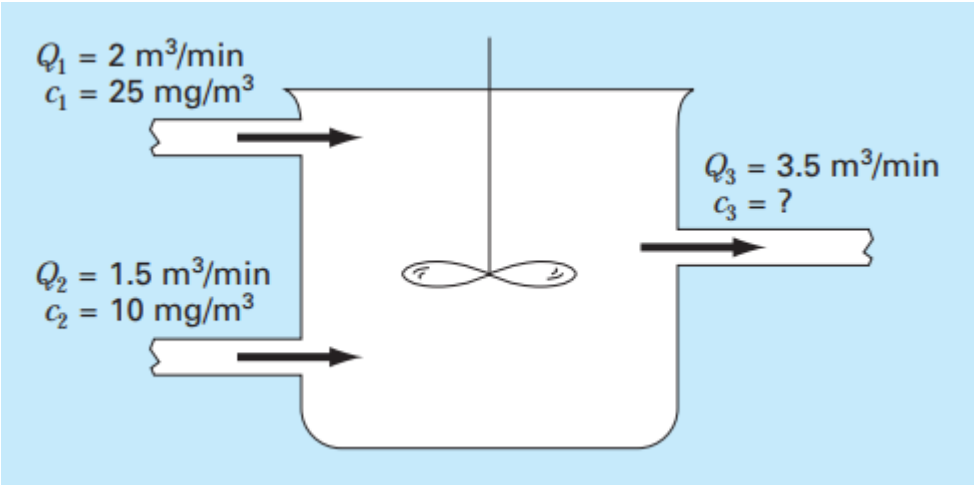
Introducción a la Transformada de Laplace

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

Ejemplo de resolución de una EDO



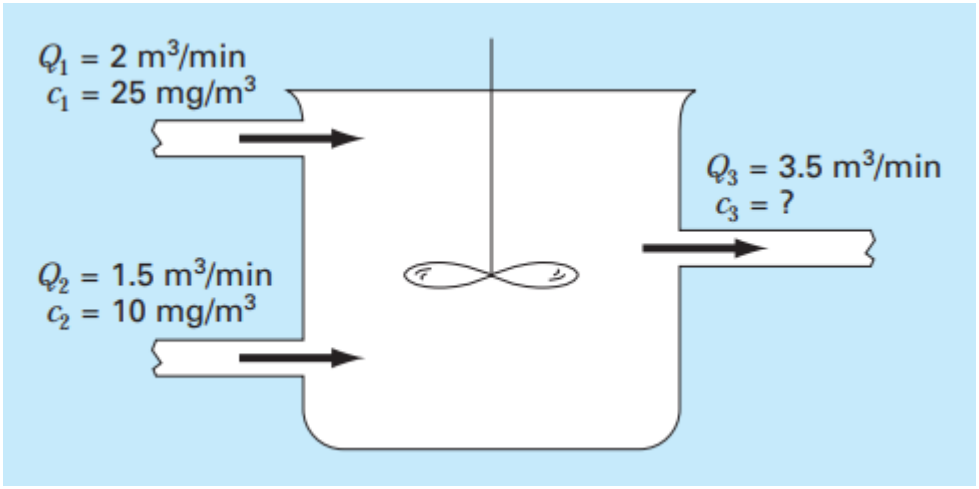
Balance Masa

$$\frac{dM}{dt} = m_1 + m_2 - m_3$$

$$\rho \frac{dV_{liq}}{dt} = \rho Q_1 + \rho Q_2 - \rho Q_3$$

$$\frac{dV_{liq}}{dt} = 0 \rightarrow V_{liq} = \text{constante}$$

Ejemplo de resolución de una EDO



Balance Masa por Componente

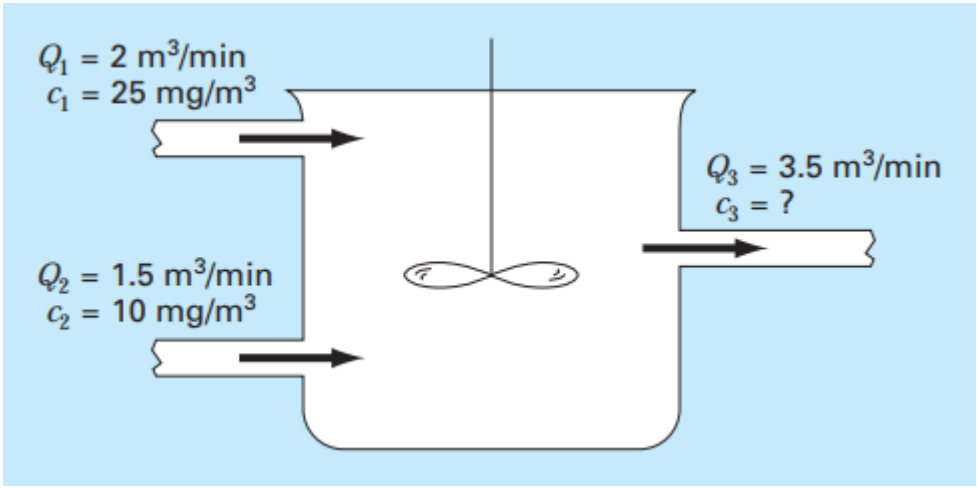
$$\frac{dM_c}{dt} = m_{c,1} + m_{c,2} - m_{c,3}$$

$$M_c = c_3 V_{liq} \rightarrow \frac{dM_c}{dt} = V_{liq}\frac{dc_3}{dt} \qquad m_{c,k} = Q_k c_k$$

$$V_{liq}\frac{dc_3}{dt} = Q_1 c_1 + Q_2 c_2 - Q_3 c_3$$

$$q = \frac{Q}{V_{liq}} \rightarrow \frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

Ejemplo de resolución de una EDO



$$\frac{dc_3}{dt} = q_1c_1 + q_2c_2 - q_3c_3$$

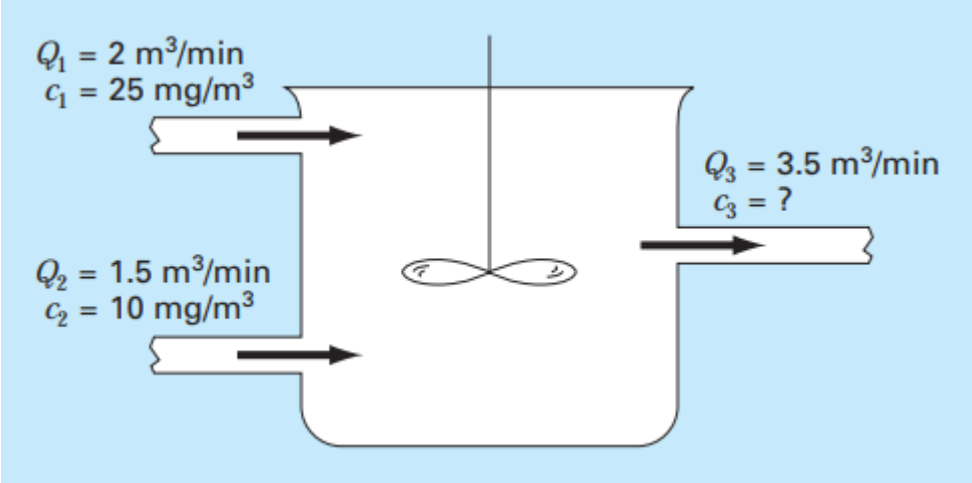
Para analizar el sistema suponemos que $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$

$$sC_3(s) - c_3(0) = q_1C_1(s) + q_2C_2(s) - q_3C_3(s)$$

$$C_3(s)(s + q_3) = q_1C_1(s) + q_2C_2(s) + c_3(0)$$

$$C_3(s) = \frac{q_1C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

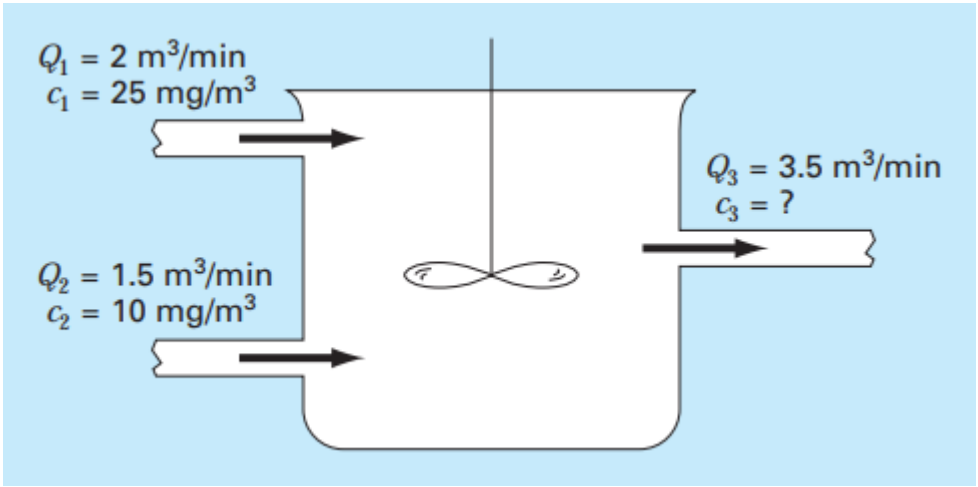
Caso 1:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% (c_2 permanece constante)

$$c_1(t) = 25 + 0.5H(t)$$

$$C_1(s) = \frac{25}{s} + \frac{0.5}{s} = \frac{25.5}{s} \qquad c_2(t) = 10 \rightarrow C_2(s) = \frac{10}{s}$$

Ejemplo de resolución de una EDO



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$V_{liq} = 200m^3$

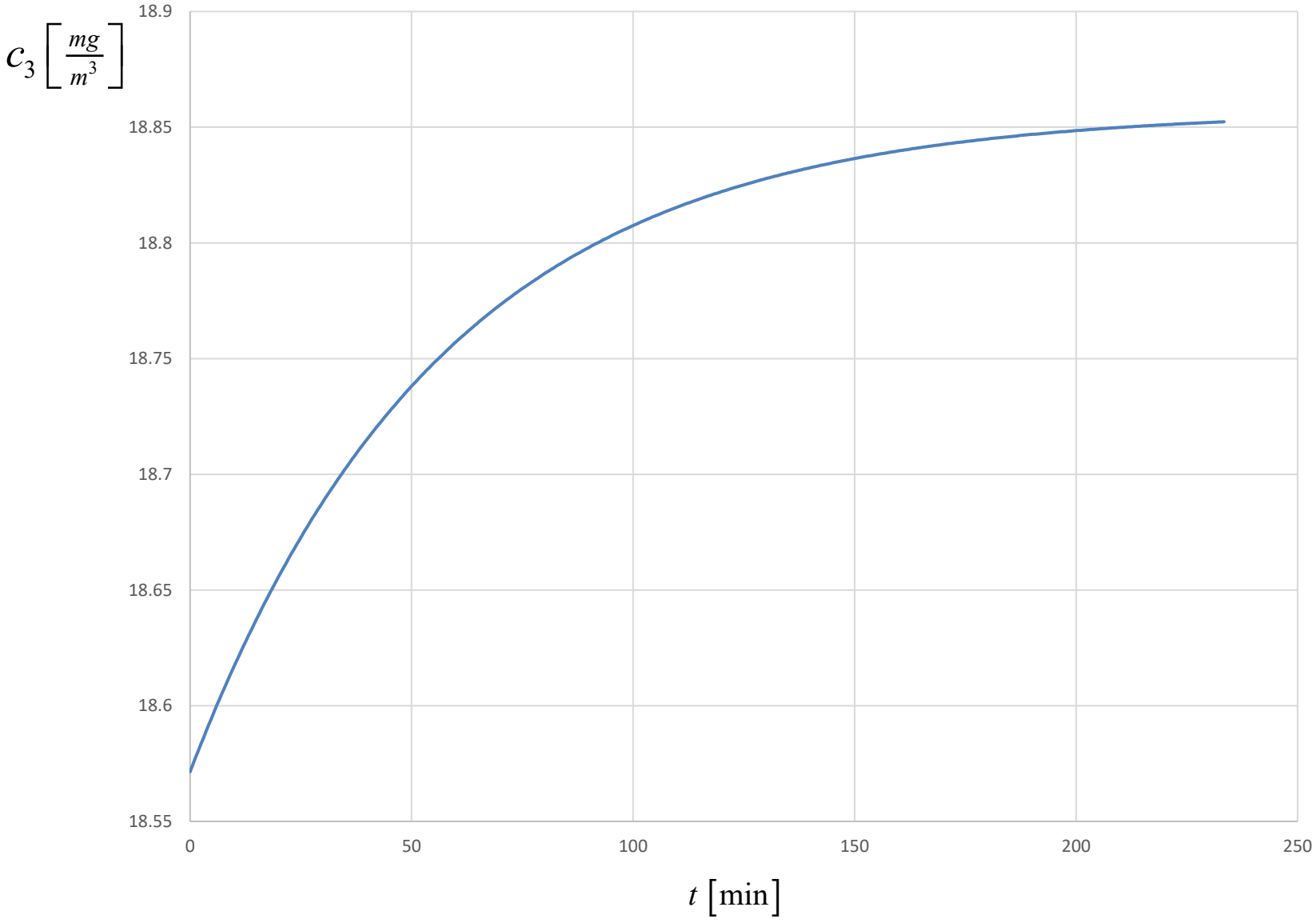
$q_1 = 0.01 \; q_2 = 0.0075 \; q_3 = 0.0175$

$c_3(0) = 18.571429$

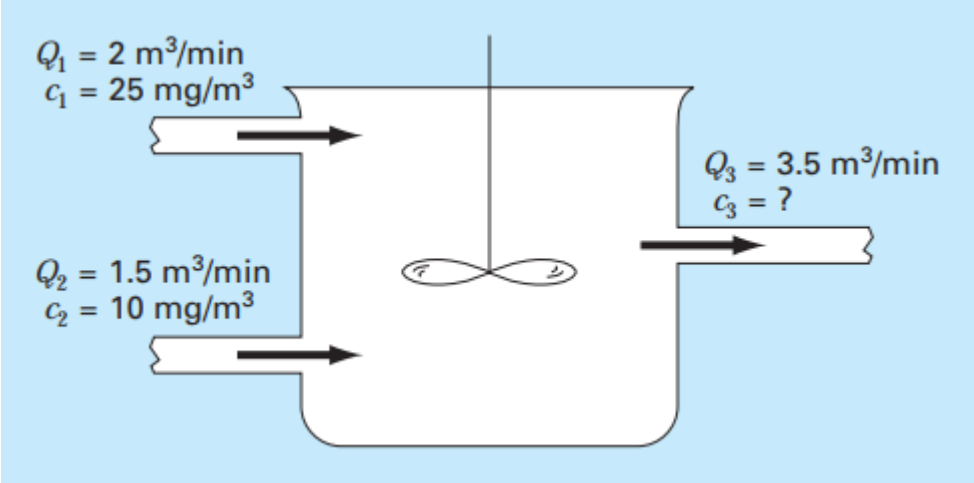
$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s+0.0175)} + \frac{18.571429}{(s+0.0175)}$$

$$c_3(t) = 18.857143\left(1 - e^{-0.0175t}\right) + 18.571429e^{-0.0175t}$$

Ejemplo de resolución de una EDO



Ejemplo de resolución de una EDO



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

Caso 2:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% y luego de 20 minutos vuelve a su estado normal (c_2 permanece constante).

$$c_1(t) = 25 + 0.5\left[H(t) - H(t-20)\right] = 25 + 0.5H(t) - 0.5H(t-20)$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} - e^{-20s}\frac{0.5}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$V_{liq} = 200m^3$

$q_1 = 0.01 \; q_2 = 0.0075 \;\; q_3 = 0.0175$

$c_3(0) = 18.571429$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} - e^{-20s}\,\frac{0.5}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)} - e^{-20s}\,\frac{0.5 q_1}{s(s+q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s+0.0175)} + \frac{18.571429}{(s+0.0175)} - e^{-20s}\,\frac{0.005}{s(s+0.0175)}$$

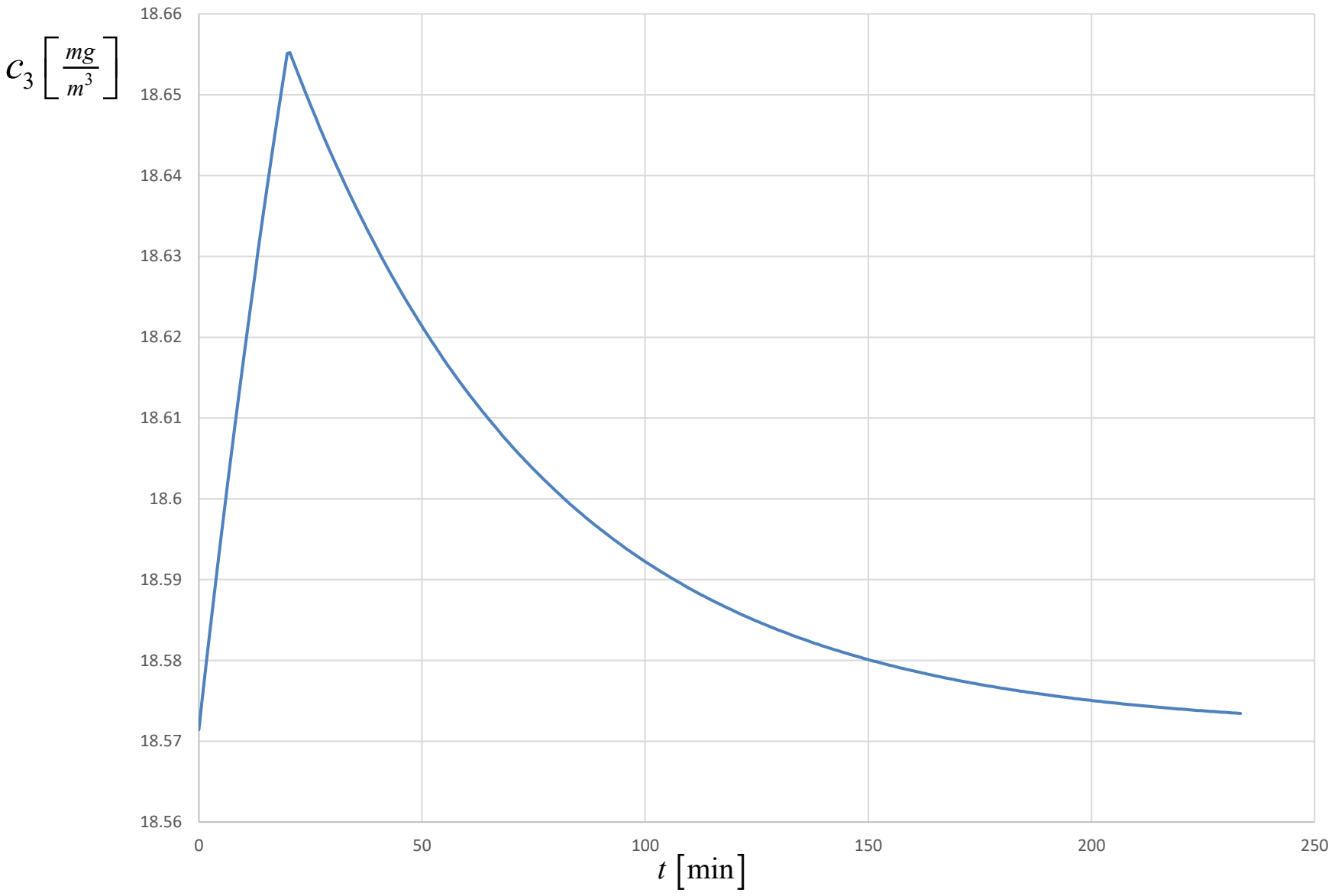
Ejemplo de resolución de una EDO

$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s+0.0175)} + \frac{18.571429}{(s+0.0175)} - e^{-20s}\,\frac{0.005}{s(s+0.0175)}$$

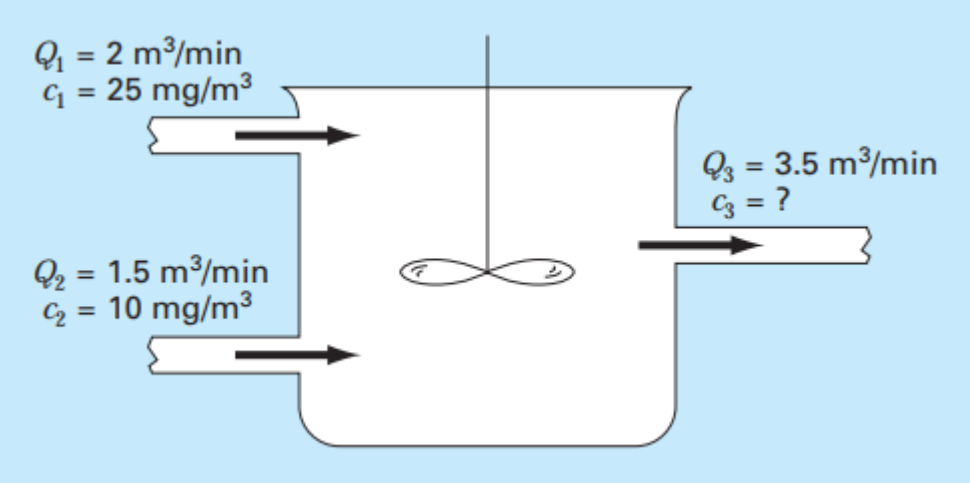
$$c_3(t) = 18.857143\left(1 - e^{-0.0175t}\right) + 18.571429e^{-0.0175t} \ldots$$

$$\ldots - 0.285714\left(1 - e^{-0.0175(t-20)}\right)H(t-20)$$

Ejemplo de resolución de una EDO



Ejemplo de resolución de una EDO



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

Caso 3:

A los 3 minutos se arrojan 5 mg de sustancia al tanque. c_1 y c_2 permanecen constantes.

$$V_{liq}\frac{dc_3}{dt} = Q_1c_1 + Q_2c_2 - Q_3c_3 + M \quad \rightarrow \frac{dc_3}{dt} = q_1c_1 + q_2c_2 - q_3c_3 + m$$

$$sC_3(s) - c_3(0) = q_1C_1(s) + q_2C_2(s) - q_3C_3(s) + M(s)$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$sC_3(s) - c_3(0) = q_1C_1(s) + q_2C_2(s) - q_3C_3(s) + M(s)$$

$$C_3(s) = \frac{q_1C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{M(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$$c_1(t) = 25 \qquad c_2(t) = 10 \qquad m(t) = \frac{5}{200}\delta(t-3)$$

$$C_1(s) = \frac{25}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s} \qquad M(s) = 0.025e^{-3s}$$

$$C_3(s) = \frac{0.01\times 25}{s(s+q_3)} + \frac{0.0075\times 10}{s(s+q_3)} + \frac{0.025e^{-3s}}{(s+q_3)} + \frac{65}{3.5}\frac{1}{(s+q_3)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO

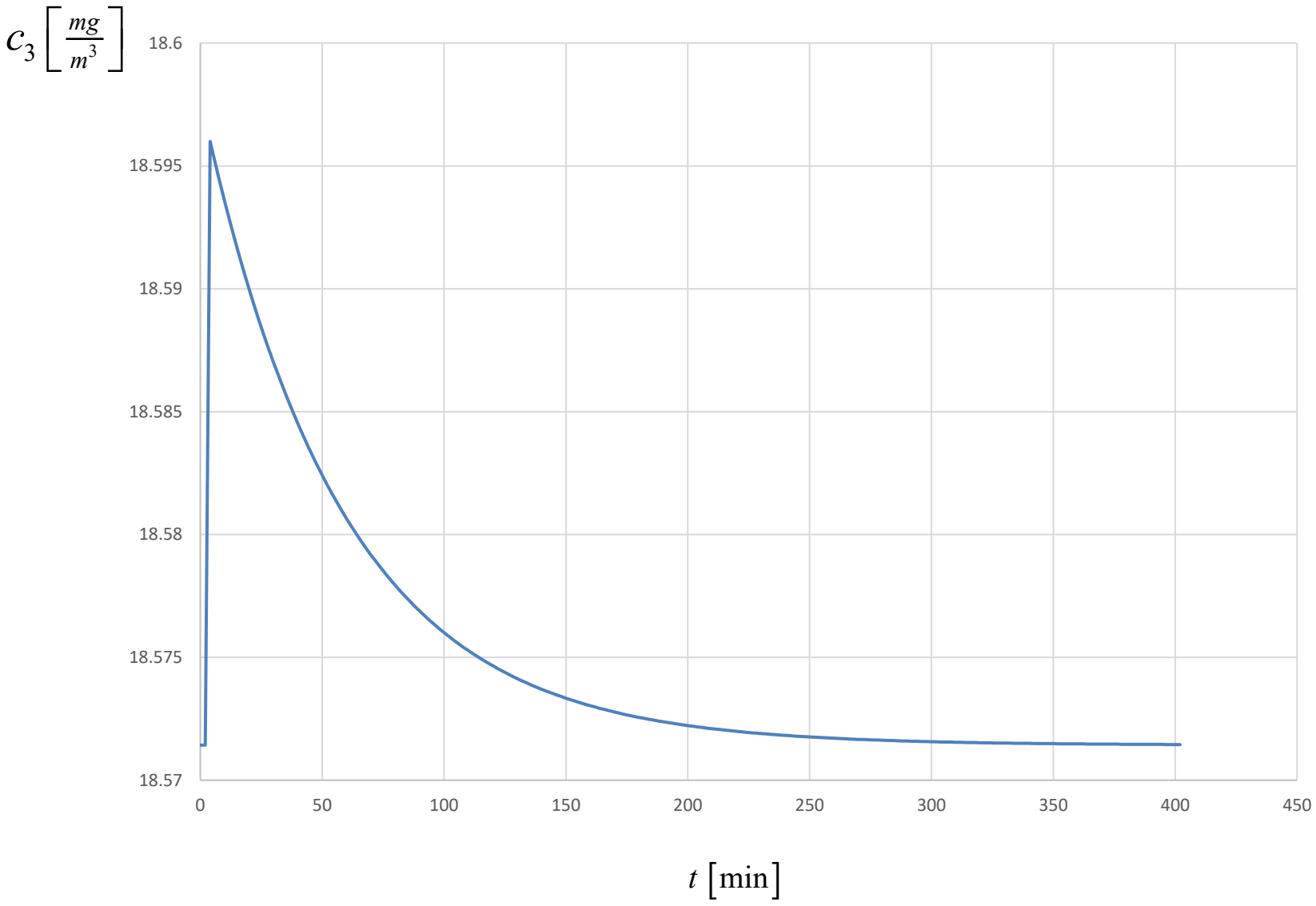
$$C_3(s) = \frac{0.01 \times 25}{s(s+q_3)} + \frac{0.0075 \times 10}{s(s+q_3)} + \frac{0.025e^{-3s}}{(s+q_3)} + \frac{65}{3.5}\frac{1}{(s+q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{0.325}{s(s+q_3)} + \frac{0.025}{(s+q_3)}e^{-3s} + \frac{65}{3.5}\frac{1}{(s+q_3)}$$

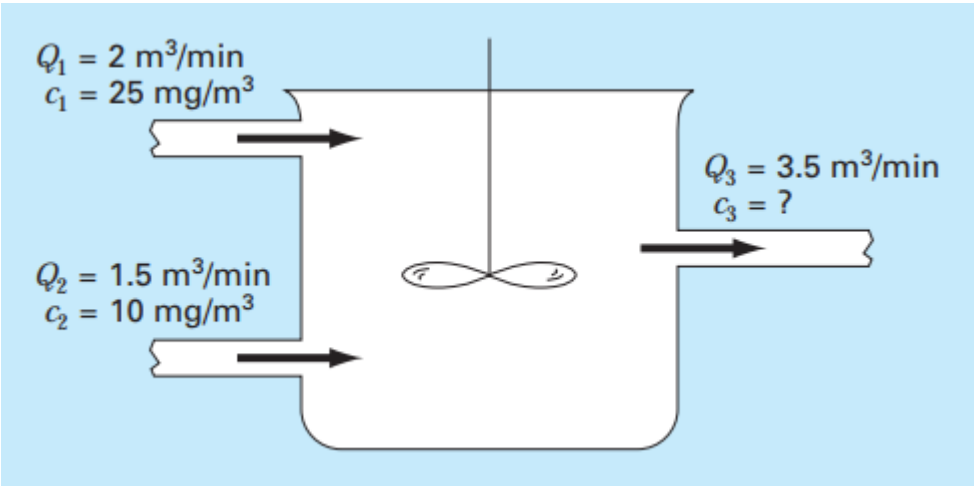
$$c_3(t) = \frac{0.325}{0.0175}\left(1 - e^{-0.0175t}\right) + 0.025e^{-0.0175(t-3)}H(t-3) + \frac{65}{3.5}e^{-0.0175t}$$

$$c_3(t) = \frac{65}{3.5} + 0.025e^{-0.0175(t-3)}H(t-3)$$

Ejemplo de resolución de una EDO



Análisis respecto al EE



$$\tilde{c} = c - c^0$$

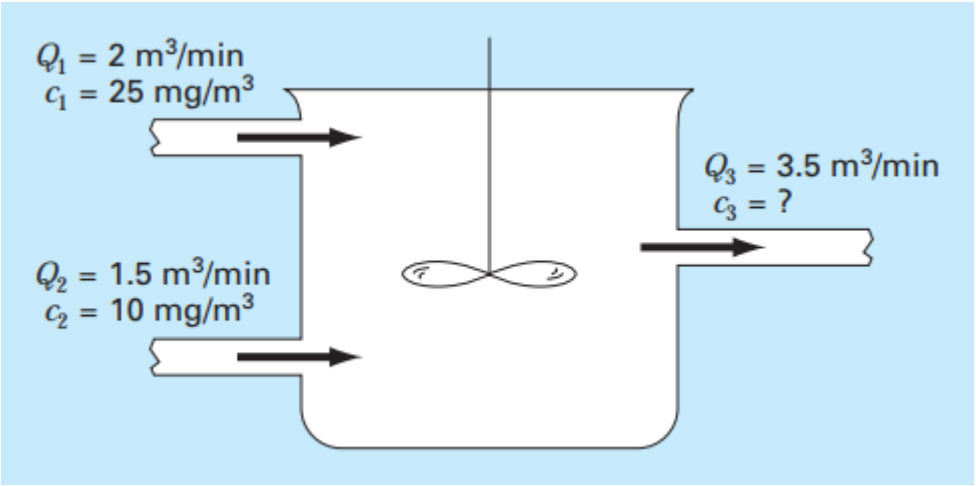
$$\frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1\left(\tilde{c}_1 + c_1^0\right) + q_2\left(\tilde{c}_2 + c_2^0\right) - q_3\left(\tilde{c}_3 + c_3^0\right)$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1\tilde{c}_1 + q_2\tilde{c}_2 - q_3\tilde{c}_3 + q_1 c_1^0 + q_2 c_2^0 - q_3 c_3^0$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1\tilde{c}_1 + q_2\tilde{c}_2 - q_3\tilde{c}_3$$

Análisis respecto al EE



$$\tilde{c} = c - c^0$$

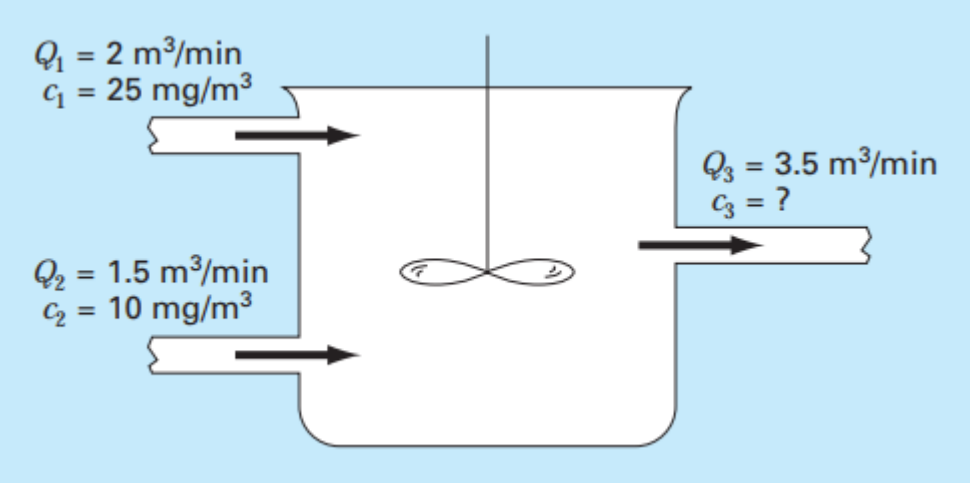
$$\frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1 \tilde{c}_1 + q_2 \tilde{c}_2 - q_3 \tilde{c}_3 \rightarrow s\tilde{C}_3(s) - \tilde{c}_3(0) = q_1 \tilde{C}_1(s) + q_2 \tilde{C}_2(s) - q_3 \tilde{C}_3(s)$$

$$s\tilde{C}_3(s) = q_1 \tilde{C}_1(s) + q_2 \tilde{C}_2(s) - q_3 \tilde{C}_3(s)$$

$$\tilde{C}_3(s) = \frac{q_1 \tilde{C}_1(s)}{(s + q_3)} + \frac{q_2 \tilde{C}_2(s)}{(s + q_3)}$$

Análisis respecto al EE



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

$$\tilde{c} = c - c^0$$

Análisis:

c_2 permanece constante, solo analizaremos variaciones en c_1

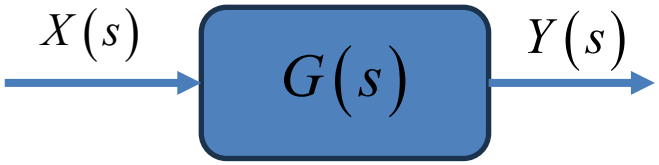
$$\tilde{c}_2 = 0 \quad \rightarrow \tilde{C}_2(s) = 0$$

$$\tilde{C}_3(s) = \frac{q_1\tilde{C}_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2\tilde{C}_2(s)}{(s+q_3)}$$

$$\tilde{C}_3(s) = \frac{q_1\tilde{C}_1(s)}{(s+q_3)}$$

Función de transferencia

La función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

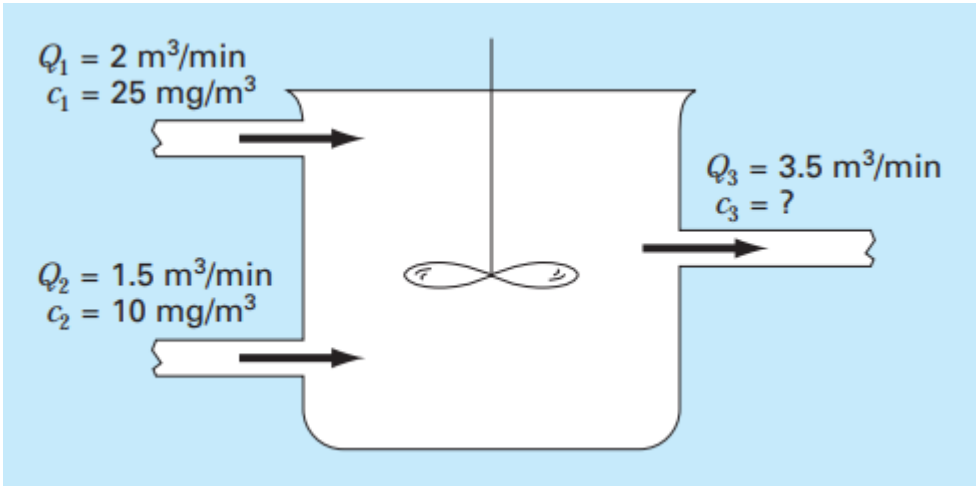


SISO (simple input, simple output)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Función de transferencia



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

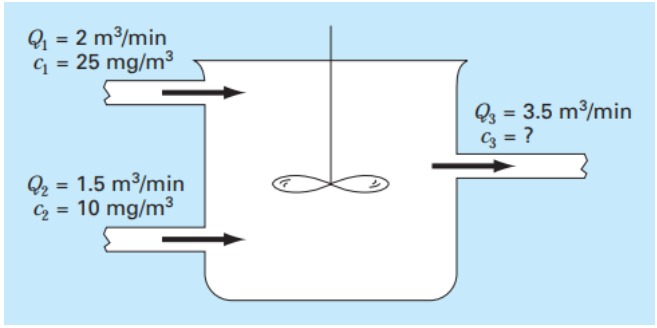
$$\tilde{c} = c - c^0$$

$$\tilde{C}_3(s) = \frac{q_1 \tilde{C}_1(s)}{(s+q_3)} \qquad Y(s) = G(s)X(s)$$

$$\underbrace{\tilde{C}_3(s)}_{Y(s)} = \underbrace{\frac{q_1}{(s+q_3)}}_{G(s)} \underbrace{\tilde{C}_1(s)}_{X(s)}$$

$$G(s) = \frac{q_1}{(s+q_3)}$$

Función de transferencia



$$G(s) = \frac{q_1}{(s + q_3)} \qquad Y(s) = G(s)X(s)$$

Si conozco q_1 y q_3 puedo resolver el problema en el dominio de Laplace mediante tablas y luego pasar al dominio temporal.

Respuesta a un escalón:

$$x(t) = H(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \qquad Y_H(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

$$Y_H(s) = \frac{q_1}{(s + q_3)}\frac{1}{s}$$

Respuesta a un impulso:

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = 1 \qquad Y_\delta(s) = G(s)$$

$$Y_\delta(s) = G(s) = \frac{q_1}{(s + q_3)}$$

Función de transferencia

$$Y_H(s) = \frac{q_1}{(s+q_3)}\frac{1}{s} \quad \rightarrow y_H(t) = \frac{q_1}{q_3}\left(1 - e^{-q_3 t}\right)$$

$$Y_\delta(s) = \frac{q_1}{(s+q_3)} \quad \rightarrow y_\delta(t) = q_1 e^{-q_3 t}$$

Respuesta a un escalón: $Y_H(s) = G(s)\frac{1}{s} \quad G(s) = sY_H(s)$

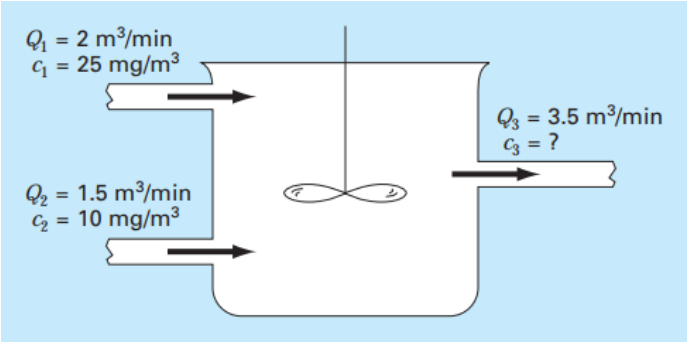
La función de transferencia de un sistema es **s veces** la transformada de la respuesta al escalón.

Recordamos la transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) \quad \mathcal{L}\left[\frac{dy_H}{dt}\right] = sY_H(s) \quad \mathcal{L}\left[g(t)\right] = G(s)$$

$$g(t) = \frac{dy_H(t)}{dt}$$

Función de transferencia



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

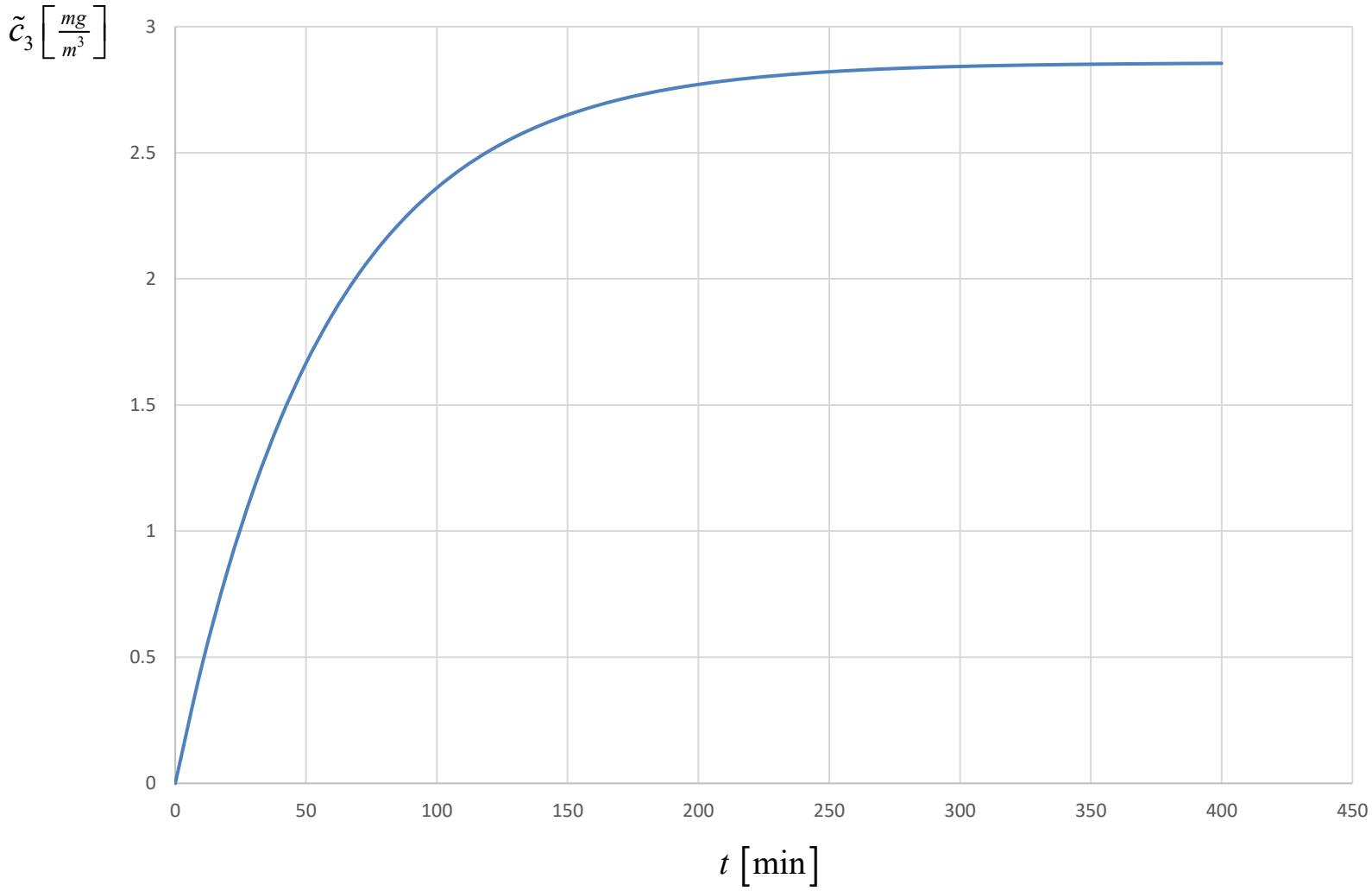
Caso 1:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta en 0.5 mg/m³

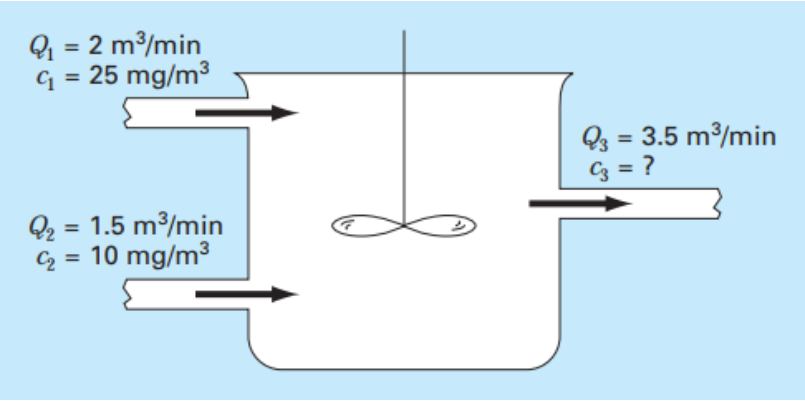
$$\tilde{c}_1(t) = 0.5H(t) \qquad \tilde{C}_1(s) = \frac{0.5}{s}$$

$$\tilde{C}_3(s) = \frac{q_1}{(s+q_3)}\frac{0.5}{s} \qquad \tilde{c}_3(t) = \frac{0.5q_1}{q_3}\left(1-e^{-q_3 t}\right)$$

Función de transferencia



Función de transferencia de 1er Orden



$$G(s) = \frac{q_1}{(s + q_3)}$$

Cuando el denominador de la función de transferencia es de grado 1 en s, el sistema se conoce como de primer orden.

$$G(s) = \frac{q_1}{\frac{q_3}{q_3}(s + q_3)} = \frac{q_1/q_3}{\left(\frac{1}{q_3}s + 1\right)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

Expresión canónica de un sistema de primer orden

Función de transferencia de 1er Orden

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

con K la ganancia estacionaria y τ la constante de tiempo.

Este tipo de funciones de transferencia corresponde a un sistema descrito por una EDO lineal de primer orden a coeficientes constantes, bajo la hipótesis de condiciones iniciales nulas.

Un sistema lineal de primer orden, invariante en el tiempo, con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ se representa como:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \rightarrow K = \frac{b_0}{a_0},\ \tau = \frac{a_1}{a_0}$$

Función de transferencia de 1er Orden

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

Este enfoque plantea un problema habitual: tenemos un sistema físico real que responde a una función de primer orden y debemos identificar sus parámetros (K y τ).

Respuesta a un escalón α:

$$Y_H(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \frac{\alpha}{s} \quad \rightarrow y_H(t) = \alpha K \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Función de transferencia de 1er Orden

$$Y_H(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \frac{\alpha}{s} \quad \rightarrow y_H(t) = \alpha K \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

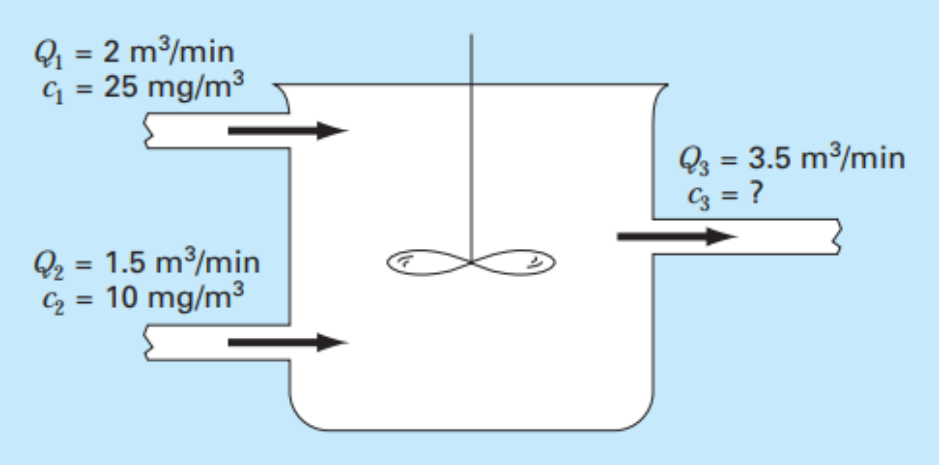
$$y_H(\infty) = \alpha K$$

$$y_H(\tau) = \alpha K \left(1 - e^{-1}\right) = \alpha K \, 0.63212056...$$

$$y_H(\tau) = 63.21\% \, y_H(\infty)$$

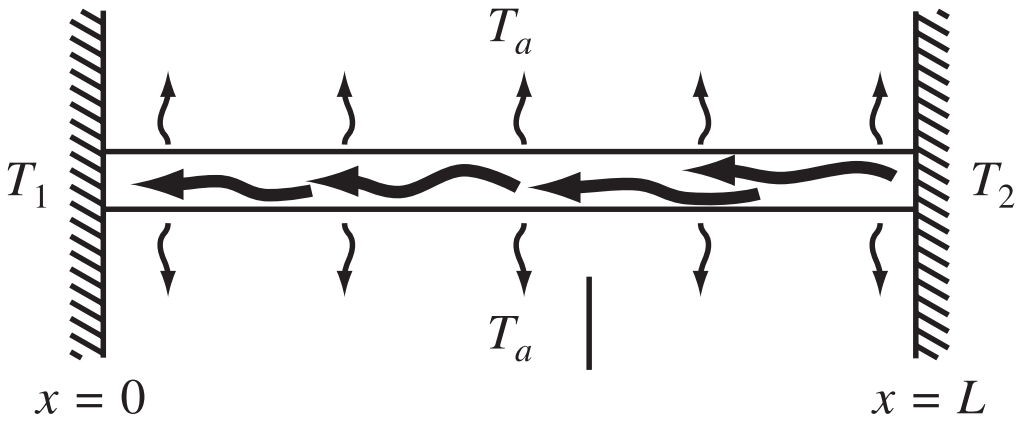
τ es el tiempo en que la respuesta alcanza el 63.2 % de su valor final

Análisis respecto al EE



El tanque agitado de la figura opera en estado estacionario, con mezcla perfecta y volumen constante. Los caudales Q_1, Q_2 y Q_3 permanecen fijos durante todo el experimento, y la concentración de la corriente 2 se mantiene en $c_2 = 10$ mg/m³.
En un instante que tomamos como t = 0, la concentración de la corriente 1 aumenta bruscamente de 25 a 30 mg/m³ y se mantiene en ese nuevo valor.
Se registra cada 20 minutos la evolución de la concentración de salida $c_3(t)$ por un periodo de 400 minutos.
Encontrar la función de transferencia del sistema y graficar.

Ejemplo de resolución de una EDO (II)



Barra delgada entre dos fuentes a temperatura constante

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'\left(T_a - T\right) = 0$$

$$T(0) = 40$$

$$T'(0) = ?$$

$$T(10) = 200$$

$$T_a = 20\,^{o}C$$

$$T_1 = 40\,^{o}C$$

$$T_2 = 200\,^{o}C$$

$$h' = 0.01$$

$$L = 10$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + 0.01\left(20 - T\right) = \frac{d^2T}{dx^2} + 0.2 - 0.01T = 0$$

$$\overbrace{s^2T(s) - sT(0) - T'(0)} + \frac{0.2}{s} - \overbrace{0.01T(s)} = 0$$

Ejemplo de resolución de una EDO (II)

$$T(0) = 40$$

$$T'(0) = ?$$

$$T(10) = 200$$

$$s^2 T(s) - sT(0) - T'(0) + \frac{0.2}{s} - 0.01T(s) = 0$$

$$s^2 T(s) - s\,40 - T'(0) + \frac{0.2}{s} - 0.01T(s) = 0$$

$$T(s)\left(s^2 - 0.01\right) - s\,40 - T'(0) + \frac{0.2}{s} = 0$$

$$T(s)\left(s^2 - 0.01\right) = 40s + T'(0) - \frac{0.2}{s}$$

$$T(s)\left(s^2 - 0.1^2\right) = 40s + T'(0) - \frac{0.2}{s}$$

$$T(s) = \frac{40s}{(s+0.1)(s-0.1)} + \frac{T'(0)}{(s+0.1)(s-0.1)} - \frac{0.2}{s(s+0.1)(s-0.1)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (II)

$$T(s) = \frac{40s}{(s+0.1)(s-0.1)} + \frac{T'(0)}{(s+0.1)(s-0.1)} - \frac{0.2}{s(s+0.1)(s-0.1)}$$

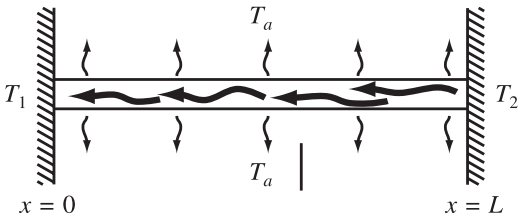
$$20e^{-0.1t} + 20e^{0.1t} + 5T'(0)\left(e^{0.1t} - e^{-0.1t}\right) + 20 - 10e^{-0.1t} - 10e^{0.1t}$$

$$T(x) = 20e^{-0.1x} + 20e^{0.1x} + 5T'(0)\left(e^{0.1x} - e^{-0.1x}\right) + 20 - 10e^{-0.1x} - 10e^{0.1x}$$

$$T(x) = 40\left(\frac{e^{0.1x} + e^{-0.1x}}{2}\right) + 10T'(0)\left(\frac{e^{0.1x} - e^{-0.1x}}{2}\right) + 20 - 20\left(\frac{e^{0.1x} + e^{-0.1x}}{2}\right)$$

$$T(x) = 20\cosh(0.1x) + 10T'(0)\sinh(0.1x) + 20$$

Ejemplo de resolución de una EDO (II)



$T_2 = 200\,°C$

$$T(x) = 20\cosh(0.1x) + 10T'(0)\sinh(0.1x) + 20$$

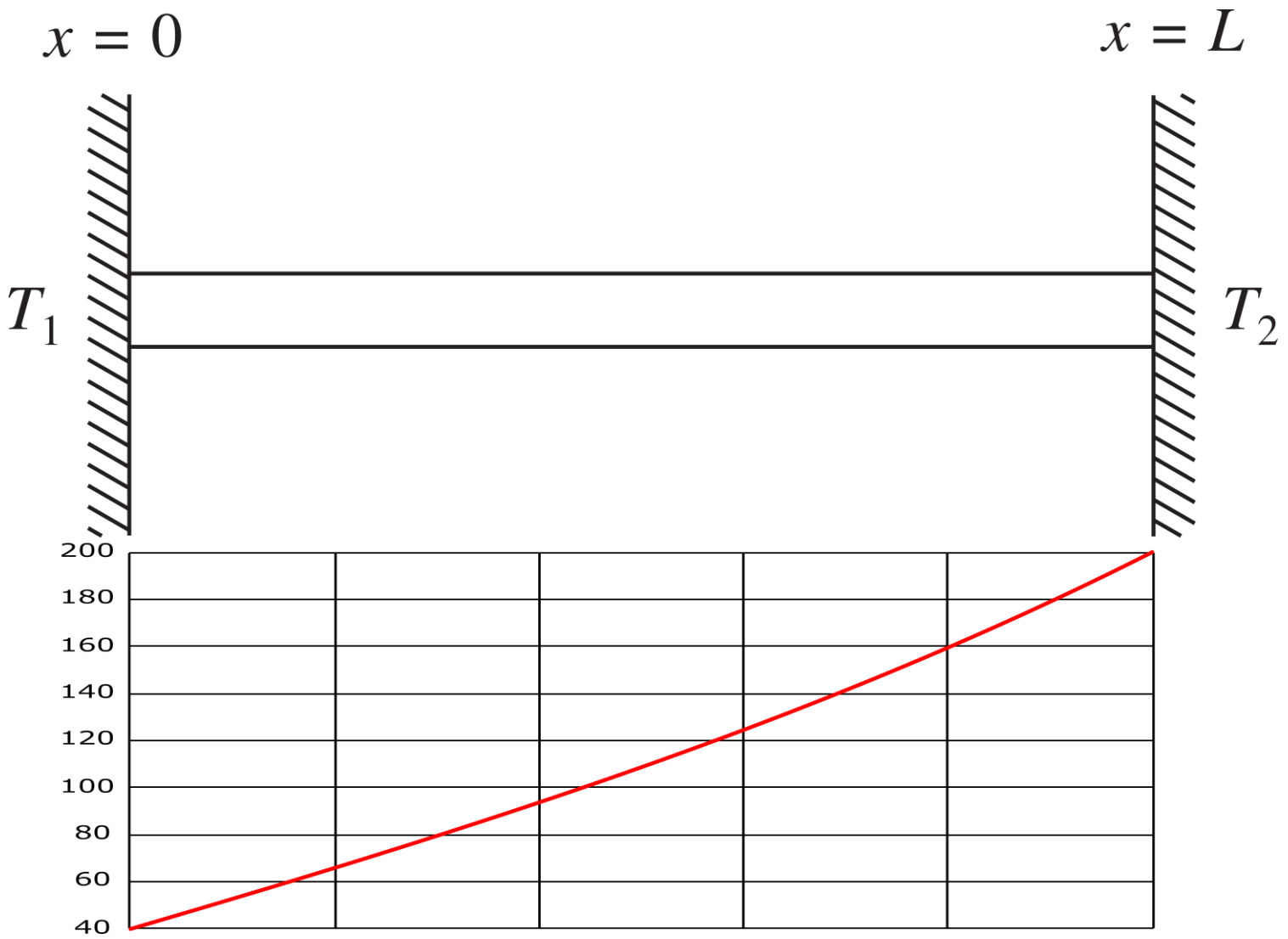
$$T(10) = 20\cosh(1) + 10T'(0)\sinh(1) + 20$$

$$200 = 20\cosh(1) + 10T'(0)\sinh(1) + 20$$

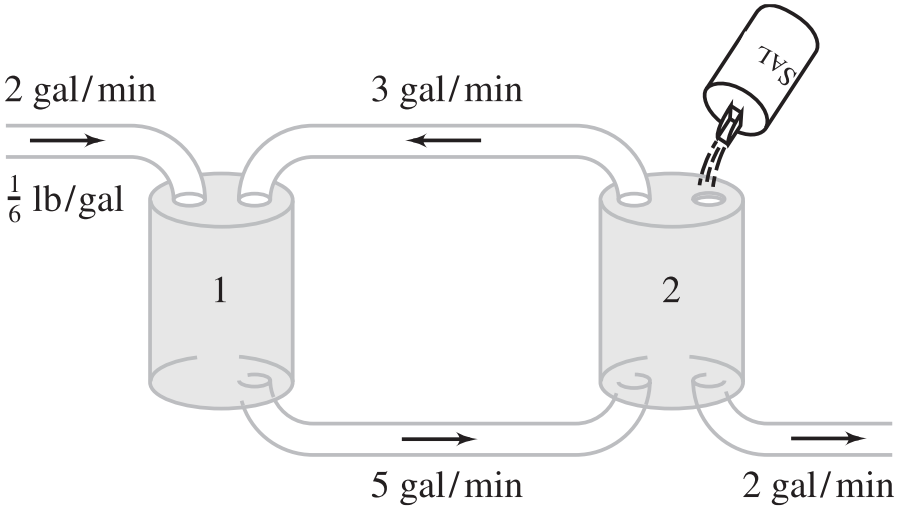
$$\frac{18 - 2\cosh(1)}{\sinh(1)} = T'(0) \qquad T'(0) \cong 12.69045574$$

$$T(x) = 20\cosh(0.1x) + 126.9045574\sinh(0.1x) + 20$$

Ejemplo de resolución de una EDO (II)



Ejemplo de resolución de una EDO (IV)



$$V_1(0) = 60\,gal \quad V_2(0) = 18\,gal$$

Partiendo de estado estacionario.

$$60\frac{dc_1}{dt} = 2\frac{1}{6} + 3c_2 - 5c_1$$ Tanque 1

$$18\frac{dc_2}{dt} = 5c_1 - 3c_2 - 2c_2 + sal$$ Tanque 2

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$60\frac{dc_1}{dt} = 2\frac{1}{6} + 3c_2 - 5c_1$$

$$60\frac{d\tilde{c}_1}{dt} = 2\frac{1}{6} + 3\tilde{c}_2 - 5\tilde{c}_1 + 3c_2^0 - 5c_1^0$$

$$60\frac{d\tilde{c}_1}{dt} = 3\tilde{c}_2 - 5\tilde{c}_1$$ Tanque 1

$$18\frac{d\tilde{c}_2}{dt} = 5\tilde{c}_1 - 5\tilde{c}_2 + sal$$ Tanque 2

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$60\frac{d\tilde{c}_1}{dt} = 3\tilde{c}_2 - 5\tilde{c}_1 \rightarrow \frac{d\tilde{c}_1}{dt} = \frac{1}{20}\tilde{c}_2 - \frac{1}{12}\tilde{c}_1$$

$$sC_1 = \frac{1}{20}C_2 - \frac{1}{12}C_1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{20}\frac{C_2}{\left(s + \frac{1}{12}\right)}$$

$$18\frac{d\tilde{c}_2}{dt} = 5\tilde{c}_1 - 5\tilde{c}_2 + sal \rightarrow \frac{d\tilde{c}_2}{dt} = \frac{5}{18}\tilde{c}_1 - \frac{5}{18}\tilde{c}_2 + \frac{1}{18}sal$$

$$sC_2 = \frac{5}{18}C_1 - \frac{5}{18}C_2 + \frac{1}{18}SALT$$

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$sC_2 = \frac{5}{18}C_1 - \frac{5}{18}C_2 + \frac{1}{18}SAL \quad \leftarrow C_1 = \frac{1}{20}\frac{C_2}{\left(s+\frac{1}{12}\right)}$$

$$sC_2 = \frac{1}{72}\frac{C_2}{\left(s+\frac{1}{12}\right)} - \frac{5}{18}C_2 + \frac{1}{18}SAL \qquad \rightarrow C_2\left(s - \frac{1}{72}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{12}\right)} + \frac{5}{18}\right) = \frac{1}{18}SAL$$

$$C_2\left(s\left(s+\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{72} + \frac{5}{18}\left(s+\frac{1}{12}\right)\right) = \frac{1}{18}SAL\left(s+\frac{1}{12}\right)$$

$$C_2\left(\left(s+\frac{5}{18}\right)\left(s+\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{72}\right) = \frac{1}{18}SAL\left(s+\frac{1}{12}\right)$$

$$C_2\left(s^2 + \frac{13}{36}s + \frac{1}{108}\right) = \frac{1}{18}SAL\left(s+\frac{1}{12}\right) \qquad C_2 = \frac{\left(s+\frac{1}{12}\right)}{16\left(s^2+\frac{13}{36}s+\frac{1}{108}\right)}SAL$$

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$C_2 = \frac{\left(s + \frac{1}{12}\right)}{18\left(s^2 + \frac{13}{36}s + \frac{1}{108}\right)} SAL$$

$$C_2 = \frac{\left(s + \frac{1}{12}\right)}{18\left(s + \frac{1}{36}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)} SAL$$

$$C_1 = \frac{1}{20} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{12}\right)} \frac{\left(s + \frac{1}{12}\right)}{18\left(s + \frac{1}{36}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)} SAL$$

$$C_1 = \frac{1}{360\left(s + \frac{1}{36}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)} SAL$$

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$C_1 = \frac{1}{360\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)} SAL \qquad C_2 = \frac{\left(s+\frac{1}{12}\right)}{18\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)} SAL$$

Identificar las funciones de transferencia.

A tiempo cero:

Caso 1: Se vierte sal en el tanque 2 a razón de 11 libras por minuto por un periodo de 2 minutos.

Caso 2: A tiempo cero, se vierten 20 libras de sal de forma instantánea.

Caso 3: A tiempo cero, se abre la tolva y caen 5 libras de sal por minuto.

$$sal_1(t) = 11\left(H(t) - H(t-2)\right) \qquad SAL_1(s) = \frac{11}{s}\left(1 - e^{-2s}\right)$$

$$sal_2(t) = 20\delta(t) \qquad SAL_2(s) = 20$$

$$sal_3(t) = 5H(t) \qquad SAL_3(s) = \frac{5}{s}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{1}{360\left(s+\dfrac{1}{36}\right)\left(s+\dfrac{1}{3}\right)} SAL \\ SAL_1(s) = \dfrac{11}{s}\left(1-e^{-2s}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{360\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)} \frac{11}{s}\left(1-e^{-2s}\right)$$

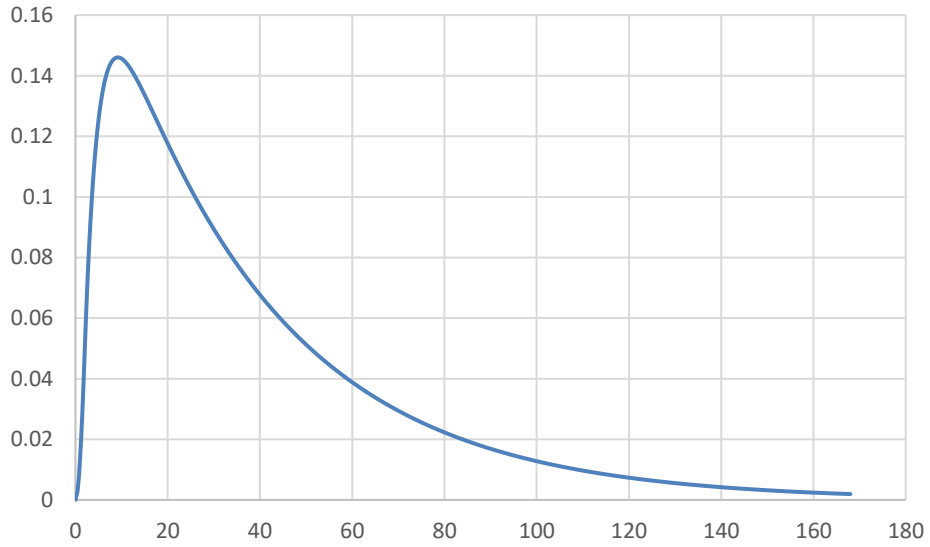
$$C_1 = \frac{11}{360s\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)} - \frac{11}{360s\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)} e^{-2s}$$

$$C_1 = \left(F(s) - F(s)e^{-2s}\right)$$

$$F(s) = \frac{11}{360s\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)} \rightarrow f(t) = 3.3 - 3.6e^{-\frac{t}{36}} + 0.3e^{-\frac{t}{3}}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$C_1 = \left(F(s) - F(s)e^{-2s} \right) \qquad f(t) = 3.3 - 3.6e^{-\frac{t}{36}} + 0.3e^{-\frac{t}{3}}$$



$$\tilde{c}_1 = f(t) - f(t-2)H(t-2)$$

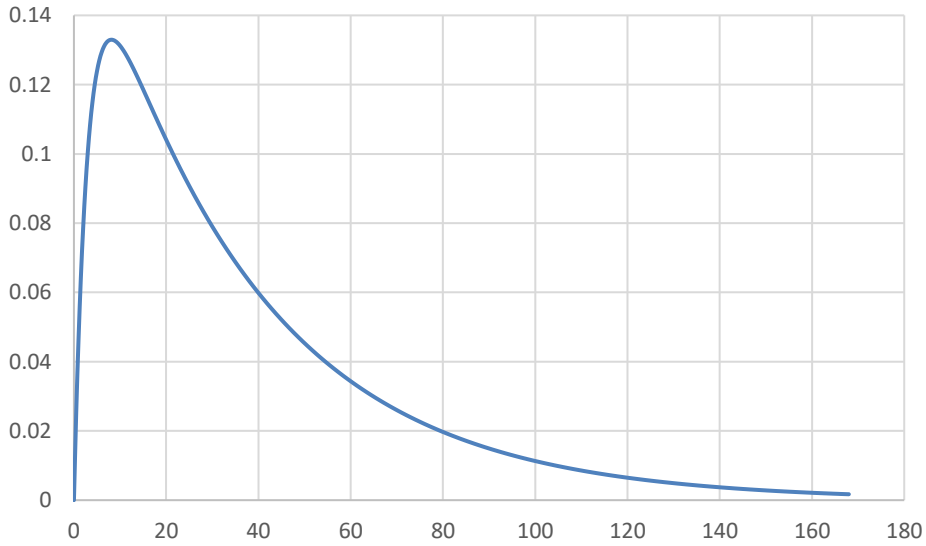
$$\tilde{c}_1 = \begin{cases} f(t) & si\ 0 \le t < 2 \\ f(t) - f(t-2) & si\ t \ge 2 \end{cases}$$

$$\tilde{c}_1 = \begin{cases} 3.3 - 3.6e^{-\frac{t}{36}} + 0.3e^{-\frac{t}{3}} & si\ 0 \le t < 2 \\ -3.6e^{-\frac{t}{36}} + 0.3e^{-\frac{t}{3}} + 3.6e^{-\frac{t-2}{36}} - 0.3e^{-\frac{t-2}{3}} & si\ t \ge 2 \end{cases}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{360\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)}SAL \\ SAL_2(s) &= 20 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad C_1 = \frac{20}{360\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{2}{11}\left(e^{-t/36} - e^{-t/3}\right)$$

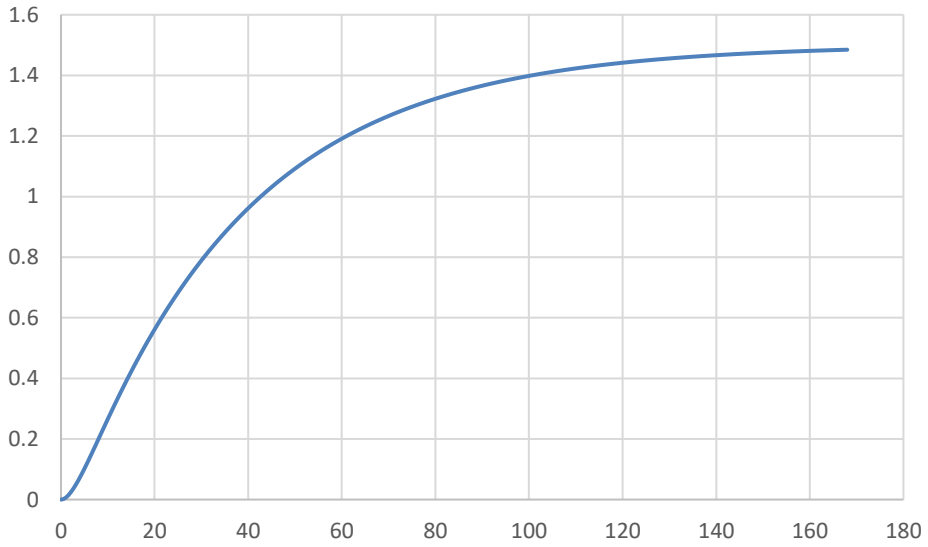


Ejemplo de resolución de una EDO (IV)

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{360\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)}SAL \\ SAL_3(s) &= \frac{5}{s} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{360\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)}\frac{5}{s}$$

$$C_1 = \frac{5}{360s\left(s+\frac{1}{36}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\tilde{c}_1 = 1.5 - \frac{18}{11}e^{-\frac{t}{36}} + \frac{3}{22}e^{-\frac{t}{3}}$$



Realizar las siguientes transformadas de Laplace

$$f(t) = 1 + 5t + 3t^2$$

$$g(t) = e^{4t}\left(1 + 5t + 3t^2\right)$$

$$p(t) = \underbrace{H(t-2)}_{\text{Heaviside}}\left(1 + 5(t-2) + 3(t-2)^2\right)$$