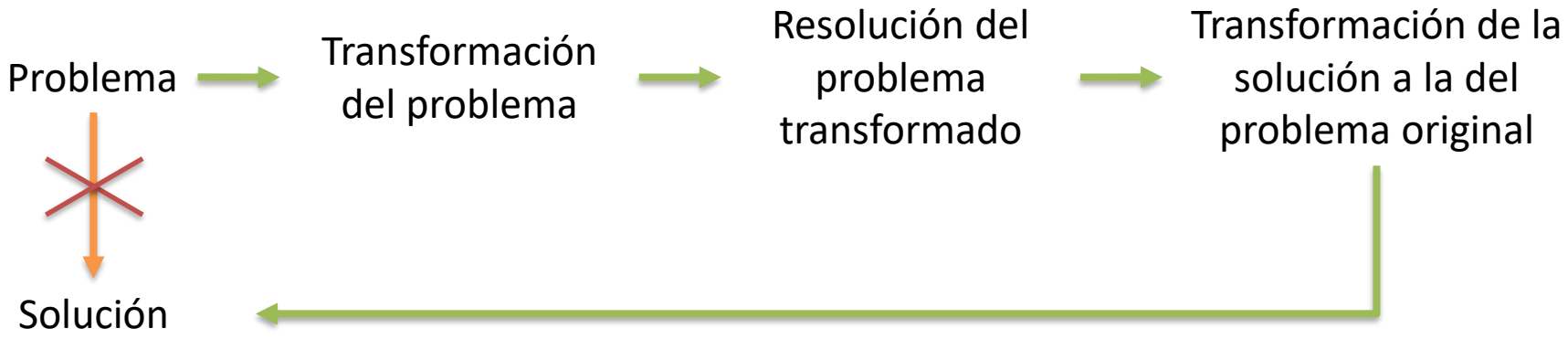
Introducción a la Transformada de Laplace

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

Introducción: Transformadas

- En matemáticas se llama **transformar** al mecanismo que convierte un problema de un tipo a otro, este último presumiblemente más fácil de resolver.
- El modo de hacerlo es resolver primero el problema transformado, para después transformar de regreso y obtener la solución del problema original.



- Las funciones que realizan estas transformaciones se conocen como "**transformadas**".

Introducción: Transformadas integrales

Dada una función ***f(t)*** integrable en el intervalo $[t_1\ t_2]$ se puede definir una nueva función ***F(s)*** según:

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(s,t)\, dt$$

Donde ***K(s,t)*** es una función integrable en la variable ***t***.

Como se define a partir de una integral, este tipo de transformación se conoce como ***transformación integral*** de la función *f(t)*.

$$F(s) = T\left(f(t)\right)$$

Introducción: Transformadas integrales

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(s,t)\, dt$$

Transformada de la función f

Núcleo integral

Normalmente la transformada integral se puede invertir por medio de una **transformada inversa:**

$$f(t) = \int_{s_1}^{s_2} F(s) K^{-1}(s,t)\, ds$$

$$f(t) = T^{-1}\left(F(s)\right)$$

*Nota: El -1 corresponde a la condición de función inversa **NO** a una potencia.*

Introducción: Transformadas integrales

Al estar definidas a partir de una integración, las transformadas integrales son transformaciones lineales.

$$h(t) = a\, f(t)$$

$$T\left(h(t)\right) = H(s) = \int_{t_1}^{t_2} h(t)\, K(s,t)\, dt \;\; = \int_{t_1}^{t_2} a\, f(t)\, K(s,t)\, dt$$

$$H(s) = a \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, K(s,t)\, dt \;\; = aF(s)$$

$$h(t) = a\, f(t) + b\, g(t) \;\; \Rightarrow H(s) = a\, F(s) + b\, G(s)$$

Transformadas integrales: Ejemplos

Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-ist}dt$$

Transformada de Hilbert:

$$\mathcal{H}il\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)\frac{1}{\pi}\frac{1}{s-t}dt$$

Transformada de Mellin:

$$\mathcal{M}\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\int_{0}^{\infty}f\left(t\right)t^{s-1}dt$$

Transformada de Laplace

En el análisis de la dinámica de procesos, las variables son funciones del tiempo. La transformada de Laplace de una función del tiempo *f(t)*, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right) = F\left(s\right) = \int_0^\infty f\left(t\right) e^{-st} dt$$

para todo *s* tal que esta integral converja.

F(s) : Transformada de Laplace de la función *f(t)*
s : variable de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace transforma a la función del tiempo (t) en una función de la variable de la transformada de Laplace (s).

Transformada de Laplace: Ejemplo

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = 1 \rightarrow \mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_0^{\infty} 1\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-st}\, dt$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{k} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} - \left(-\frac{1}{s} e^{-s0} \right) \right)$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} + \frac{1}{s} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} \right) + \frac{1}{s}$$

= 0; siempre que s>0

$$F(s) = \frac{1}{s} \qquad s > 0$$

La transformada de Laplace de *f(t) = 1* es *F(s) = 1/s*, definida por *s > 0*.

Transformada de Laplace: Ejemplo II

$$f(t) = e^{at} \rightarrow \mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\, dt$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^k \right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} - \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)0} \right) \right)$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} \right) - \frac{1}{a-s}$$

= 0; siempre que s>a

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = 1/(a-s)$, definida por $s > a$.

Transformada de Laplace

- No es habitual calcular una transformada de Laplace a partir de su definición, es decir, resolviendo la integral.
- Para realizar transformaciones se cuenta con tablas de transformadas de Laplace para funciones de uso frecuente.
- También, aprovechando las propiedades de las transformadas se pueden separar las funciones en varios términos y realizar la transformación términos individuales.

Transformada de Laplace: Funciones habituales

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) \longrightarrow \mathcal{L}\left(f(t)\right)$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\left(f(t)\right)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

VER TABLA

Transformada de Laplace: Fórmulas operacionales

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

VER TABLA

De gran interés para la resolución de EDOs

Transformada Inversa de Laplace

Dada una función G y una función g tal que

$$G(s) = \mathcal{L}\left(g(t)\right)$$

g se conoce como **transformada inversa de Laplace** de G.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\alpha F(s) + \beta G(s)\right) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Cumple la propiedad de linealidad

Ahora se debe leer la tabla de manera inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

VER TABLA

Ejemplo: Obtener la transformada de Laplace

$$f(t) = \cos(t) - sen(t)$$

$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

de Tabla

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos(t)] - \mathcal{L}[sen(t)]$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{s-1}{s^2+1}$$

Ejemplo: Obtener la inversa de la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{-2}{s+16}$$

e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

de Tabla

$$F(s) = -2\frac{1}{s-(-16)}$$

a

$$f(t) = -2e^{-16t}$$

Primer teorema de corrimiento

Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > b \geq 0$. Sea a cualquier número, entonces

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a) \quad \text{para } s > a + b$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1} \rightarrow \mathcal{L}\left[e^{2t}\cos(t)\right] = \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$$

Primer teorema de corrimiento

Por otro lado, si

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at} f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

Primer teorema de corrimiento

Ejemplo II:

$$F(s)=\frac{6}{(s-7)^4}$$

$$g(t)=t^3 \qquad G(s)=\frac{6}{s^4}$$ de tabla

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

$$F(s)=G(s-7)$$

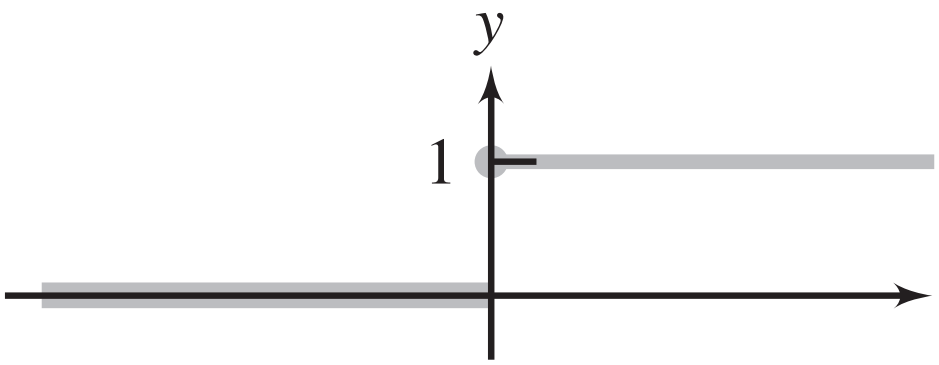
$$f(t)=e^{7t}t^3$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=e^{7t}\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]$$

Función de Heaviside

La función de Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ 1 \ si \ t \geq 0 \end{cases}$$



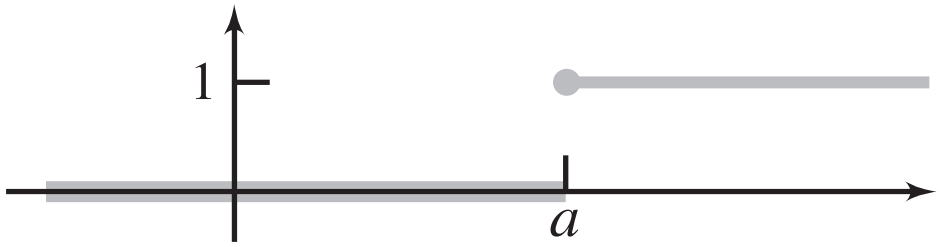
función “ON” “OFF”

Oliver Heaviside (1850-1925) fue un ingeniero electricista inglés que hizo mucho por introducir la transformada de Laplace en la práctica ingenieril.

Función de Heaviside

Si a es cualquier número, entonces $H(t-a)$ es la función de Heaviside corrida a unidades a la derecha.

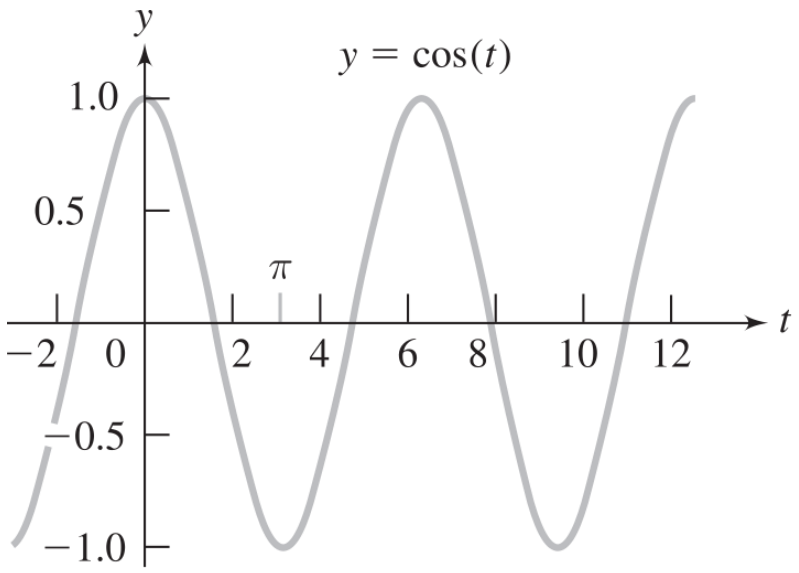
$$H(t-a) = \begin{cases} 0 \ si \ t < a \\ 1 \ si \ t \geq a \end{cases}$$

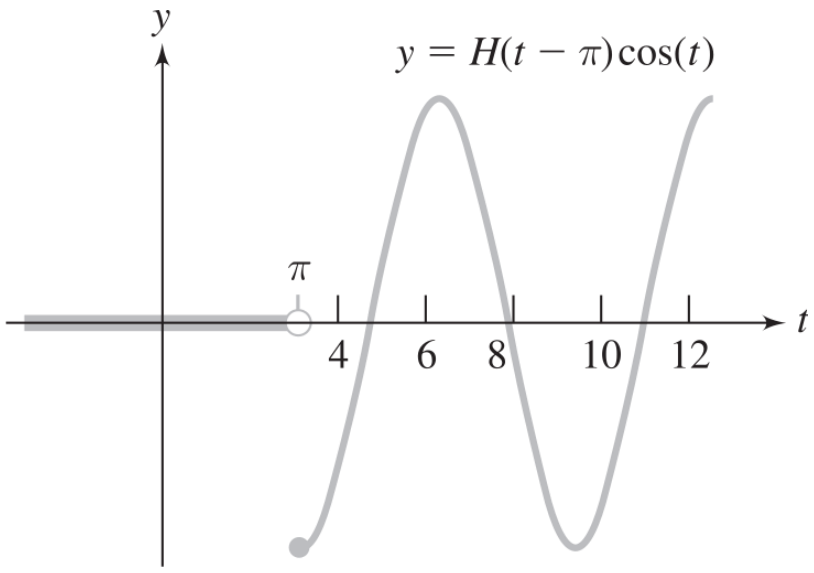


Función de Heaviside

Se puede usar $H(t-a)$ para lograr el efecto de mantener una función g apagada hasta el tiempo $t=a$ y en dicho tiempo prenderla.

$$H(t-a)\,g(t)=\begin{cases}0 \ si \ t<a\\ g(t) \ si \ t\geq a\end{cases}$$





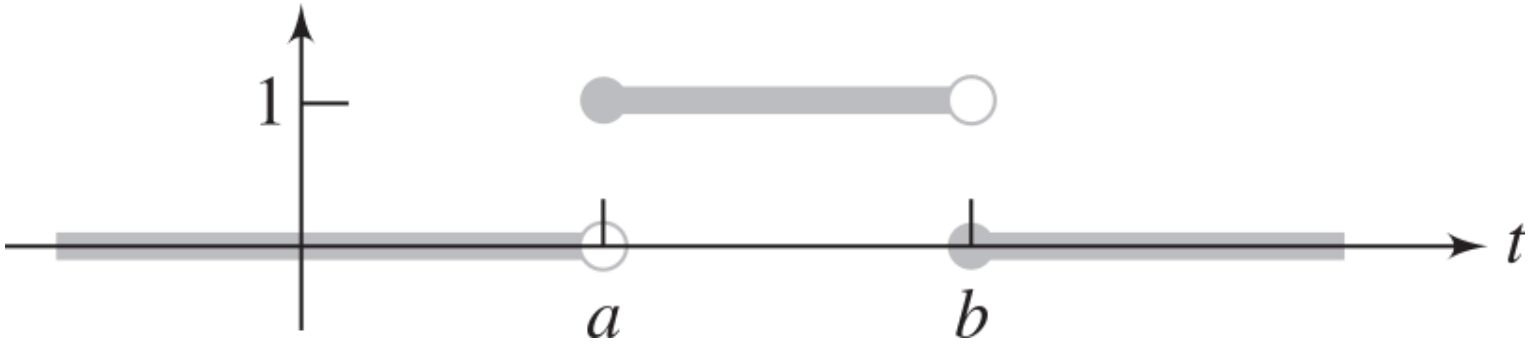
Comparación de $y=\cos(t)$ *y* $y=H(t-\pi)\cos(t)$.

Función de Heaviside

La función de Heaviside también sirve para describir un pulso (plano):

$$k\left[H\left(t-a\right)-H\left(t-b\right)\right]$$

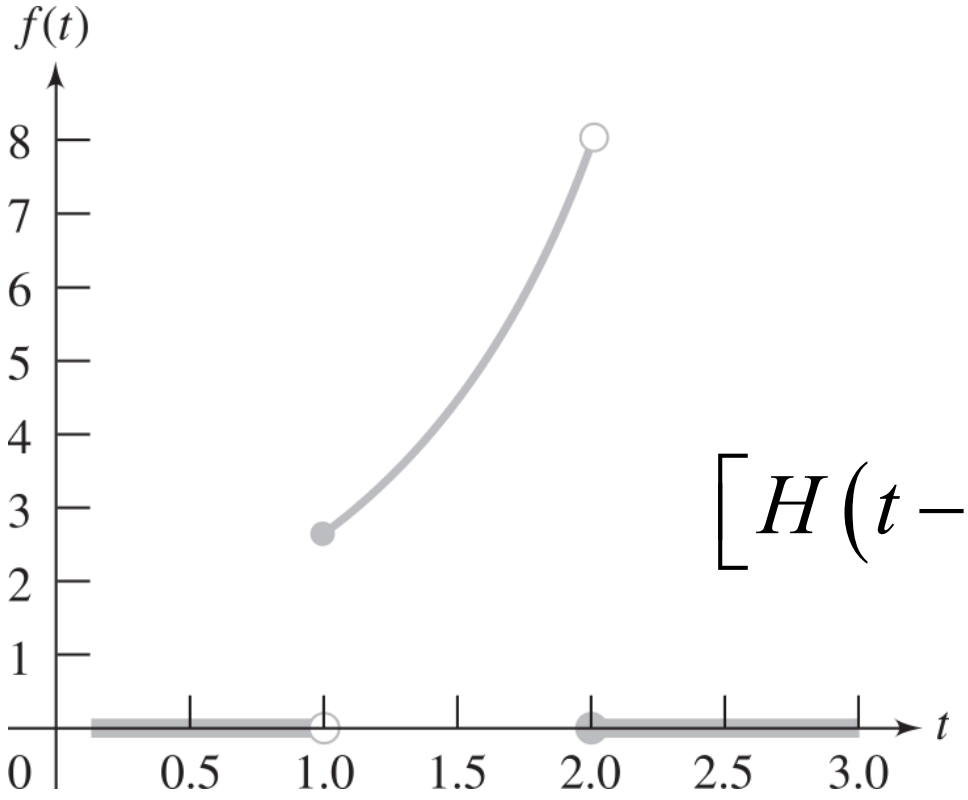
en donde $a < b$ y k es un número real distinto de cero



Función de Heaviside

La función de Heaviside también sirve para describir un pulso de una función:

$$\left[H\left(t-a\right)-H\left(t-b\right)\right]f\left(t\right)$$

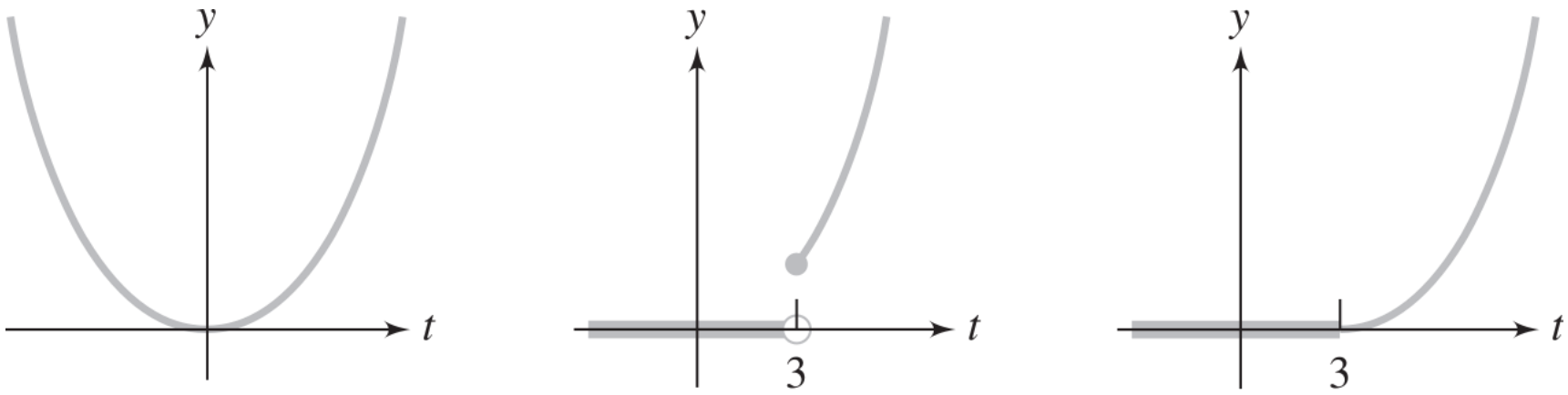


$$\left[H\left(t-1\right)-H\left(t-2\right)\right]e^{t}$$

Función de Heaviside

También se puede usar $H(t-a)$ para lograr el efecto de correr una función g hasta el tiempo $t=a$.

$$H(t-a)\,g(t-a)=\begin{cases}0 \ si \ t<a\\ g(t-a) \ si \ t\geq a\end{cases}$$



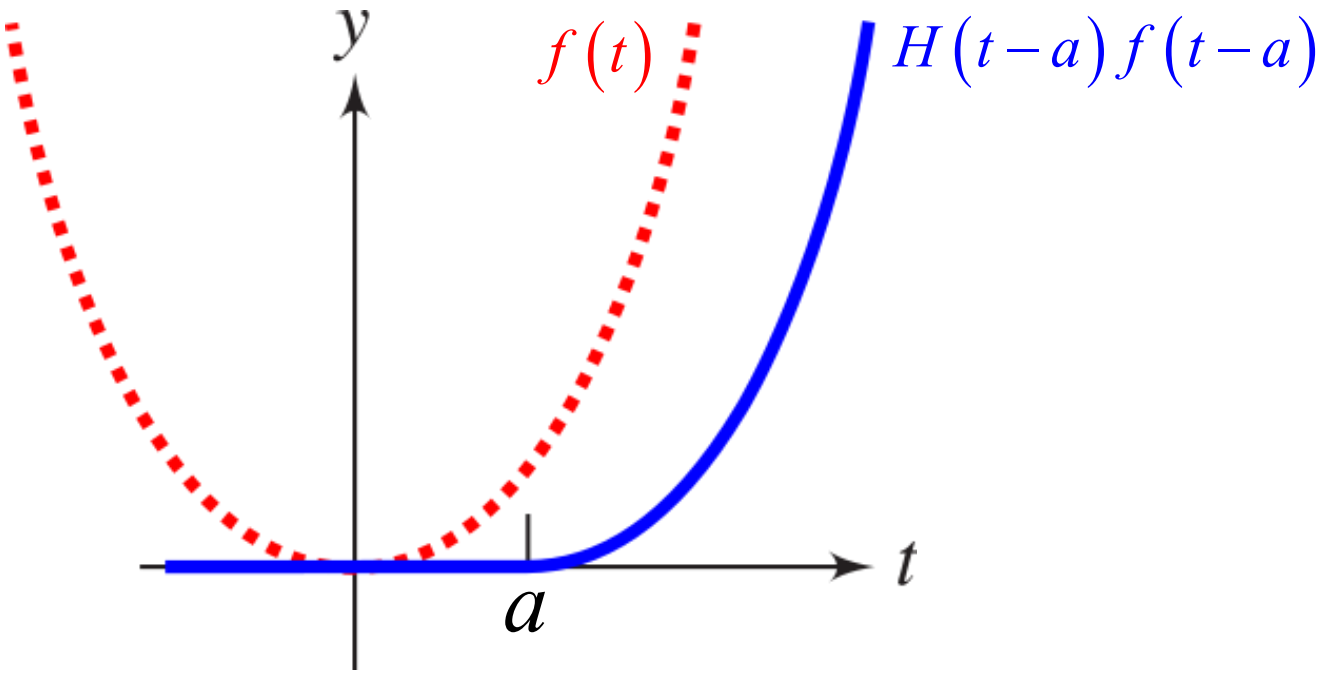
Comparación de $y=t^2$, $y=t^2H(t-3)$, *y* $y=(t-3)^2H(t-3)$.

Segundo teorema de corrimiento

Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > b$. Entonces,

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)\,f(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$$

para $s>b$



Segundo teorema de corrimiento

Demostración:

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right]=\int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt$$

$$=\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \xrightarrow{w=t-a} =\int_0^\infty f(w)e^{-s(w+a)}dw$$

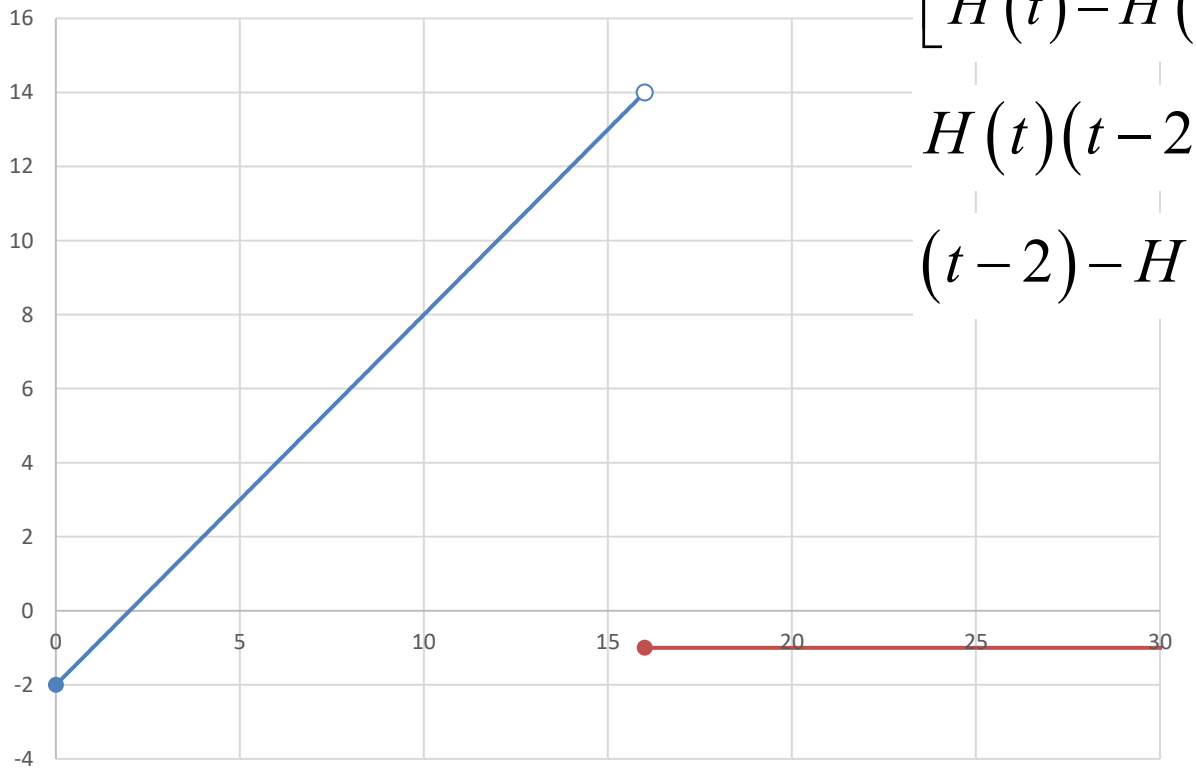
$$=\int_0^\infty f(w)e^{-ws}e^{-as}dw = e^{-as}\int_0^\infty f(w)e^{-ws}dw$$

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

Segundo teorema de corrimiento

Ejemplo:

$$f(t)=\begin{cases} t-2 & para\ \ 0\le t<16 \\ -1 & para\ \ t\ge 16 \end{cases}$$



$$\left[H(t)-H(t-16)\right](t-2)-H(t-16)$$

$$H(t)(t-2)-H(t-16)(t-1)$$

$$(t-2)-H(t-16)(t-1)$$

Segundo teorema de corrimiento

Ejemplo: $f(t)=\begin{cases} t-2 & para\ 0\le t<16 \\ -1 & para\ t\ge 16 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

Segundo teorema de corrimiento

$$f(t)=(t-2)-H(t-16)(t-1)$$

$$f(t)=(t-2)-H(t-16)(t-16+15)$$

$$f(t)=t-2-H(t-16)(t-16)-15H(t-16)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}-e^{-16s}\frac{1}{s^2}-\frac{15}{s}e^{-16s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}-e^{-16s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{15}{s}\right)$$

Segundo teorema de corrimiento

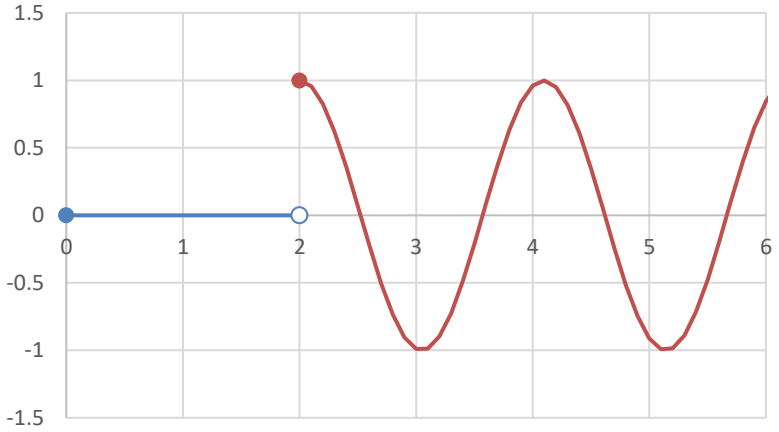
Ejemplo:

$$F(s)=\frac{se^{-2s}}{s^2+9} \rightarrow F(s)=e^{-2s}\frac{s}{s^2+9}$$

$$G(s)=\frac{s}{s^2+9} \rightarrow g(t)=\cos(3t)$$

$$f(t)=H(t-2)\cos\left(3(t-2)\right)$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & para\ 0\le t<2\\ \cos(3t-6) & para\ t\ge 2\end{cases}$$



Resumen

Definición:

$$\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)=\int_0^{\infty} f\left(t\right)e^{-st}dt \qquad F\left(s\right)=\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$$

$$f\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)$$

Linealidad

$$h\left(t\right)=a\,f\left(t\right)+b\,g\left(t\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} H\left(s\right)=a\,F\left(s\right)+b\,G\left(s\right)$$

$$H\left(s\right)=a\,F\left(s\right)+b\,G\left(s\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h\left(t\right)=a\,f\left(t\right)+b\,g\left(t\right)$$

Uso de tablas

$f\left(t\right)$	$\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$
1	$\frac{1}{s}$

$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)$	$F\left(s\right)$
1	$\frac{1}{s}$

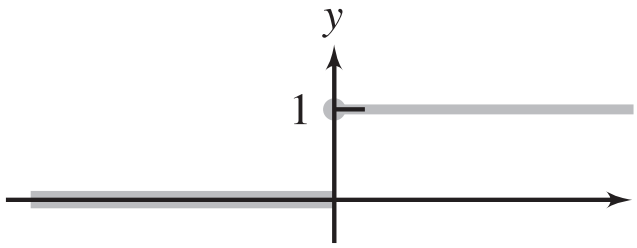
Resumen

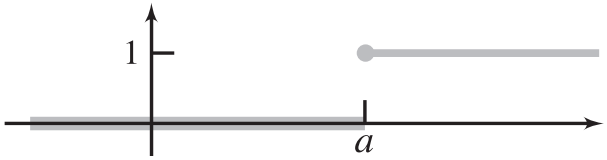
Teoremas del corrimiento

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

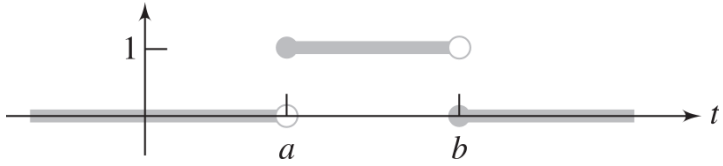
$$\mathcal{L}\left[H(t-a)\, f(t-a)\right] = e^{-as} F(s)$$

Heaviside $H(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ 1 \ si \ t \geq 0 \end{cases}$

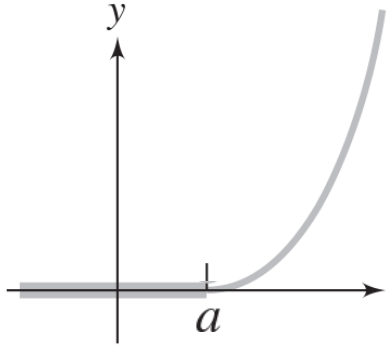




$H(t-a)$



$\left[H(t-a) - H(t-b)\right]$



$H(t-a)\, g(t-a)$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo:

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}$$

Debemos llevarlo a expresiones disponibles en la tabla

Descomposición en fracciones simples

Wiki: El método de descomposición en fracciones simples consiste en **descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado**.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad gr\left[P(x)\right] < gr\left[Q(x)\right]$$

El **grado** del polinomio del numerador tiene que ser estrictamente menor que el del denominador.

Para reducir la expresión a fracciones parciales se debe expresar el denominador como el producto de factores **lineales** o **cuadráticos**.

Caso 1: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)\ldots(a_k x + b_k)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_k x + b_k}$$

Hay que calcularlas

Descomponer: $\dfrac{7x+3}{x^2+3x-4} \rightarrow \dfrac{7x+3}{(x+4)(x-1)}$

Caso 2: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x+b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

Hay que calcularlas

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$$

Descomponer: $\dfrac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$

Caso 3: El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, ninguno de los cuales se repite.
Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde, $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Hay que calcularlas

Descomponer: $\dfrac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} \rightarrow \dfrac{4x^2 - 8x + 1}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)}$

Caso 4: El denominador $Q(x)$ contiene un factor irreductible repetido.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

Hay que calcularlas

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \ldots + \frac{A_kx + B_k}{\left(ax^2 + bx + c\right)^k}$$

Descomponer: $$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x\left(x^2 + 1\right)^2}$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo:

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3)} = \frac{A(s+3)+B(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

$$3s+5 = A(s+3)+B(s+1) = As+3A+Bs+B = s(A+B)+(3A+B)$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 3A+B=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+3)} \quad \rightarrow f(t) = e^{-t} + 2e^{-3t}$$

Convolución

- En general la transformada de Laplace del producto de dos funciones no es el producto de sus transformadas.

$$\mathcal{L}\left[f(t)g(t)\right] = F(s)G(s)$$

- Existe un tipo especial de producto, denotado por $f * g$, llamado la convolución de f con g.
- La transformada de $f * g$ es el producto de las transformadas de f y g. Este hecho se llama el *teorema de convolución*.

Convolución

Si f y g están definidas en $[0, \infty)$, entonces la convolución $f * g$ de f con g es la función definida por:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \qquad para\ t \geq 0$$

Si $f * g$ está definida, entonces:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g] \quad \rightarrow \mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)\,G(s)$$

Además:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)\,G(s)] = (f * g)(t)$$

Convolución

$$H(s)=\frac{1}{s(s-4)^2} \rightarrow H(s)=F(s)G(s)$$

$$F(s)=\frac{1}{s}\ \ G(s)=\frac{1}{(s-4)^2} \rightarrow f(t)=1\ \ g(t)=te^{4t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]=(f*g)(t) \rightarrow (f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$(f*g)(t)=\int_0^t \tau e^{4\tau}d\tau \rightarrow (f*g)(t)=\frac{1}{4}\tau e^{4\tau}\Big|_0^t-\frac{1}{16}e^{4\tau}\Big|_0^t$$

$$(f*g)(t)=\frac{1}{4}te^{4t}-\frac{1}{16}e^{4t}-\frac{1}{16}$$

$$h(t)=\frac{1}{4}te^{4t}-\frac{1}{16}e^{4t}-\frac{1}{16}$$

Convolución

La operación de convolución es conmutativa

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

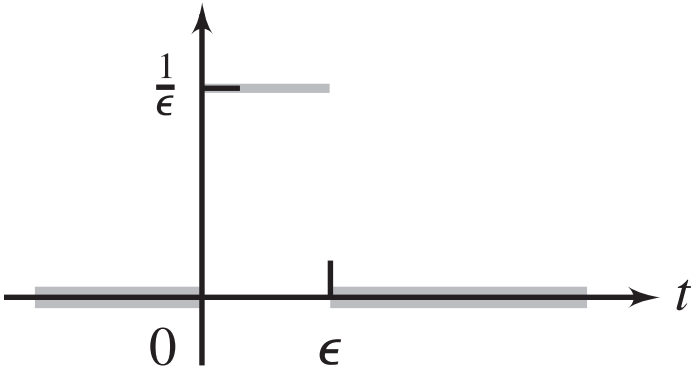
$$\begin{cases} (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \\ (g * f)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

La conmutatividad puede tener una importancia práctica, ya que, en casos específicos, la integral que define a $g * f$ puede ser más fácil de evaluar que la integral que define a $f * g$.

Impulsos unitarios y la función delta de Dirac

Para cualquier número positivo ϵ, considere el pulso δ_ϵ definido por:

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\left[H(t) - H(t-\epsilon)\right]$$



- Como se observa es un pulso plano de magnitud $1/\epsilon$ y duración ϵ.
- El área del pulso es unitaria.
- La función delta de Dirac se interpreta como un pulso de "magnitud infinita" sobre una duración "infinitamente corta" y se define como:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0+} \delta_\epsilon(t) \qquad \delta(t) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; t < 0 \\ \infty \, si \;\; t = 0 \\ 0 \;\; si \;\; t > 0 \end{cases}$$

Impulsos unitarios y la función delta de Dirac

Es posible definir la transformada de Laplace de la función delta de la siguiente manera :

$$\delta_\epsilon(t-a)=\frac{1}{\epsilon}\left[H(t-a)-H(t-a-\epsilon)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\delta_\epsilon(t-a)\right]=\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{1}{s}e^{-as}-\frac{1}{s}e^{-(a+\epsilon)s}\right]=\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{1}{s}e^{-as}-\frac{1}{s}e^{-as}e^{-\epsilon s}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\delta_\epsilon(t-a)\right]=\frac{e^{-as}\left(1-e^{-\epsilon s}\right)}{\epsilon s}$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]=\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{e^{-as}\left(1-e^{-\epsilon s}\right)}{\epsilon s}=e^{-as}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{\left(1-e^{-\epsilon s}\right)}{\epsilon s}$$

L'Hôpital

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]=e^{-as}$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1$$

Propiedad de filtrado de la función delta

Si en el tiempo a, una función es golpeada por un impulso, multiplicándola por $\delta(t-a)$, y la función resultante es sumada sobre todos los tiempos positivos integrándola de cero a infinito, entonces obtiene exactamente el valor de la función $f(a)$.

Sea $a > 0$ y f integrable en $[0, \infty)$ y continua en a. Entonces:

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

Si se aplica la propiedad de filtrado a $f(t) = e^{-st}$, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\delta(t-a)\,dt = e^{-as}$$

Coincide con la transformada de Laplace antes obtenida

Propiedad de filtrado de la función delta

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

Cambiamos la notación

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau = f(t)$$ ¡Convolución!

Por lo tanto: $f * \delta = f$

La función delta actúa como una identidad para el “producto” definido por la convolución de dos funciones.

Transformada de una derivada

La relación entre la transformada de Laplace de una función y la de su derivada corresponde a:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

La transformada de Laplace de la derivada de f es s veces la transformada de Laplace de f en s, menos f en cero

Demostración

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

Vamos a resolver por partes la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

$$\begin{cases} v = f \\ u = e^{-st} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt} \\ \frac{du}{dt} = -se^{-st} \end{cases} \rightarrow \frac{df}{dt}e^{-st} = \frac{dv}{dt}u = \frac{dvu}{dt} - v\frac{du}{dt}$$

$$\int_0^k \left(\frac{dvu}{dt} - v\frac{du}{dt}\right)dt = \int_0^k \frac{dvu}{dt}dt - \int_0^k \left(v\frac{du}{dt}\right)dt = vu\Big|_0^k - \int_0^k \left(v\frac{du}{dt}\right)dt$$

Demostración

$$\int_0^k \left(\frac{dvu}{dt} - v\frac{du}{dt} \right) dt = vu\Big|_0^k - \int_0^k \left(v\frac{du}{dt} \right) dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^k - \int_0^k f(t)\left(-se^{-st} \right) dt$$

$$= \left[f(k)e^{-sk} - f(0) \right] + s\int_0^k f(t)e^{-st}dt$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{df}{dt} e^{-st}dt = \lim_{k\to\infty} \left(\left[f(k)e^{-sk} - f(0) \right] + s\int_0^k f(t)e^{-st}dt \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(f(k)e^{-sk} \right) - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Demostración

Finalmente:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \cancel{\lim_{k\to\infty}\left(f(k)e^{-sk}\right)}^{=0} - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

suponemos que para $k \to \infty$ y $s > 0$ se cumple que $f(k)e^{-sk} \to 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

Generalización

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0) \qquad n = 1$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \qquad n = 2$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^3 f}{dt^3}\right) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \qquad n = 3$$

Transformada de una Integral

La relación entre la transformada de Laplace de una función y la de su integral corresponde a:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

La demostración de esta propiedad también puede realizarse integrando por partes la definición de la transformada de Laplace.

Solución de problemas con valores iniciales usando la transformada de Laplace

- La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver cierto tipo de problemas con valores iniciales.
- La técnica se basa en la propiedad de la transformada de Laplace de una derivada.

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$\frac{dy}{dt} - 4y = 1 \qquad y(0) = 1$$

Es un problema de valor inicial

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt} - 4y\right) = \mathcal{L}(1) \rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) - 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

$$sY(s) - y(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

Y ahora...

$$Y(s)(s-4) - 1 = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)$$

$a = 4$

5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right) = e^{4t}$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)$$

$a = 0$
$b = 4$

8.	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right) = \frac{1}{0-4}\left(e^{0t} - e^{4t}\right) = -\frac{1}{4}\left(1 - e^{4t}\right)$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

Solución en el dominio de Laplace

$$y(t) = -\frac{1}{4}\left(1 - e^{4t}\right) + e^{4t}$$

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}$$

Solución en el dominio temporal

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

- La transformada de Laplace puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones que involucren derivadas e integrales.
- Ejemplo: $x''-2x'+3y'+2y=4$

$$2y'-x'+3y=0$$

$$x(0)=x'(0)=y(0)=0$$

$$s^2X-s\,x(0)-x'(0)-2\left(sX-x(0)\right)+3\left(sY-y(0)\right)+2Y=\frac{4}{s}$$

$$2\left(sY-y(0)\right)-\left(sX-x(0)\right)+3Y=0$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$s^2X - s\,x(0) - x'(0) - 2\left(sX - x(0)\right) + 3\left(sY - y(0)\right) + 2Y = \frac{4}{s}$$

$$2\left(sY - y(0)\right) - \left(sX - x(0)\right) + 3Y = 0$$

$$s^2X - 2sX + 3sY + 2Y = \frac{4}{s} \quad \rightarrow s\left(s-2\right)X + \left(3s+2\right)Y = \frac{4}{s}$$

$$2sY - sX + 3Y = 0 \quad \rightarrow Y = \frac{s}{\left(2s+3\right)}X$$

$$s\left(s-2\right)X + \frac{s\left(3s+2\right)}{\left(2s+3\right)}X = \frac{4}{s}$$

$$\left(\left(s-2\right) + \frac{\left(3s+2\right)}{\left(2s+3\right)}\right)sX = \frac{4}{s}$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$\left((s-2) + \frac{(3s+2)}{(2s+3)} \right) sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{(2s+3)(s-2)+(3s+2)}{(2s+3)} sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^2 - 4s + 3s - 6 + 3s + 2}{(2s+3)} sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^2 + 2s - 4}{(2s+3)} sX = \frac{4}{s}$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$\frac{2s^2+2s-4}{(2s+3)}sX=\frac{4}{s}\rightarrow X=\frac{4(2s+3)}{s^2(2s^2+2s-4)}$$

$$X=\frac{4(2s+3)}{s^2 2(s^2+s-2)}$$

$$Y=\frac{s(4s+6)}{s^2(s^2+s-2)(2s+3)}$$

$$X=\frac{4s+6}{s^2(s^2+s-2)}$$

$$Y=\frac{2s}{s^2(s^2+s-2)}$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$X = \frac{4s+6}{s^2\left(s^2+s-2\right)}$$

Para utilizar la tabla hay que descomponer en fracciones parciales o simples

$$X = \frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)}$$

raíces $\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

Un factor cuadrático y dos lineales distintos

$$X = \frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s-1)}$$

$$\frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)} s^2(s+2)(s-1) = \left(\frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s-1)} \right) s^2(s+2)(s-1)$$

Multiplicamos miembro a miembro por el denominador común

$$\frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)}s^2(s+2)(s-1)=\left(\frac{A_1s+B_1}{s^2}+\frac{A_2}{(s+2)}+\frac{A_3}{(s-1)}\right)s^2(s+2)(s-1)$$

$$4s+6=(A_1s+B_1)(s+2)(s-1)+A_2s^2(s-1)+A_3s^2(s+2)$$

$$4s+6=(A_1s+B_1)(s+2)(s-1)+A_2s^2(s-1)+A_3s^2(s+2)$$

$$4s+6=(A_1s+B_1)(s^2+s-2)+A_2s^3-A_2s^2+A_3s^3+2A_3s^2$$

$$4s+6=A_1s^3+A_1s^2-2A_1s+B_1s^2+B_1s-B_12+A_2s^3-A_2s^2+A_3s^3+2A_3s^2$$

$$4s+6=(A_1+A_2+A_3)s^3+(A_1+B_1-A_2+2A_3)s^2+(-2A_1+B_1)s-B_12$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$4s+6=\left(A_1+A_2+A_3\right)s^3+\left(A_1+B_1-A_2+2A_3\right)s^2+\left(-2A_1+B_1\right)s-B_1 2$$

$$\begin{cases} -B_1 2=6 \\ -2A_1+B_1=4 \\ A_1+B_1-A_2+2A_3=0 \\ A_1+A_2+A_3=0 \end{cases}$$

$$B_1=-3$$

$$A_1=-3.5$$

$$\begin{cases} -3.5-3-A_2+2A_3=0 \\ -3.5+A_2+A_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_2+2A_3=6.5 \\ A_2+A_3=3.5 \end{cases}$$

$$A_2=\frac{1}{6}$$

$$A_3=\frac{10}{3}$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$B_1 = -3$$

$$A_1 = -3.5$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \frac{10}{3}$$

$$X = \frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s-1)}$$

$$X = \frac{-3.5s - 3}{s^2} + \frac{1/6}{(s+2)} + \frac{10/3}{(s-1)}$$

$$X = -3.5\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+2)} + \frac{10}{3}\frac{1}{(s-1)}$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$Y = \frac{2s}{s^2\left(s^2 + s - 2\right)}$$

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{\left(s+2\right)} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(s-1\right)}$$

Solución de la transformada de Laplace de sistemas

$$X = -3.5\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+2)} + \frac{10}{3}\frac{1}{(s-1)}$$

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s-1)}$$

Pasar a dominio temporal

$$x(t) = -3.5 - 3t + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{t} \qquad y(t) = -1 + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$$

Realizar las siguientes transformadas de Laplace

$$f(t) = 1 + 5t + 3t^2$$

$$g(t) = e^{4t}\left(1 + 5t + 3t^2\right)$$

$$p(t) = \underbrace{H(t-2)}_{\text{Heaviside}}\left(1 + 5(t-2) + 3(t-2)^2\right)$$

Realizar las siguientes transformadas inversas de Laplace

$$F(s) = \frac{5}{s+8}$$

$$G(s) = e^{-2s}\,\frac{5}{s+2}\,8$$