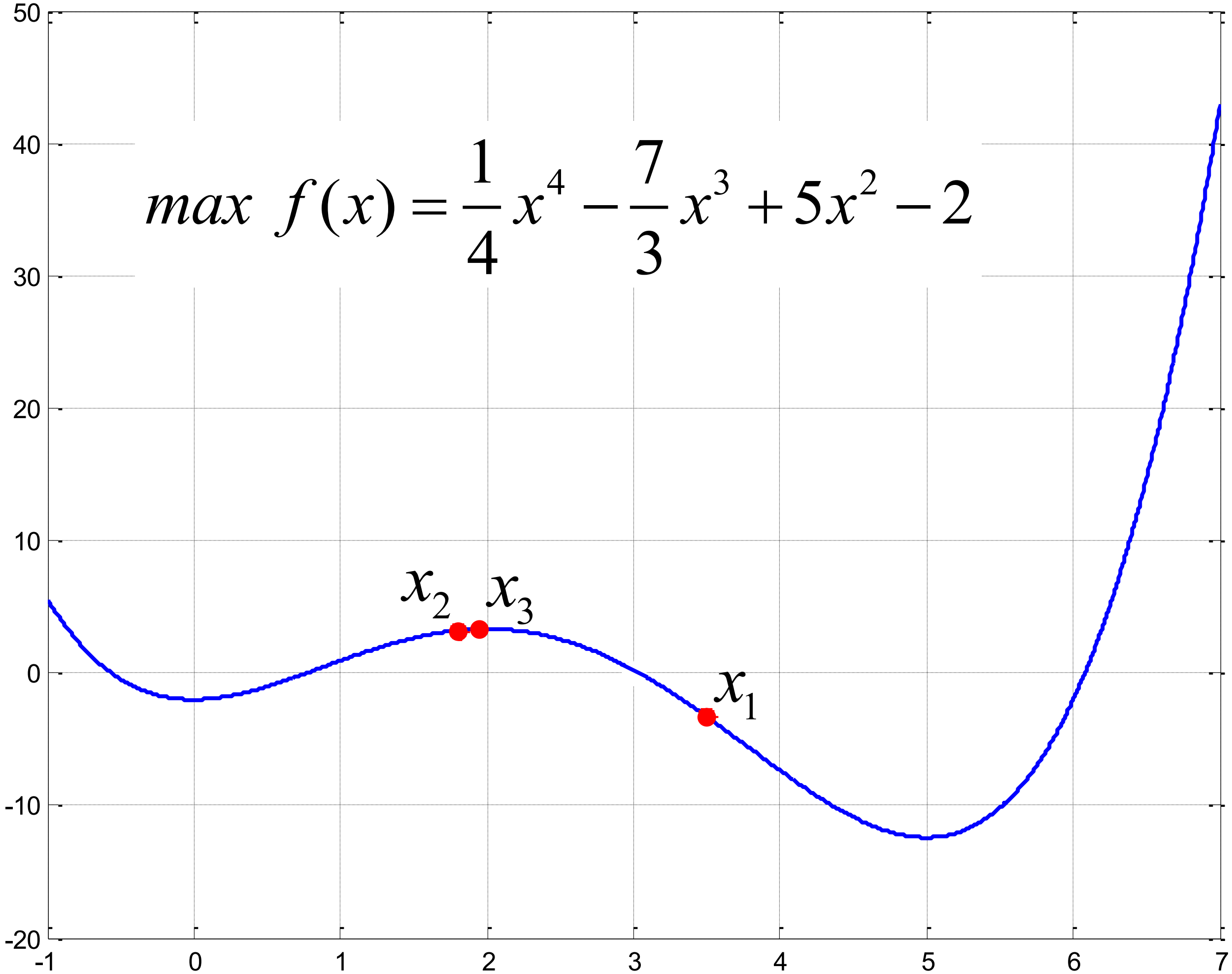
¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos



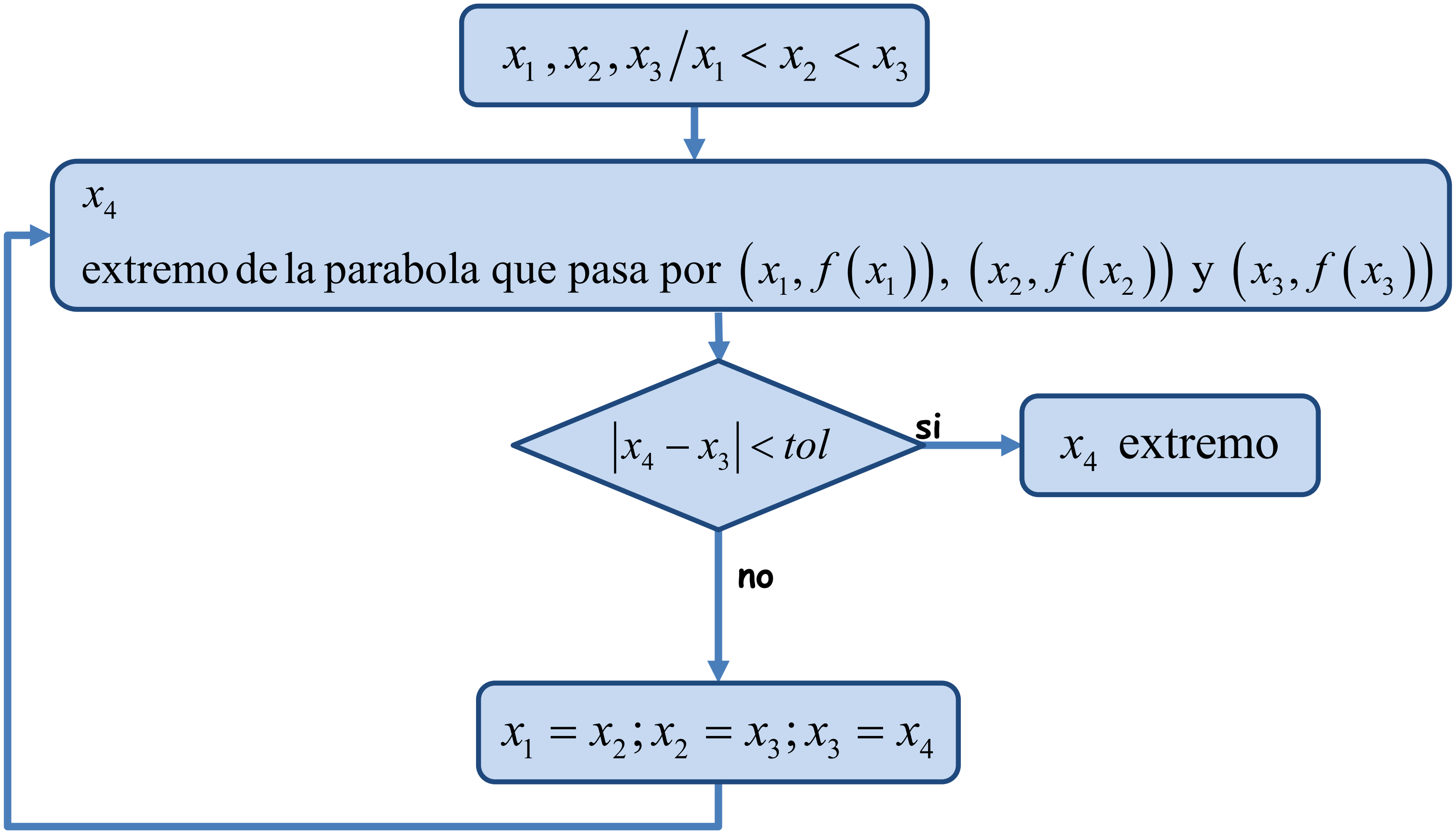
Continuamos… hasta satisfacer la tolerancia



¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos



Método de interpolación parabólica sucesivas



Método de interpolación parabólica sucesivas (SciLab)

```
function xopt=parabolicas(fun, x1, x2, x3, tol)
  for k= 1:100
    A=[1 x1 x1^2;1 x2 x2^2;1 x3 x3^2];
    b=[fun(x1);fun(x2);fun(x3)];
    x=A\b;
    x4=-x(2)/(2*x(3));
    if abs(x4-x3) < tol
      xopt = x4;
      break
    end
    x1 = x2; x2 = x3; x3 = x4;
  end
  if k == 100
    xopt=[];
    disp('no converge');
  end
endfunction
```

x_4

extremo de la parabola que pasa por $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ y $\left(x_3, f\left(x_3\right)\right)$

Tip: Existe una formula directa para el calculo del nuevo punto

$$x_4 = \frac{f(x_1)\left(x_2{}^2 - x_3{}^2\right) + f(x_2)\left(x_3{}^2 - x_1{}^2\right) + f(x_3)\left(x_1{}^2 - x_2{}^2\right)}{2f(x_1)(x_2 - x_3) + 2f(x_2)(x_3 - x_1) + 2f(x_3)(x_1 - x_2)}$$

Método de interpolación parabólica sucesivas

Matemática Superior Aplicada

UTN

Ejemplo: $max \quad 2sen(x) - \frac{x^2}{10}$

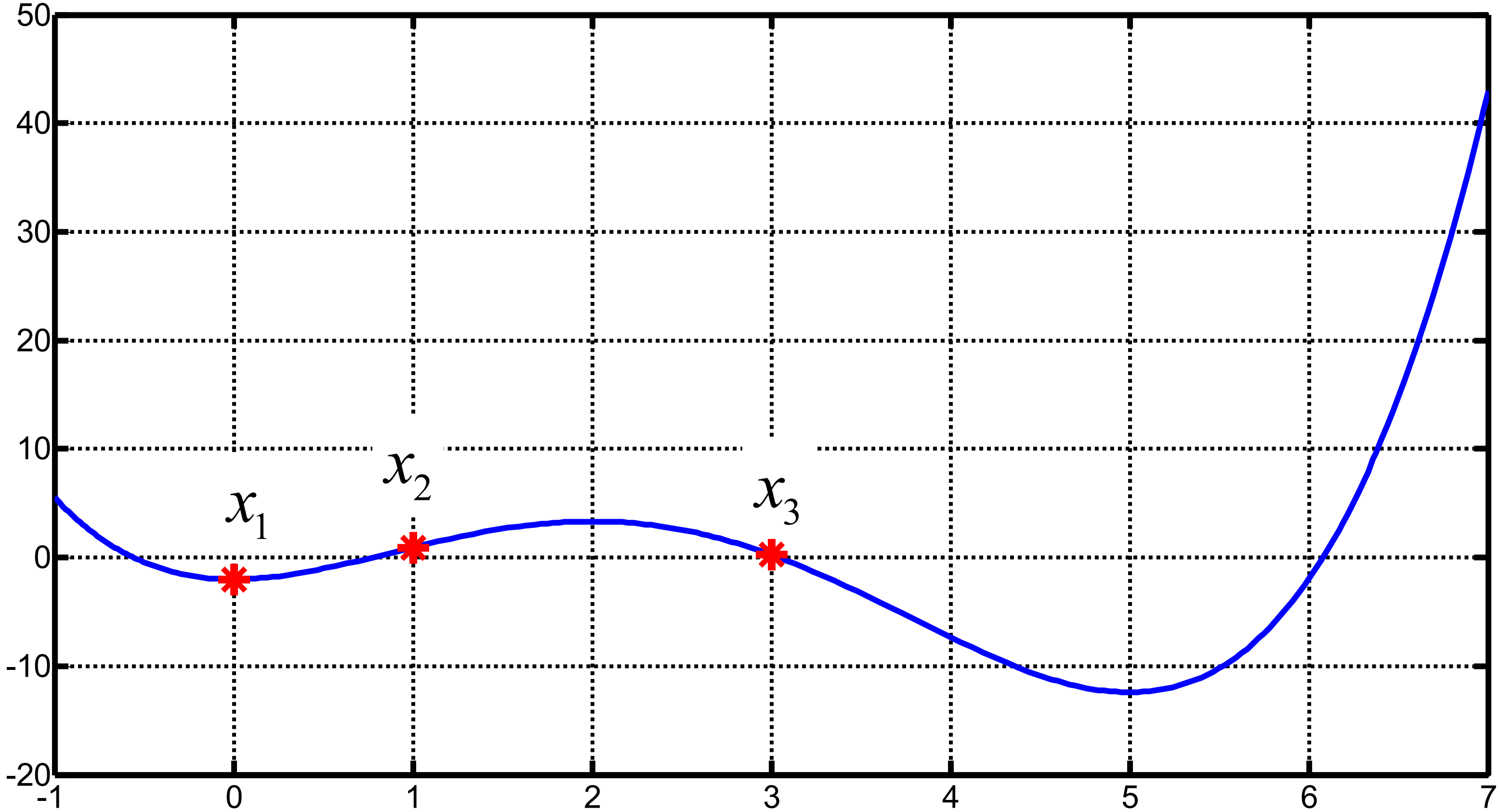
x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
0		1		4			

Método de interpolación parabólica sucesivas (II)

- Es similar al anterior, pero cambia el criterio para seleccionar los puntos en cada iteración.
- El objetivo es contar siempre con una parábola con un **máximo en problemas de maximización** y con un **mínimo en problemas de minimización**.

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

$$max\, f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$

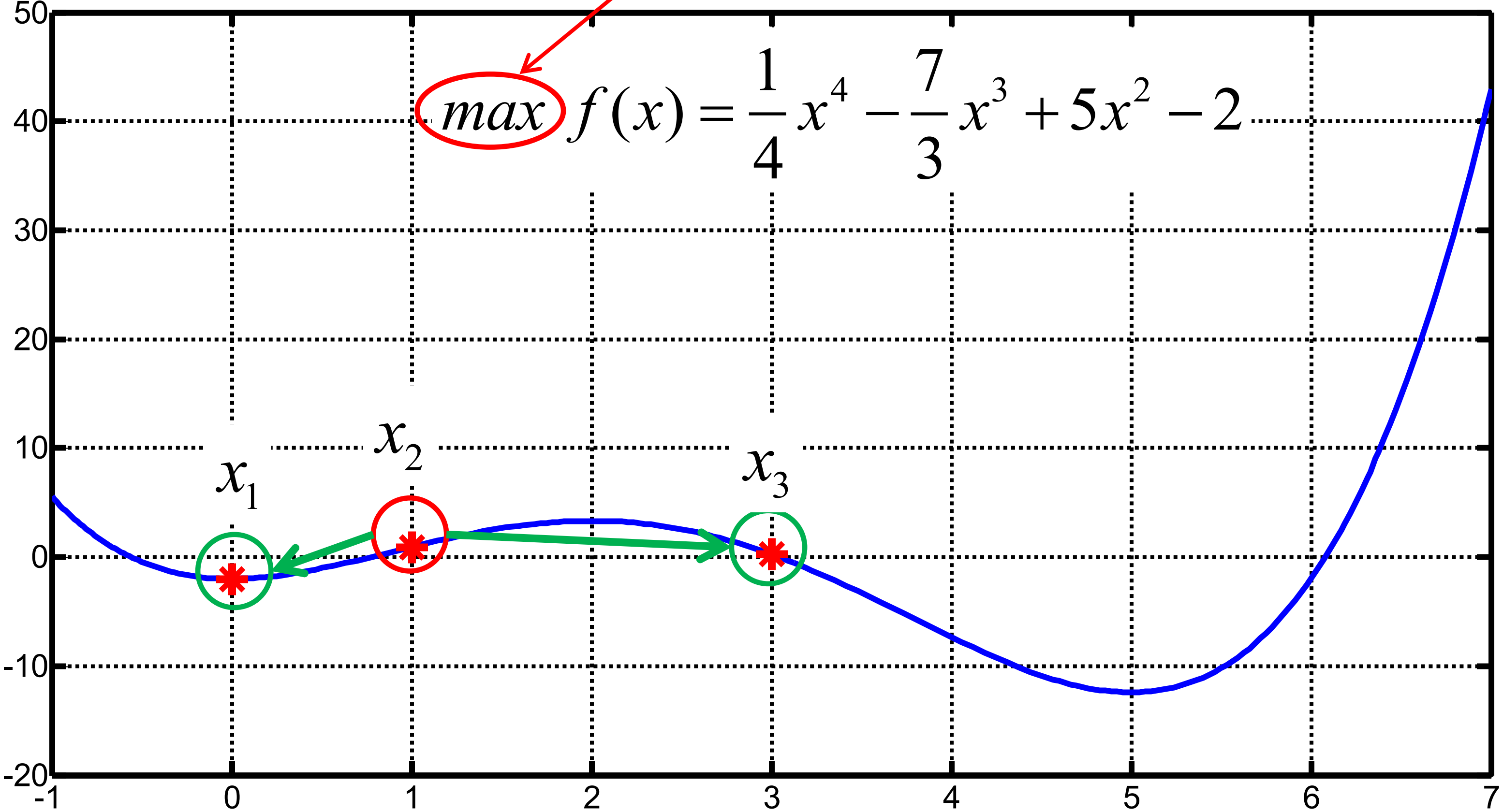


Método de interpolación parabólica sucesivas (II)

$$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$$
$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 0.9167$$
$$x_3 = 3 \quad f(x_3) = 0.25$$

El valor de la función en el punto intermedio mayor que el de los extremos

$$max\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$



¿Cómo encontrar la parábola?

La parábola debe pasar por los siguientes puntos:

$$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2 \qquad (0;-2)$$
$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 0.9167 \quad \Rightarrow \quad (1;0.9167)$$
$$x_3 = 3 \quad f(x_3) = 0.25 \qquad (3;0.25)$$

$y = ax^2 + bx + c$ $\Rightarrow$ Los tres puntos deben cumplir esta ecuación

$$\begin{aligned} a0^2 + b0 + c &= -2 \\ a1^2 + b1 + c &= 0.9167 \\ a3^2 + b3 + c &= 0.25 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.9167 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

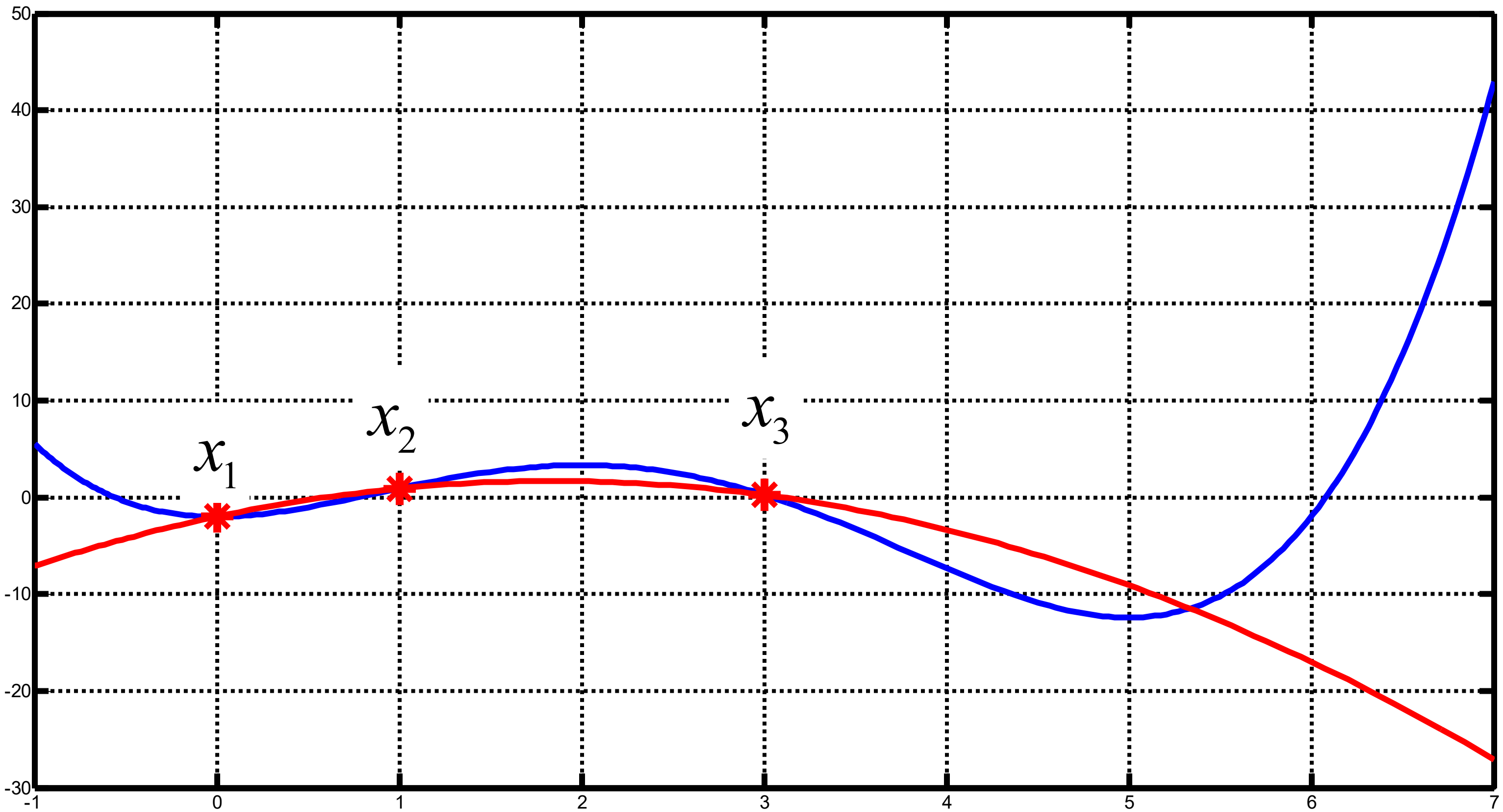
$Ax = b$ Sistema 3x3

$$\begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.9167 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Resolvemos

$$a = -1.0833$$
$$b = 4$$
$$c = -2$$

$$y = -1.0833x^2 + 4x - 2$$

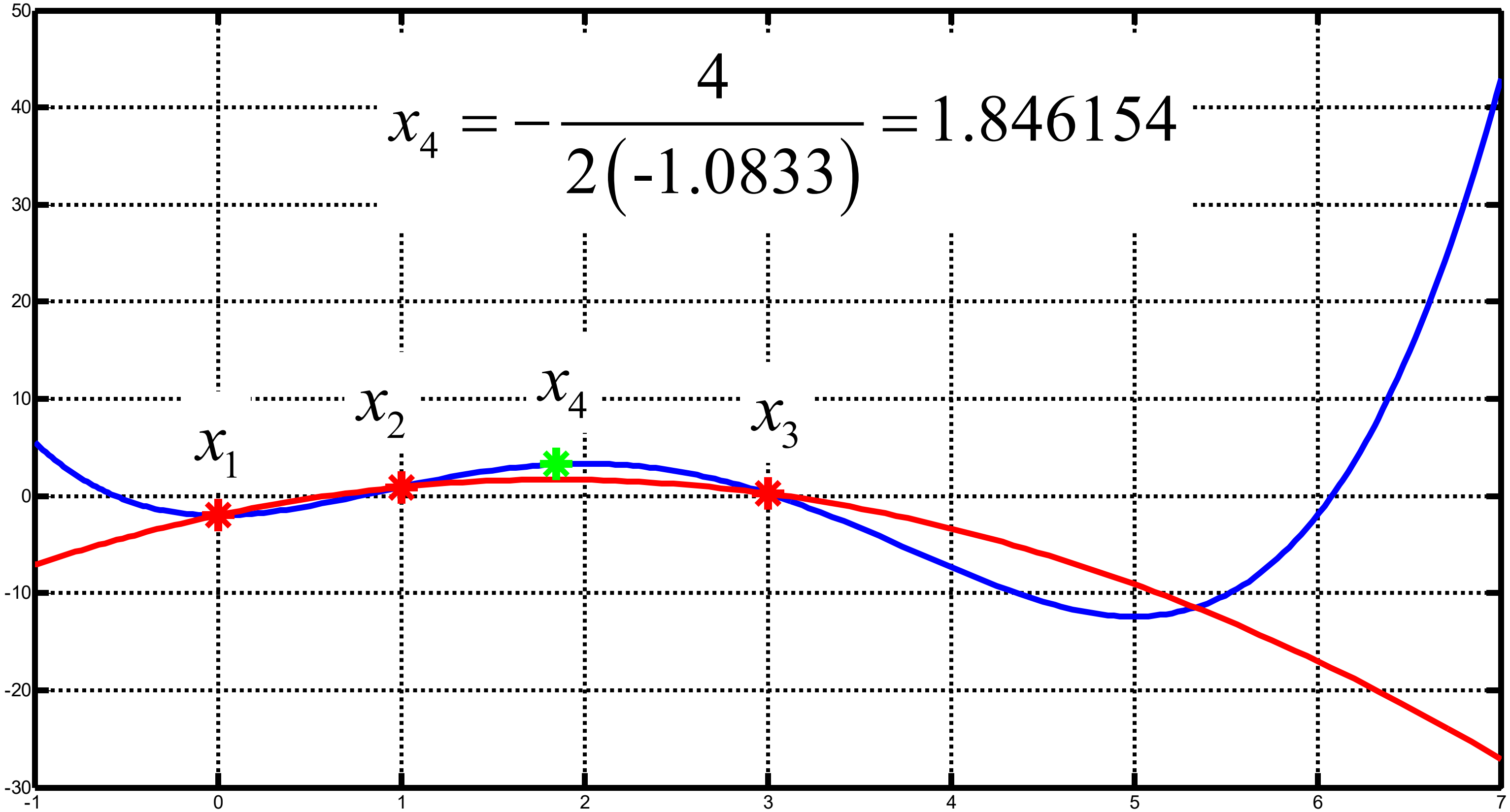


¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y' = 0$$

El nuevo punto corresponde al extremo de la parábola:

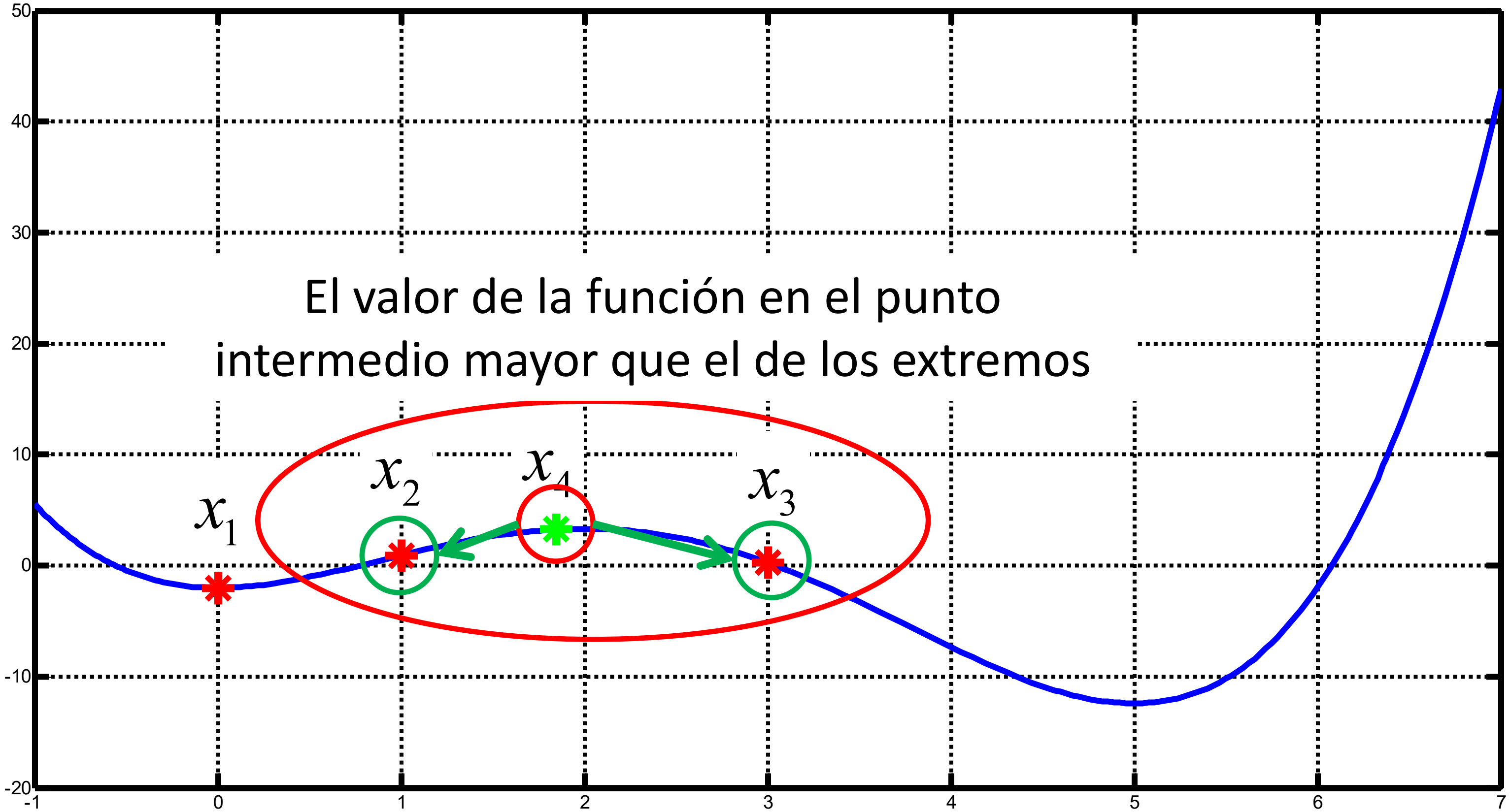
$$x_4 = -\frac{4}{2(-1.0833)} = 1.846154$$



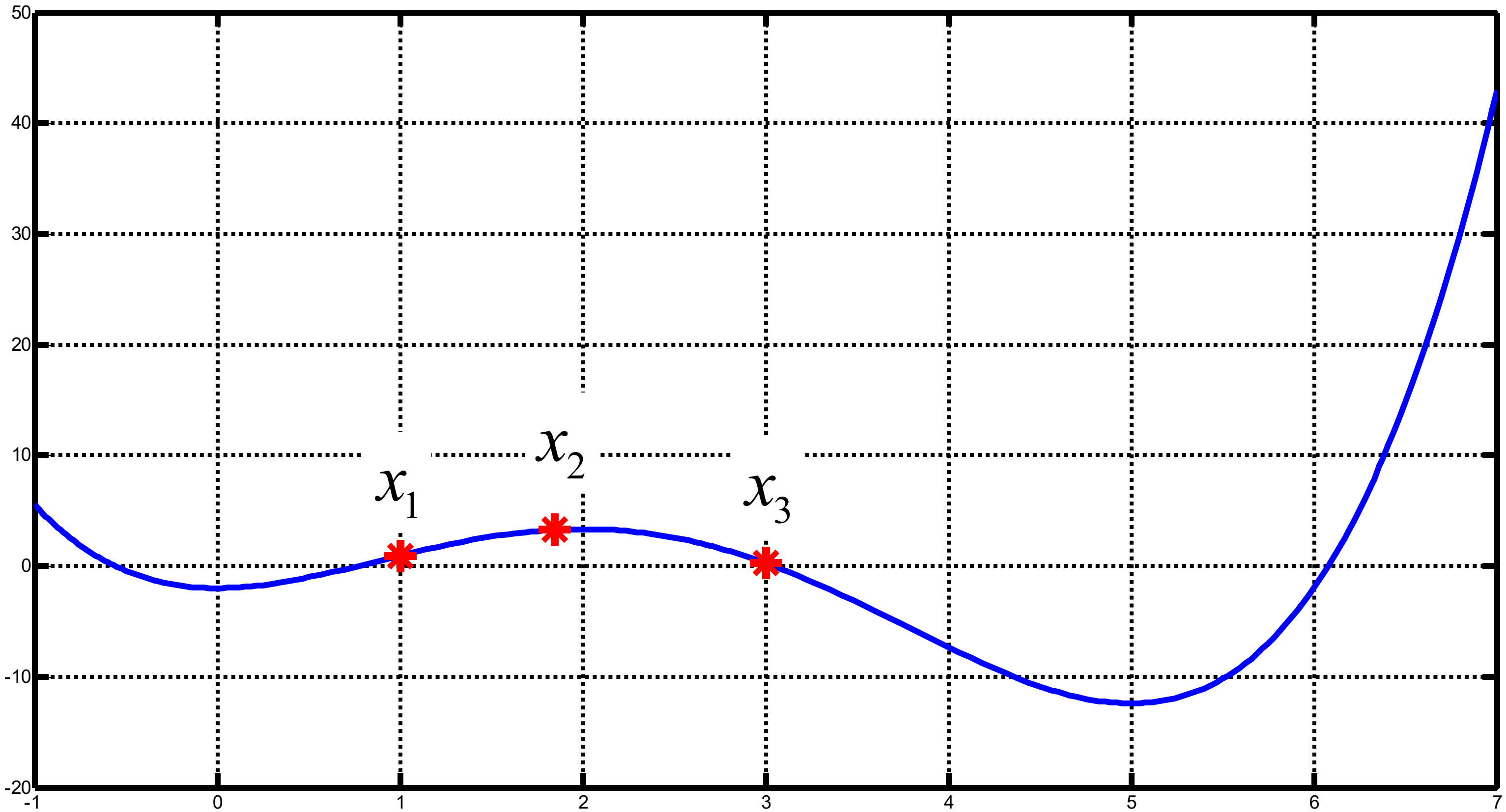
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

Debemos quedarnos con el nuevo punto y dos de los anteriores.

¿Cuáles son los nuevo tres puntos?



Nuevo intervalo:

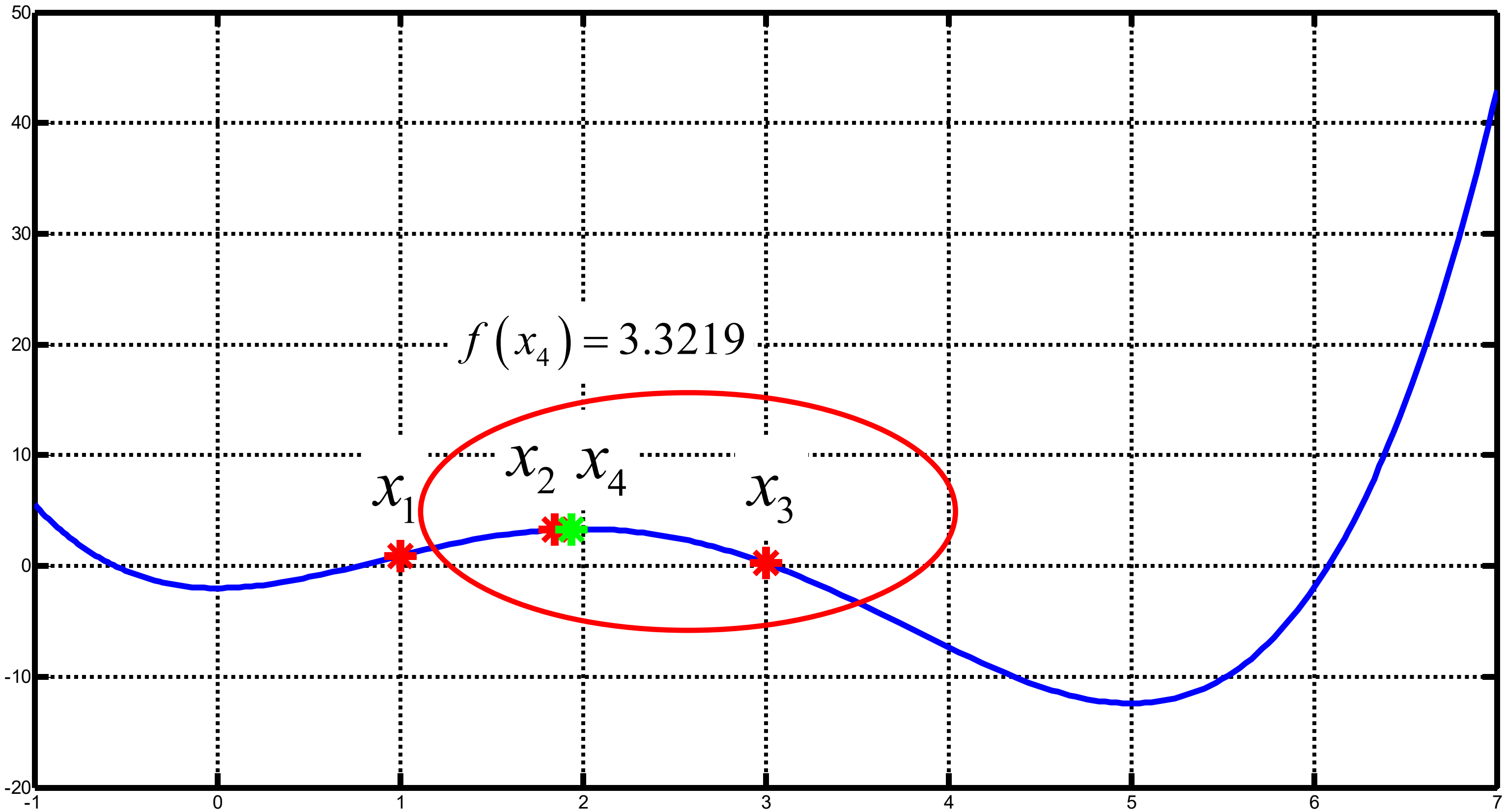


Método de interpolación parabólica sucesivas (II)

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 1.8461^2 & 1.8461 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9167 \\ 3.2636 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$a = \text{-}2.6928$$
$$b = 10.4378$$
$$c = \text{-}6.8284$$

$$x_4 = -\frac{10.4378}{2(\text{-}2.6928)} = 1.9381$$

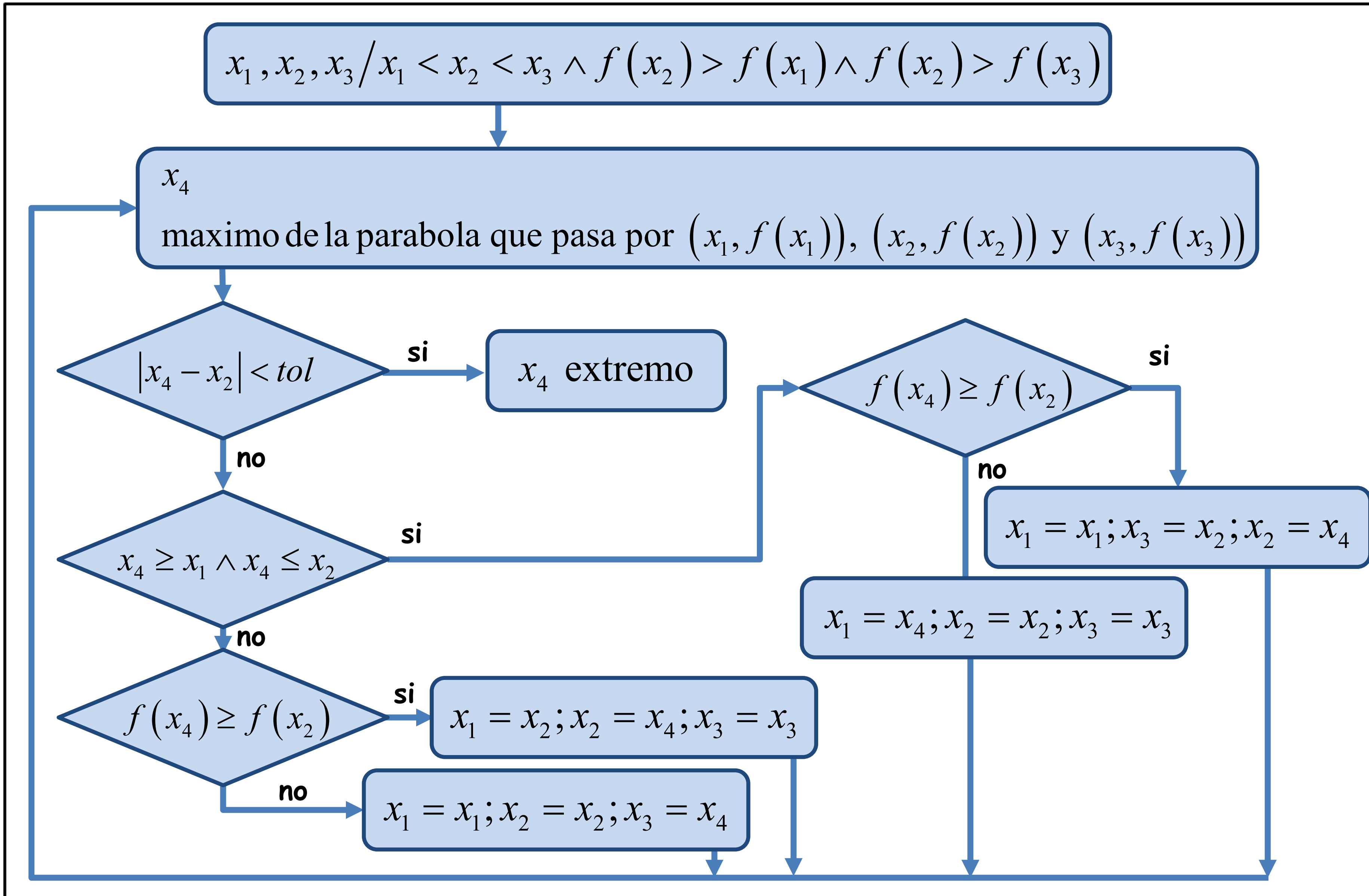


¿Cuál es el criterio de tolerancia?

El nuevo punto encontrado va convergiendo al valor optimo

x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
0	-2	1	0.91666667	3	0.25	1.84615385	3.26368124

Método de interpolación parabólica sucesivas (II) (maximizar)



¿Cuál es la diferencia?

En funciones de un solo máximo (o mínimo) ambos llegan al mismo resultado.

Para funciones con varios extremos:

- El primer método puede llevarnos a un extremo que no corresponde al que estamos buscando.
- La metodología II converge a un máximo o mínimo según lo que estemos buscando. Podemos decidir que buscar.

Método de la relación dorada

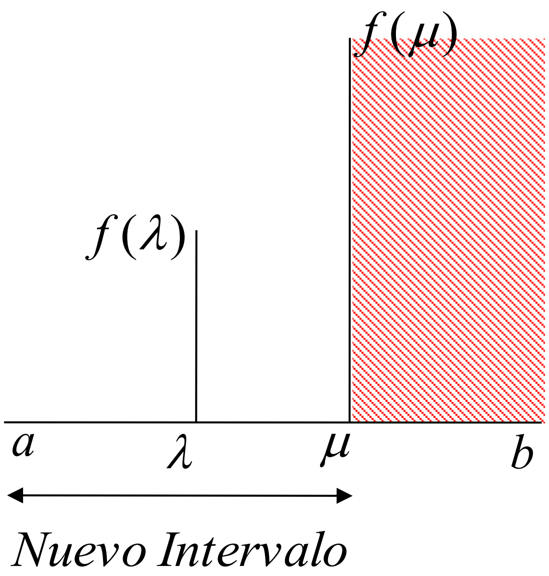
(Minimización)

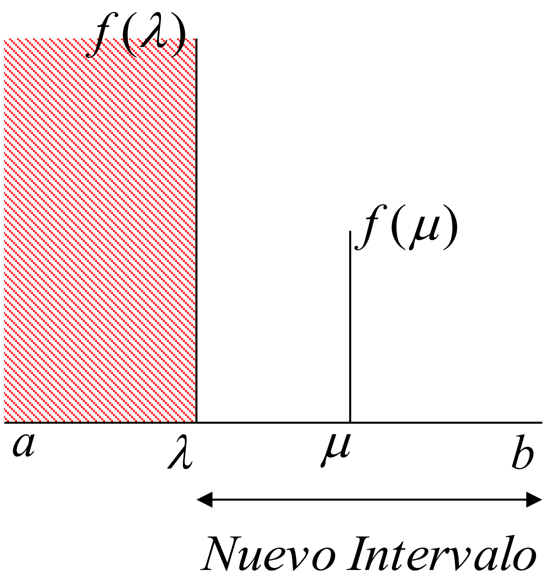
$$\text{Sea } \lambda, \mu \in [a,b] \text{ tal que } \lambda < \mu$$

$$\therefore$$

$$\text{Si } f(\lambda) < f(\mu), \text{ luego } f(x) \geq f(\lambda) \quad \forall x \in (\mu, b]$$

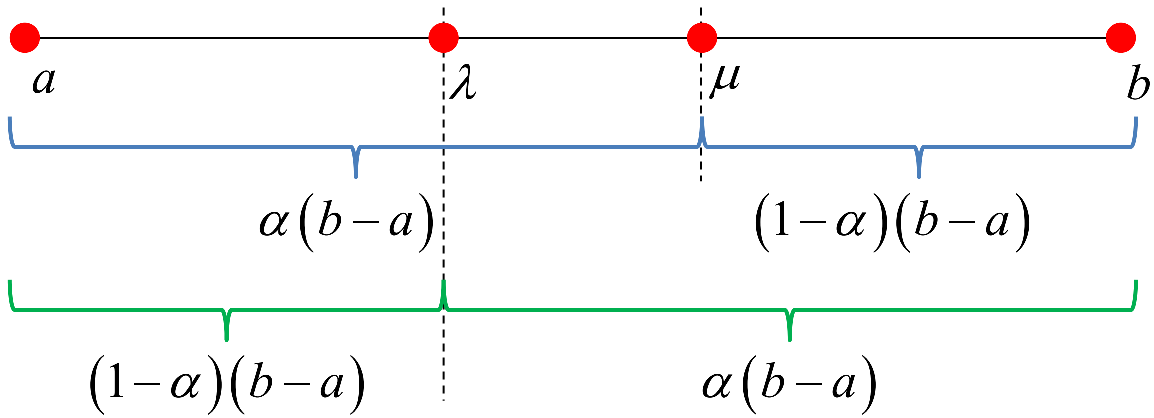
$$\text{Si } f(\lambda) \geq f(\mu), \text{ luego } f(x) \geq f(\mu) \quad \forall x \in [a, \lambda)$$





Método de la relación dorada

Expresamos a λ y μ como una fracción α del intervalo [a,b]:



Analizando la grafica anterior encontramos las siguientes expresiones de λ y μ :

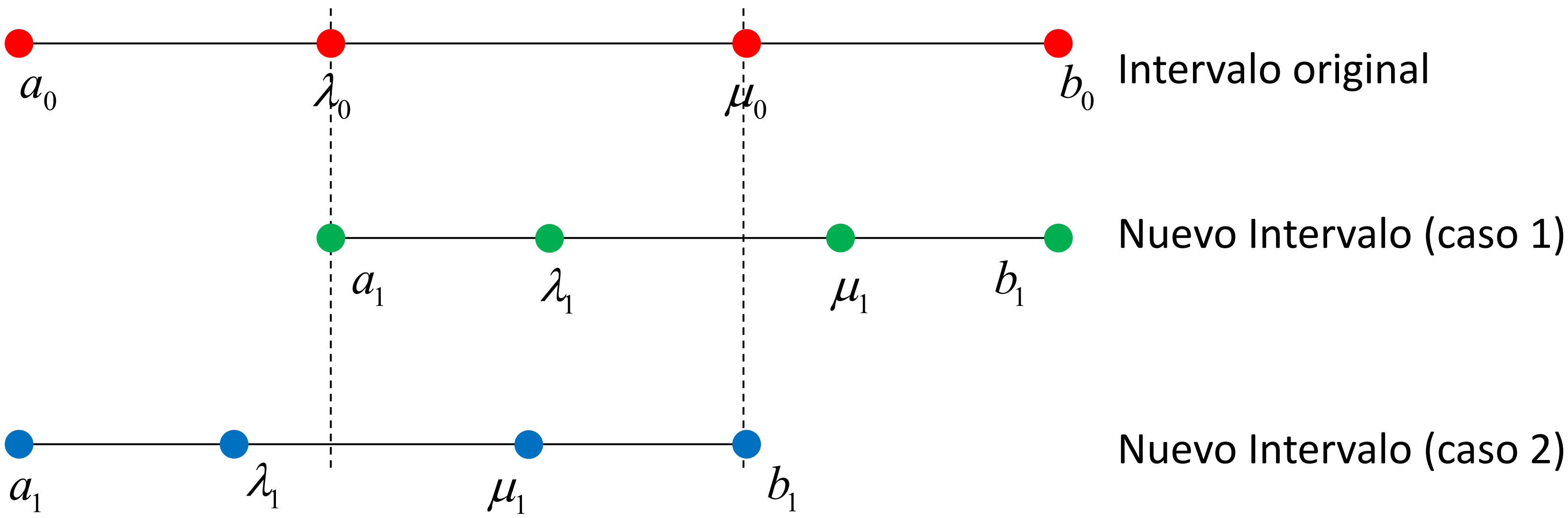
$$\lambda = b - \alpha(b-a)$$

$$\mu = a + \alpha(b-a)$$

$$¿\alpha?$$

Método de la relación dorada

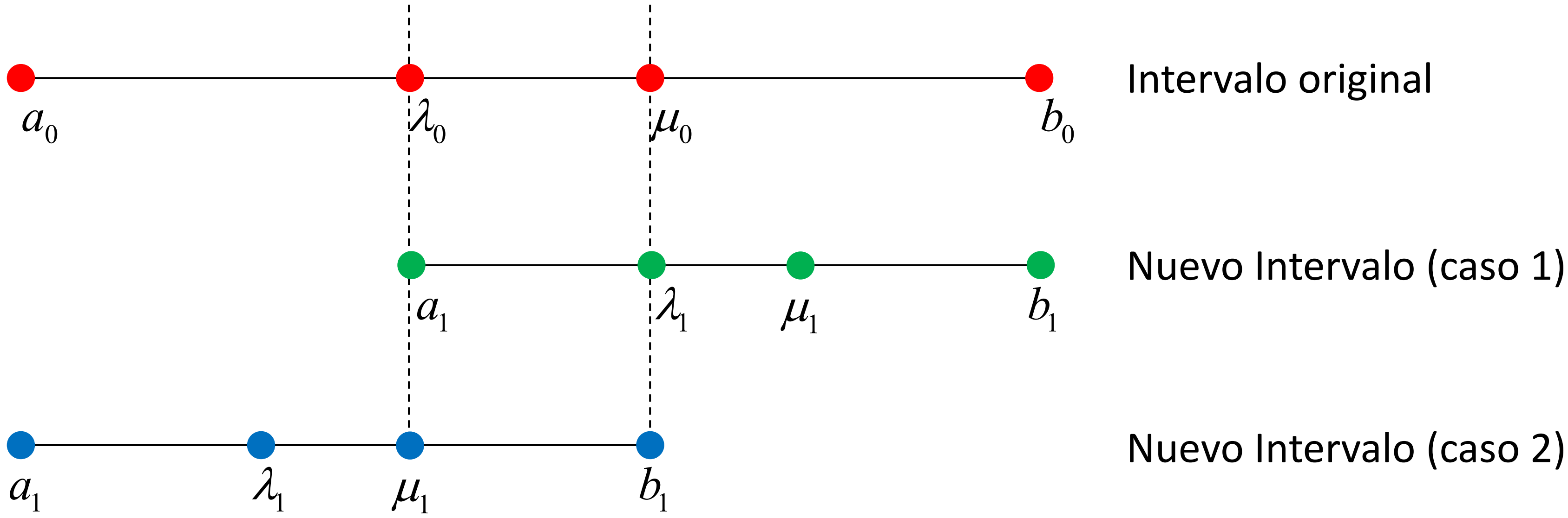
Valor aleatorio: α=0.7:



No se utiliza cualquier valor porque cada iteración requeriría calcular λ y μ

Método de la relación dorada

Buscamos α de manera que se cumpla lo siguiente:



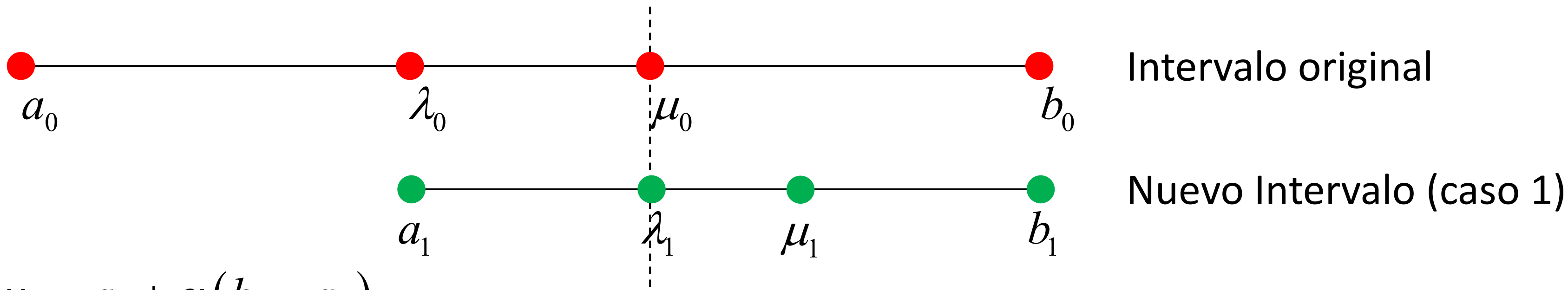
Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$

Caso 2: $\mu_1 = \lambda_0$

El valor de α que estamos buscando permite que en cada iteración solo se calcule λ o μ

Método de la relación dorada

Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$



$$\mu_0 = a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right)$$
$$\lambda_1 = b_1 - \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_1 - \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$

De la grafica:

$$b_1 = b_0$$
$$a_1 = \lambda_0 = b_0 - \alpha\left(b_0 - a_0\right)$$

Reemplazando:

$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha\left(b_0 - \left(b_0 - \alpha\left(b_0 - a_0\right)\right)\right)$$
$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha\left(b_0 - b_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right)\right)$$
$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha^2\left(b_0 - a_0\right)$$

Método de la relación dorada

$$a_0 + \alpha\left(b_0 - a_0\right) = b_0 - \alpha^2\left(b_0 - a_0\right)$$

$$\alpha^2\cancel{\left(b_0 - a_0\right)} + \alpha\cancel{\left(b_0 - a_0\right)} - \cancel{\left(b_0 - a_0\right)} = 0$$

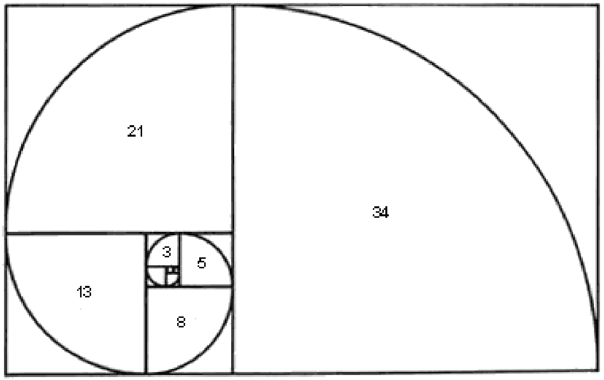
$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \begin{cases} \alpha_1 \cong 0.618 \\ \alpha_2 \cong -1.618 \end{cases}$$

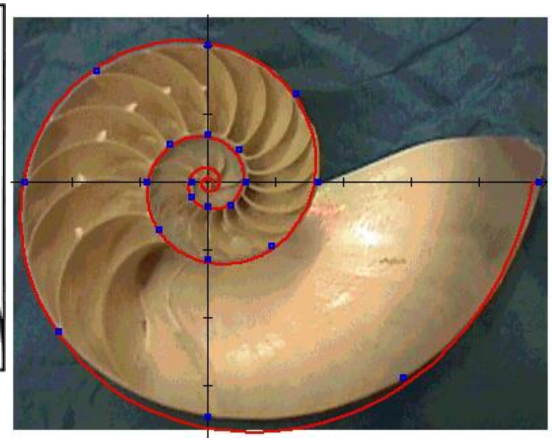
¡Encontramos el α!

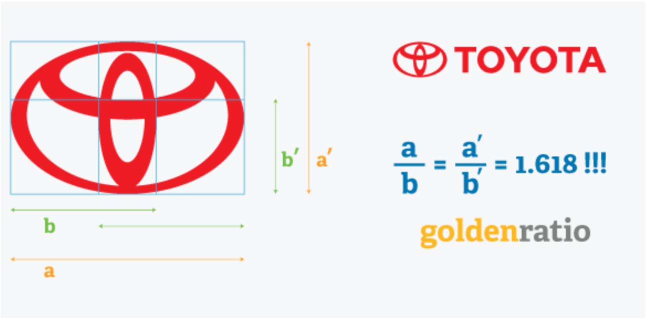
Analizando el Caso 2 se llega a la misma conclusión

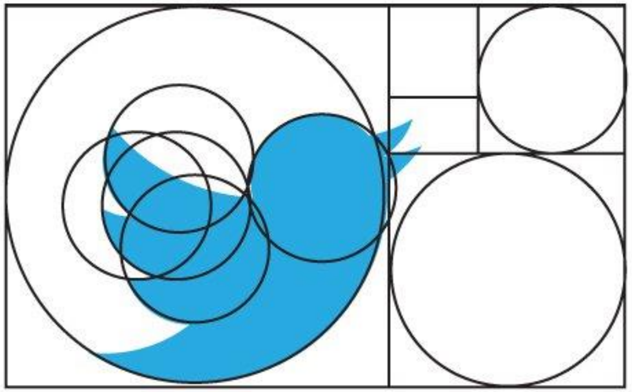
$$\alpha \cong 0.618034$$

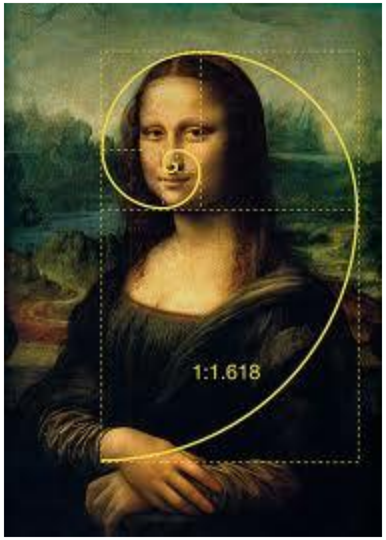
Golden Ratio

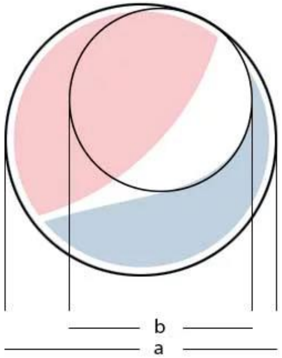








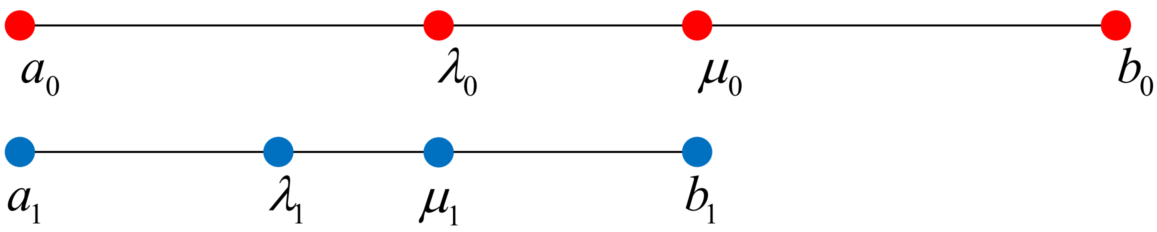




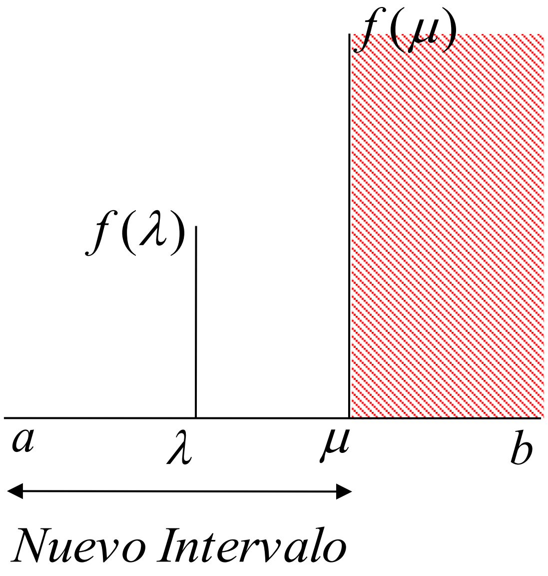
Método de la relación dorada

(Minimización)

$$\text{Si}\, f(\lambda) < f(\mu)$$



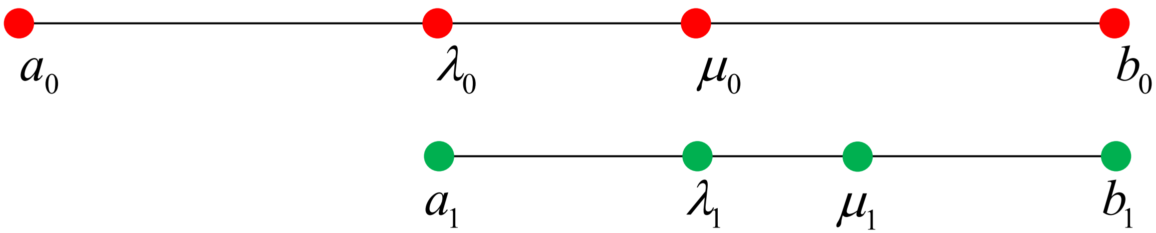
$$a_1 = a_0$$
$$b_1 = \mu_0$$
$$\mu_1 = \lambda_0$$
$$\lambda_1 = b_1 - \alpha\left(b_1 - a_1\right)$$



Método de la relación dorada

(Minimización)

$$\text{Si}\, f(\lambda) \geq f(\mu)$$

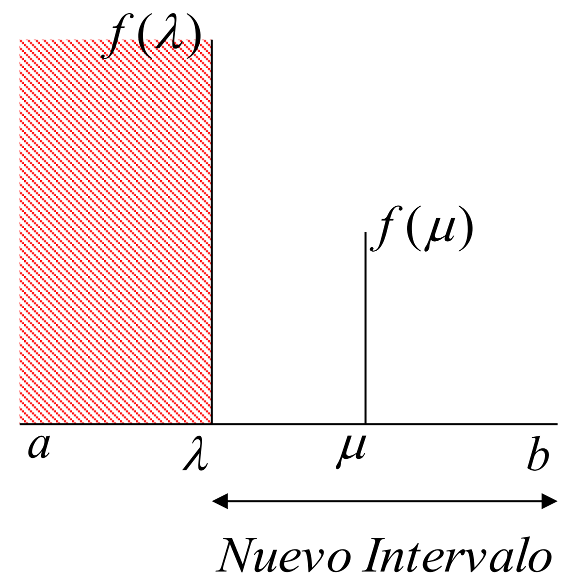


$$a_1 = \lambda_0$$

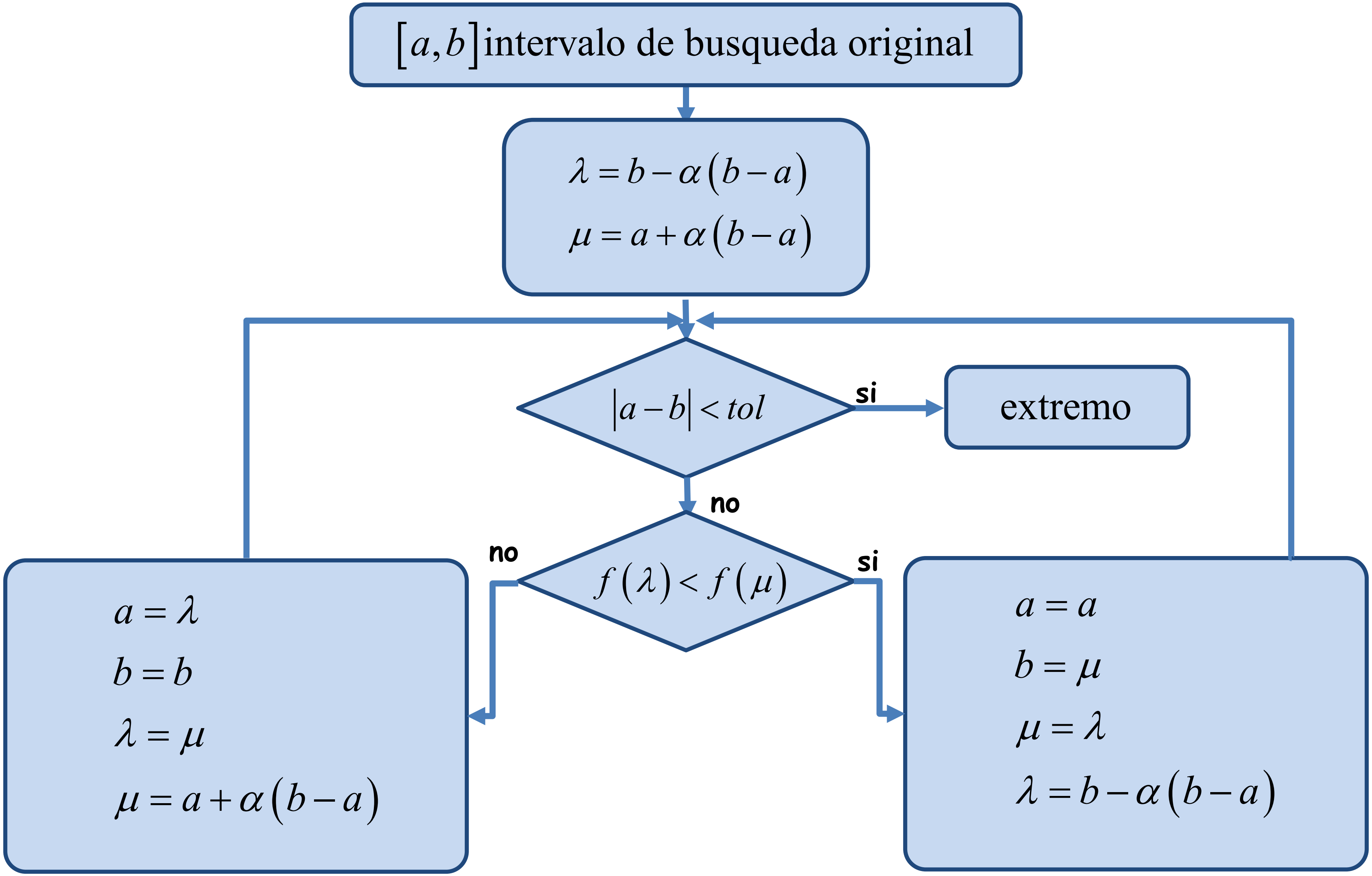
$$b_1 = b_0$$

$$\lambda_1 = \mu_0$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$$



Método de la relación dorada (minimizar)



Método de la relación dorada

a $\quad k=0 \quad$ b $\quad (b-a)$

$k=1 \quad (b-a)\alpha$

$k=2 \quad (b-a)\alpha\alpha$

$i=3 \quad (b-a)\alpha\alpha\alpha$

El tamaño del intervalo siempre se reduce en la misma proporción
¿Cuál es el tamaño del intervalo en la iteración k ?

$$\boxed{(b-a)\alpha^k}$$

Método de la relación dorada

La relación del tamaño del intervalo con el número de iteración nos sirve para conocer de antemano cuantas iteraciones debemos realizar.

Es decir, en la iteración *N* el tamaño del intervalo debe ser igual a la tolerancia deseada.

$$tol = (b - a)\alpha^N$$

Método de la Bisección

Ejemplo:

Encontrar el numero de iteraciones necesarias comenzando en el intervalo [5 6] adoptando una tolerancia de *tol=10⁻⁵*.

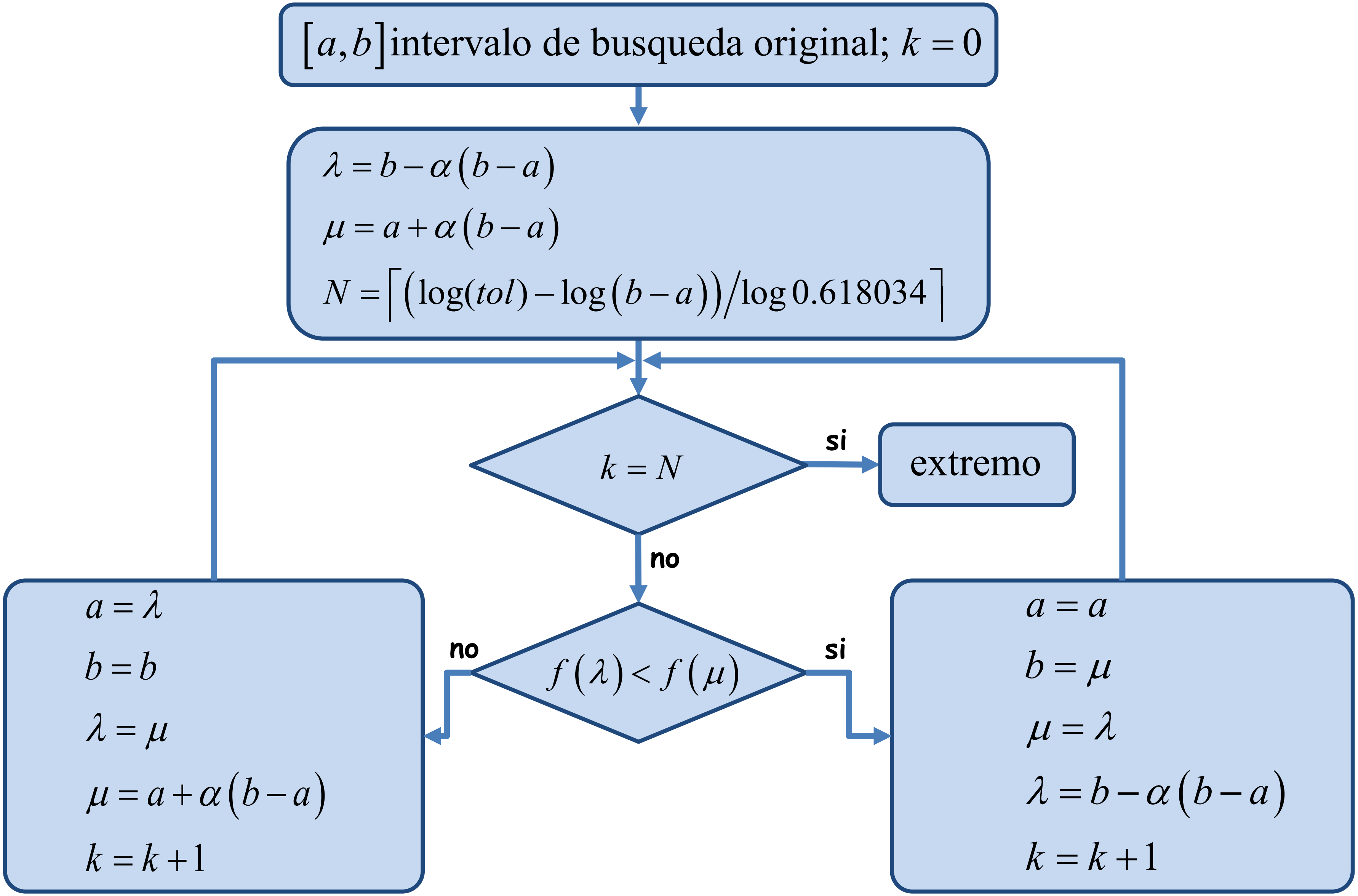
$$tol = (b-a)\alpha^N \Rightarrow 10^{-5} = (b-a)\alpha^N$$

$$-5 = \log_{10}(6-5) + N\log_{10}\alpha$$

$$N = \frac{-5-\log_{10}(6-5)}{\log_{10}0.618034} \quad \Rightarrow N = 23.9248\ldots$$

$$(24\,\text{iteraciones})$$

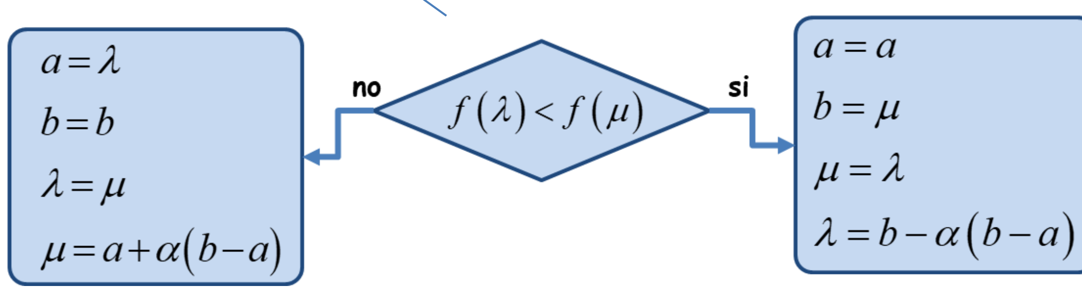
Método de la relación dorada (minimizar)



Método de la relación dorada (SciLab)

```
function xopt=mingoldenratio(fun, a, b, tol)
   alfa = 2/(sqrt(5)+1);
   l = b - alfa*(b-a);
   m = a + alfa*(b-a);
   fl = fun(l);
   fm = fun(m);
   N = ceil((log(tol)-log(b-a))/log(alfa));
   for k= 1:N
      if fl < fm
         b=m;  m=l;  l = b - alfa*(b-a);
         fm=fl; fl=fun(l);
      else
         a=l;  l=m; m = a + alfa*(b-a);
         fl=fm;  fm=fun(m);
      end
   end
   if fl < fm
      xopt=l
   else
      xopt=m

   end
endfunction
```



Método de interpolación parabólica sucesivas

Ejemplo: $\min \quad \frac{x^2}{10} - 2sen(x)$

a	λ	μ	b	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
0			4		

Método de interpolación parabólica sucesivas

Ejemplo: $\min \quad \frac{x^2}{10} - 2sen(x)$

a	λ	μ	b	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
0			4		

Método de interpolación parabólica sucesivas

Ejemplo: $$\min \quad \frac{x^2}{10} - 2sen(x)$$

a	λ	μ	b	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
0	1.528	2.472	4	-1.76469035	-0.6302549
0	0.944304	1.528	2.472	-1.53100712	-1.76469035
0.944304	1.528	1.88842013	2.472	-1.76469035	-1.54334736
0.944304	1.30495636	1.528	1.88842013	-1.75945322	-1.76469035
1.30495636	1.528	1.66553697	1.88842013	-1.76469035	-1.71362958
1.30495636	1.44269815	1.528	1.66553697	-1.77547549	-1.76469035

Plantear Caso de Maximización

Método de la relación dorada

Ejemplo: $max \quad 2sen(x) - \frac{x^2}{10}$

a	λ	μ	b	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
0			4		