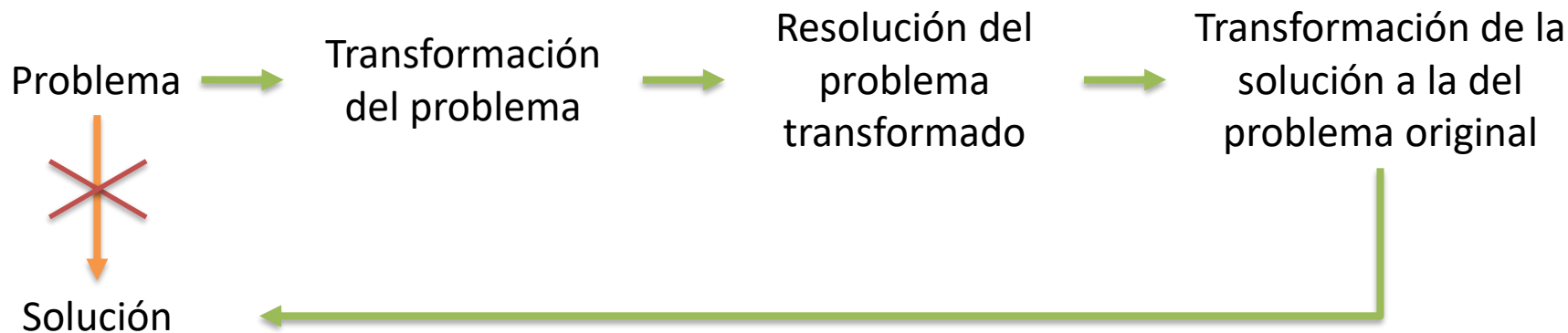


Introducción a la Transformada de Laplace

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

- En matemáticas se llama **transformar** al mecanismo que convierte un problema de un tipo a otro, este último presumiblemente más fácil de resolver.
- El modo de hacerlo es resolver primero el problema transformado, para después transformar de regreso y obtener la solución del problema original.



- Las funciones que realizan estas transformaciones se conocen como “**transformadas**”.

Dada una función $f(t)$ integrable en el intervalo $[t_1 t_2]$ se puede definir una nueva función $F(s)$ según:

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(s, t) dt$$

Donde $K(s, t)$ es una función integrable en la variable t .

Como se define a partir de una integral, este tipo de transformación se conoce como **transformación integral** de la función $f(t)$.

$$F(s) = T(f(t))$$

$$\boxed{F(s)} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \boxed{K(s, t)} dt$$

Transformada de la función f Núcleo integral

Normalmente la transformada integral se puede invertir por medio de una **transformada inversa**:

$$f(t) = \int_{s_1}^{s_2} F(s) K^{-1}(s, t) ds$$

$$f(t) = T^{-1}(F(s))$$

*Nota: El -1 corresponde a la condición de función inversa **NO** a una potencia.*

Al estar definidas a partir de una integración, las transformadas integrales son transformaciones lineales.

$$h(t) = a f(t)$$

$$T(h(t)) = H(s) = \int_{t_1}^{t_2} h(t) K(s, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} a f(t) K(s, t) dt$$

$$H(s) = a \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(s, t) dt = a F(s)$$

$$h(t) = a f(t) + b g(t) \Rightarrow H(s) = a F(s) + b G(s)$$

Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt$$

Transformada de Hilbert:

$$\mathcal{Hil}(f(t)) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{s-t} dt$$

Transformada de Mellin:

$$\mathcal{M}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt$$

En el análisis de la dinámica de procesos, las variables son funciones del tiempo. La transformada de Laplace de una función del tiempo $f(t)$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

para todo s tal que esta integral converja.

$F(s)$: Transformada de Laplace de la función $f(t)$

s : variable de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace transforma a la función del tiempo (t) en una función de la variable de la transformada de Laplace (s).

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = 1 \rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-st} dt$$

$$F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} - \left(-\frac{1}{s} e^{-s0} \right) \right)$$

$$F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} + \frac{1}{s} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} \right) + \frac{1}{s}$$

= 0; siempre que $s > 0$

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

**La transformada de Laplace de $f(t) = 1$ es $F(s) = 1/s$,
definida por $s > 0$.**

$$f(t) = e^{at} \rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt$$

$$F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} - \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)0} \right) \right)$$

$$F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} \right) - \frac{1}{a-s}$$

= 0; siempre que $s > a$

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = 1/(a-s)$, definida por $s > a$.

- No es habitual calcular una transformada de Laplace a partir de su definición, es decir, resolviendo la integral.
- Para realizar transformaciones se cuenta con tablas de transformadas de Laplace para funciones de uso frecuente.
- También, aprovechando las propiedades de las transformadas se pueden separar las funciones en varios términos y realizar la transformación términos individuales.

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) \longrightarrow \mathcal{L}(f(t))$$

1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$

[VER TABLA](#)

$$f(t)$$

$$\mathcal{L}(f(t))$$

$$af(t) + bg(t)$$

$$aF(s) + bG(s)$$

$$f'(t)$$

$$sF(s) - f(0)$$

$$f^{(n)}(t)$$

$$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

[VER TABLA](#)

De gran interés para la resolución de EDOs

Dada una función G y una función g tal que

$$G(s) = \mathcal{L}(g(t))$$

g se conoce como **transformada inversa de Laplace** de G .

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Cumple la propiedad de linealidad

Ahora se debe leer la tabla de manera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) \longleftarrow F(s)$$

1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$

[VER TABLA](#)

$$f(t) = \cos(t) - \text{sen}(t)$$

$$\text{sen}(at) \quad \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\cos(at) \quad \frac{s}{s^2 + a^2}$$

de Tabla

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos(t)] - \mathcal{L}[\text{sen}(t)]$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s - 1}{s^2 + 1}$$

$$F(s) = \frac{-2}{s+16}$$

$$e^{at} \quad \frac{1}{s-a}$$

de Tabla

$$F(s) = -2 \frac{1}{s - (-16)} \quad a$$

$$f(t) = -2e^{-16t}$$

Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > b \geq 0$. Sea a cualquier número, entonces

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s - a) \quad \text{para } s > a + b$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{s^2 + 1} \rightarrow \mathcal{L}\left[e^{2t} \cos(t)\right] = \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 1}$$

Por otro lado, si

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s - a)$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s - a)\right] = e^{at} f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s - a)\right] = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

Ejemplo II:

$$F(s) = \frac{6}{(s-7)^4}$$



$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$f(t) = e^{7t} t^3$$

$$g(t) = t^3$$

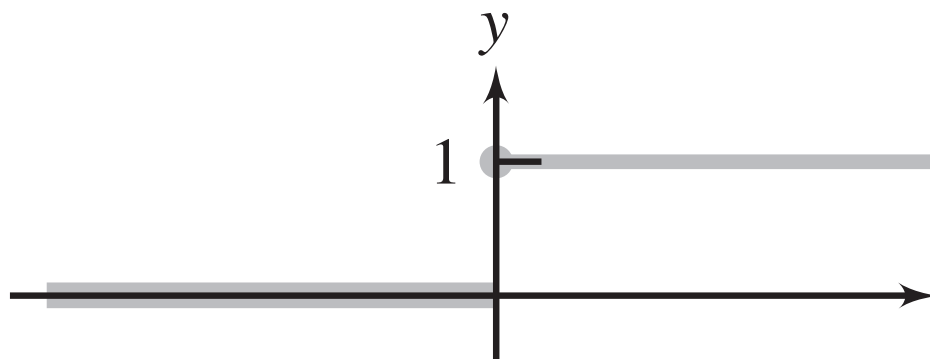
$$G(s) = \frac{6}{s^4} \quad \text{de tabla}$$

$$F(s) = G(s-7)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{7t} \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

La función de Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

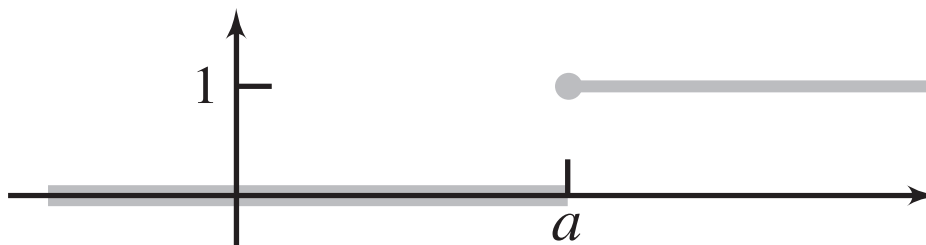


función “ON” “OFF”

Oliver Heaviside (1850-1925) fue un ingeniero electricista inglés que hizo mucho por introducir la transformada de Laplace en la práctica ingenieril.

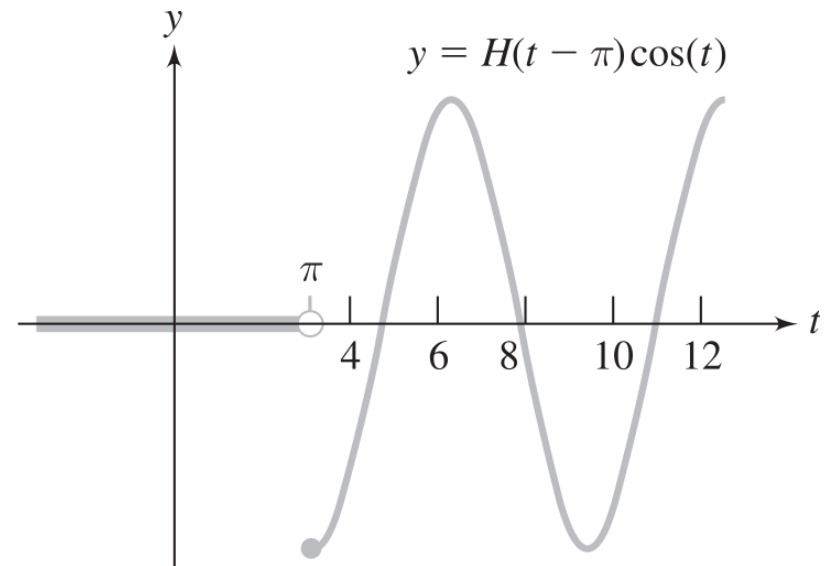
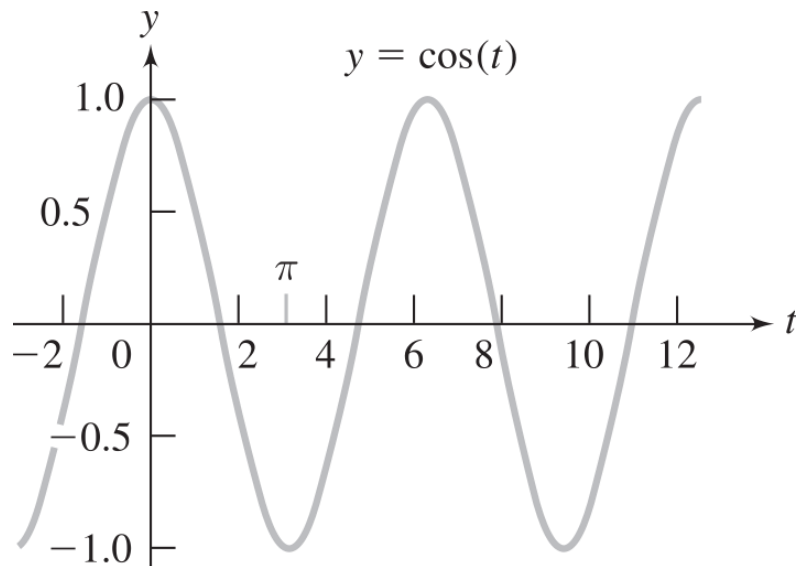
Si a es cualquier número, entonces $H(t-a)$ es la función de Heaviside corrida a unidades a la derecha.

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Se puede usar $H(t - a)$ para lograr el efecto de mantener una función g apagada hasta el tiempo $t = a$ y en dicho tiempo prenderla.

$$H(t - a)g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ g(t) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Comparación de $y = \cos(t)$ y $y = H(t - \pi)\cos(t)$.

La función de Heaviside también sirve para describir un pulso (plano):

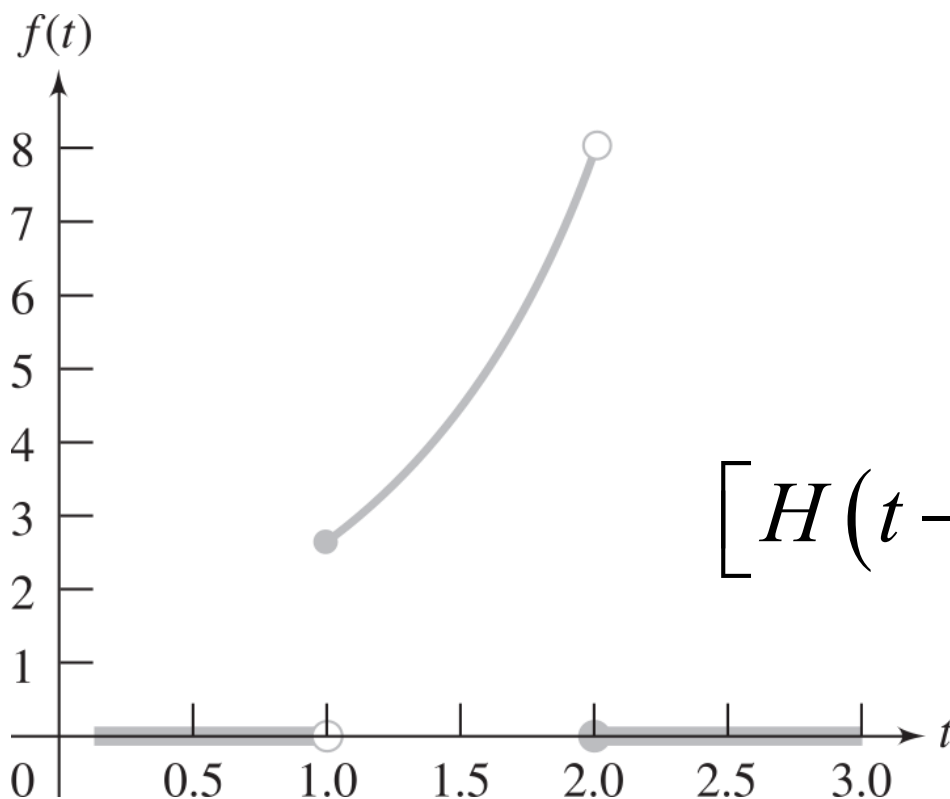
$$k \left[H(t - a) - H(t - b) \right]$$

en donde $a < b$ y k es un número real distinto de cero



La función de Heaviside también sirve para describir un pulso de una función:

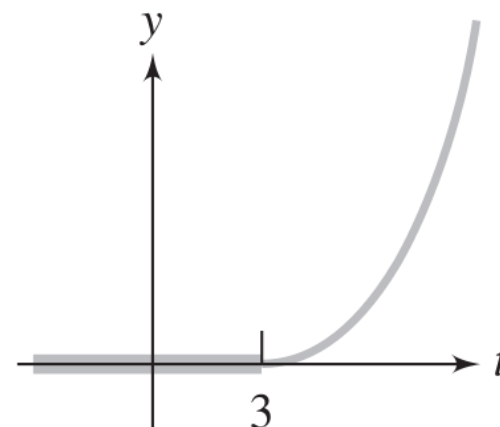
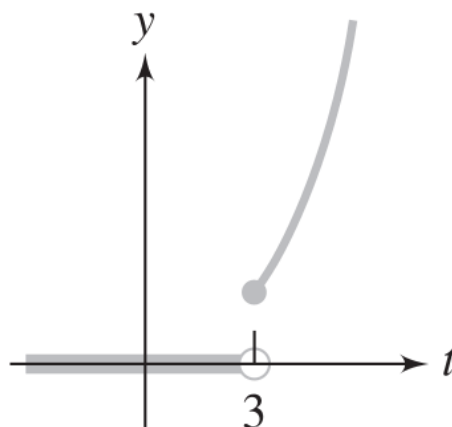
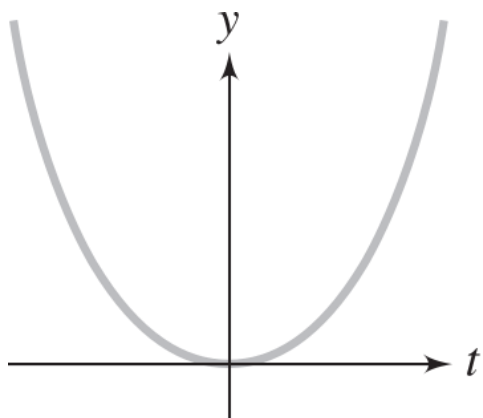
$$\left[H(t-a) - H(t-b) \right] f(t)$$



$$\left[H(t-1) - H(t-2) \right] e^t$$

También se puede usar $H(t - a)$ para lograr el efecto de correr una función g hasta el tiempo $t = a$.

$$H(t - a)g(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ g(t - a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

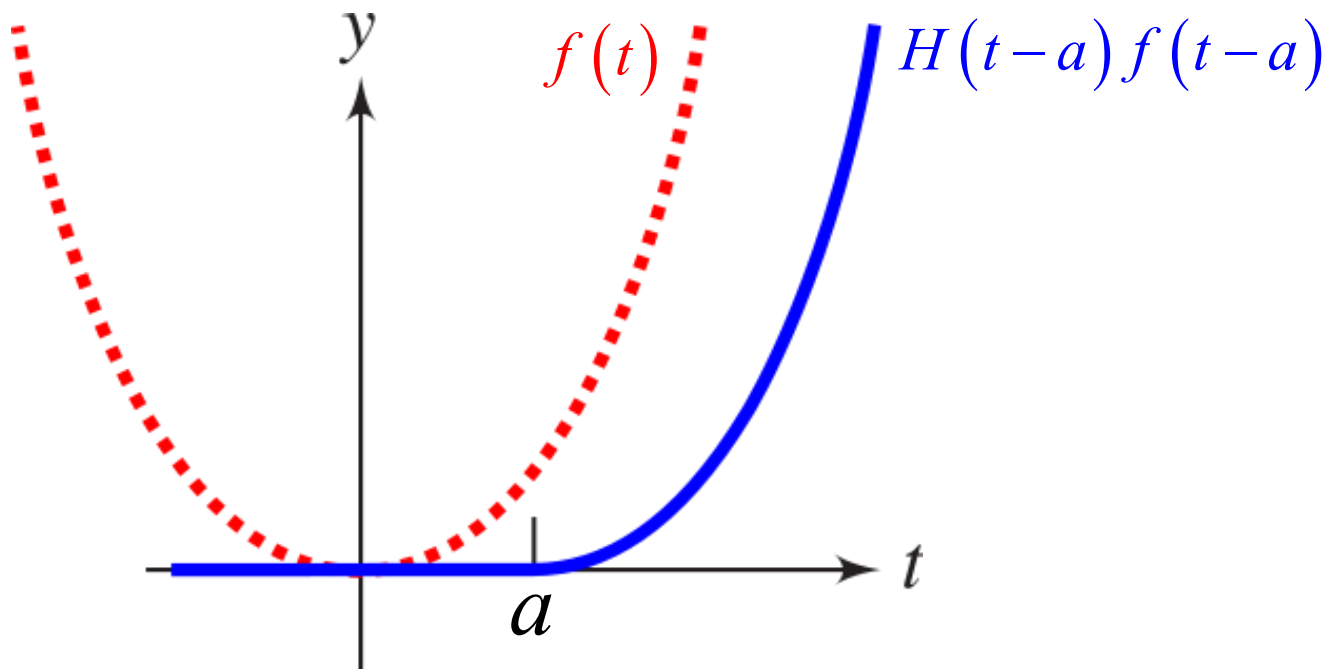


Comparación de $y = t^2$, $y = t^2 H(t - 3)$, y $y = (t - 3)^2 H(t - 3)$.

Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > b$. Entonces,

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

para $s > b$



Demostración:

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right] = \int_0^{\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt$$

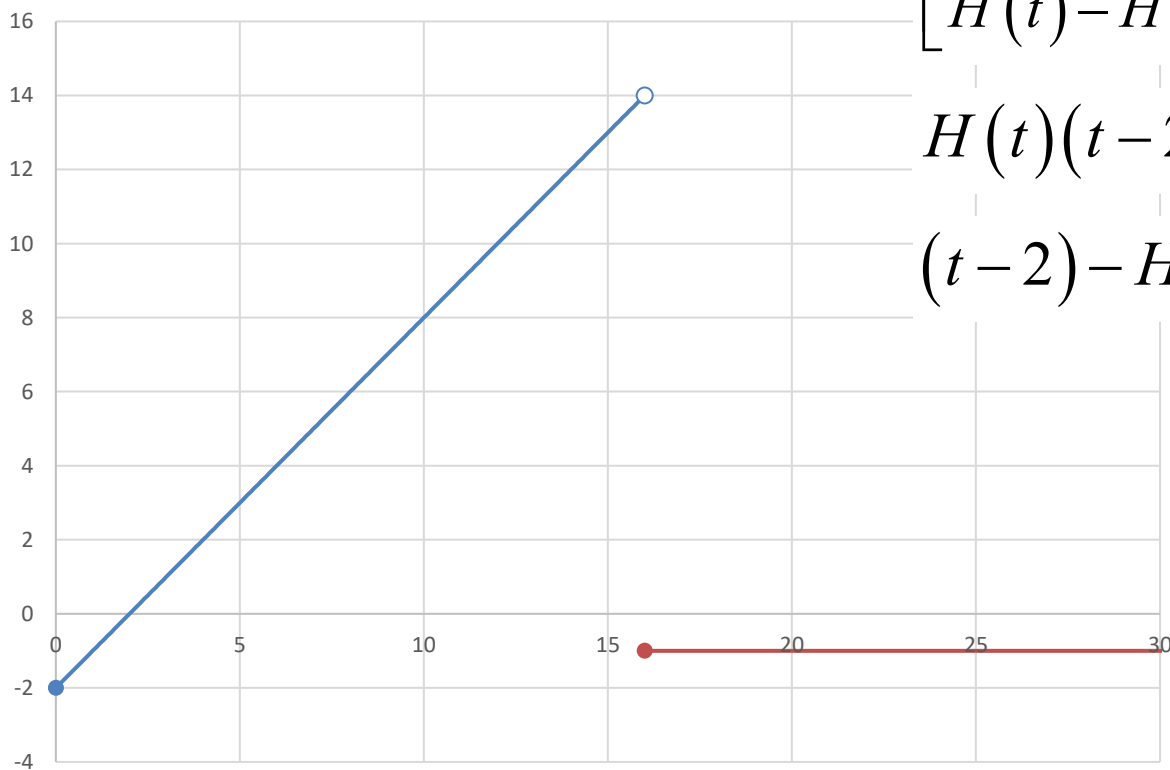
$$= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt \xrightarrow{w=t-a} = \int_0^{\infty} f(w)e^{-s(w+a)}dw$$

$$= \int_0^{\infty} f(w)e^{-ws}e^{-as}dw = e^{-as} \int_0^{\infty} f(w)e^{-ws}dw$$

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$$

Ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} t-2 & \text{para } 0 \leq t < 16 \\ -1 & \text{para } t \geq 16 \end{cases}$$



$$\left[H(t) - H(t-16) \right] (t-2) - H(t-16)$$

$$H(t)(t-2) - H(t-16)(t-1)$$

$$(t-2) - H(t-16)(t-1)$$

Ejemplo: $f(t) = \begin{cases} t-2 & \text{para } 0 \leq t < 16 \\ -1 & \text{para } t \geq 16 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

Segundo teorema de corrimiento

$$f(t) = (t-2) - H(t-16)(t-1)$$

$$f(t) = (t-2) - H(t-16)(t-16+15)$$

$$f(t) = t-2 - H(t-16)(t-16) - 15H(t-16)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} - e^{-16s} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{15}{s} \right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} - e^{-16s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{15}{s} \right)$$

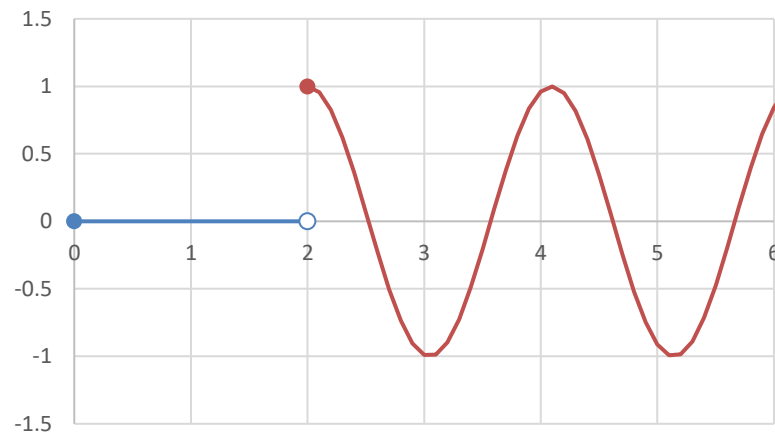
Ejemplo:

$$F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + 9} \rightarrow F(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 9} \rightarrow g(t) = \cos(3t)$$

$$f(t) = H(t-2)\cos(3(t-2))$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ \cos(3t-6) & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$$



Ejemplo:

$$F(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 3)}$$

Debemos llevarlo a expresiones disponibles en la tabla

Wiki: El método de descomposición en fracciones simples consiste en **descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad gr[P(x)] < gr[Q(x)]$$

El **grado** del polinomio del numerador tiene que ser estrictamente menor que el del denominador.

Para reducir la expresión a fracciones parciales se debe expresar el denominador como el producto de factores **lineales** o **cuadráticos**.

Caso 1: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Hay que calcularlas

Descomponer: $\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} \rightarrow \frac{7x + 3}{(x + 4)(x - 1)}$

Caso 2: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x + b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

Hay que calcularlas

$$\frac{\overset{\textcircled{A_1}}{A_1}}{a_1x + b_1} + \frac{\overset{\textcircled{A_2}}{A_2}}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{\overset{\textcircled{A_k}}{A_k}}{(a_1x + b_1)^k}$$

Descomponer: $\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x - 4)^2}$

Caso 3: El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde, $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{\textcircled{A}x + \textcircled{B}}{ax^2 + bx + c}$$

Hay que calcularlas

Descomponer: $\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} \rightarrow \frac{4x^2 - 8x + 1}{(x + 2)(x^2 - 2x + 3)}$

Caso 4: El denominador $Q(x)$ contiene un factor irreducible repetido.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

Hay que calcularlas

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Descomponer:
$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}$$

$$F(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B}{(s + 3)} = \frac{A(s + 3) + B(s + 1)}{(s + 1)(s + 3)}$$

$$3s + 5 = A(s + 3) + B(s + 1) = As + 3A + Bs + B = s(A + B) + (3A + B)$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A + B = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)} + \frac{2}{(s + 3)} \rightarrow f(t) = e^{-t} + 2e^{-3t}$$

La relación entre la transformada de Laplace de una función y la de su derivada corresponde a:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

La transformada de Laplace de la derivada de f es s veces la transformada de Laplace de f en s , menos f en cero

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} f \times e^{-st} dt \rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

Vamos a resolver por partes la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

$$\begin{cases} v = f \\ u = e^{-st} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt} \\ \frac{du}{dt} = -se^{-st} \end{cases} \rightarrow \frac{df}{dt} e^{-st} = \frac{dv}{dt} u = \frac{dvu}{dt} - v \frac{du}{dt}$$

$$\int_0^k \left(\frac{dvu}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) dt = \int_0^k \frac{dvu}{dt} dt - \int_0^k \left(v \frac{du}{dt} \right) dt = vu \Big|_0^k - \int_0^k \left(v \frac{du}{dt} \right) dt$$

$$\int_0^k \left(\frac{dvu}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) dt = vu \Big|_0^k - \int_0^k \left(v \frac{du}{dt} \right) dt = f \times e^{-st} \Big|_0^k - \int_0^k f \times (-se^{-st}) dt$$

$$= \left[f(k) e^{-sk} - f(0) \right] + s \int_0^k f \times e^{-st} dt$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left[f(k) e^{-sk} - f(0) \right] + s \int_0^k f \times e^{-st} dt \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(k) e^{-sk} \right) - f(0) + s \int_0^{\infty} f \times e^{-st} dt$$

Finalmente:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\cancel{f(k)} e^{\overset{=0}{-sk}} \right) - f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

suponemos que para $k \rightarrow \infty$ y $s > 0$ se cumple que $f(k) e^{-sk} \rightarrow 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0) \quad n = 1$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \quad n = 2$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^3 f}{dt^3}\right) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \quad n = 3$$

La relación entre la transformada de Laplace de una función y la de su integral corresponde a:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

La demostración de esta propiedad también puede realizarse integrando por partes la definición de la transformada de Laplace.

- La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver cierto tipo de problemas con valores iniciales.
- La técnica se basa en la propiedad de la transformada de Laplace de una derivada.

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

$$\frac{dy}{dt} - 4y = 1 \quad y(0) = 1 \quad \text{Es un problema de valor inicial}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt} - 4y\right) = \mathcal{L}(1) \rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) - 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

$$sY(s) - y(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s - 4) - 1 = \frac{1}{s}$$

Y ahora...

$$Y(s) = \frac{1}{s(s - 4)} + \frac{1}{(s - 4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)$$

$a = 4$

5. e^{at}

$$\frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right) = e^{4t}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

8. $\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right) = \frac{1}{0-4}(e^{0t} - e^{4t}) = -\frac{1}{4}(1 - e^{4t})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-4)} + \frac{1}{(s-4)}$$

Solución en el dominio de Laplace

$$y(t) = -\frac{1}{4}(1 - e^{4t}) + e^{4t}$$

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}$$

Solución en el dominio temporal

- La transformada de Laplace puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones que involucren derivadas e integrales.

- Ejemplo: $x'' - 2x' + 3y' + 2y = 4$

$$2y' - x' + 3y = 0$$

$$x(0) = x'(0) = y(0) = 0$$

$$s^2 X - s x(0) - x'(0) - 2(sX - x(0)) + 3(sY - y(0)) + 2Y = \frac{4}{s}$$

$$2(sY - y(0)) - (sX - x(0)) + 3Y = 0$$

$$s^2 X - s x(0) - x'(0) - 2(sX - x(0)) + 3(sY - y(0)) + 2Y = \frac{4}{s}$$

$$2(sY - y(0)) - (sX - x(0)) + 3Y = 0$$

$$s^2 X - 2sX + 3sY + 2Y = \frac{4}{s} \rightarrow s(s-2)X + (3s+2)Y = \frac{4}{s}$$

$$2sY - sX + 3Y = 0 \rightarrow Y = \frac{s}{(2s+3)} X$$

$$s(s-2)X + \frac{s(3s+2)}{(2s+3)} X = \frac{4}{s}$$

$$\left((s-2) + \frac{(3s+2)}{(2s+3)} \right) sX = \frac{4}{s}$$

$$\left((s-2) + \frac{(3s+2)}{(2s+3)} \right) sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{(2s+3)(s-2) + (3s+2)}{(2s+3)} sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^2 - 4s + 3s - 6 + 3s + 2}{(2s+3)} sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^2 + 2s - 4}{(2s+3)} sX = \frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^2 + 2s - 4}{(2s + 3)} sX = \frac{4}{s} \rightarrow X = \frac{4(2s + 3)}{s^2 (2s^2 + 2s - 4)}$$

$$X = \frac{4(2s + 3)}{s^2 2(s^2 + s - 2)}$$

$$Y = \frac{s(4s + 6)}{s^2 (s^2 + s - 2)(2s + 3)}$$

$$X = \frac{4s + 6}{s^2 (s^2 + s - 2)}$$

$$Y = \frac{2s}{s^2 (s^2 + s - 2)}$$

$$X = \frac{4s + 6}{s^2 (s^2 + s - 2)}$$

Para utilizar la tabla hay que descomponer en fracciones parciales o simples

$$X = \frac{4s + 6}{s^2 (s + 2)(s - 1)}$$

raíces $\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

Un factor cuadrático y dos lineales distintos

$$X = \frac{4s + 6}{s^2 (s + 2)(s - 1)} = \frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s + 2)} + \frac{A_3}{(s - 1)}$$

$$\frac{4s + 6}{s^2 (s + 2)(s - 1)} s^2 (s + 2)(s - 1) = \left(\frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s + 2)} + \frac{A_3}{(s - 1)} \right) s^2 (s + 2)(s - 1)$$

Multiplicamos miembro a miembro por el denominador común

$$\frac{4s + 6}{s^2 (s + 2)(s - 1)} s^2 (s + 2)(s - 1) = \left(\frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s + 2)} + \frac{A_3}{(s - 1)} \right) s^2 (s + 2)(s - 1)$$

$$4s + 6 = (A_1 s + B_1)(s + 2)(s - 1) + A_2 s^2 (s - 1) + A_3 s^2 (s + 2)$$

$$4s + 6 = (A_1 s + B_1)(s + 2)(s - 1) + A_2 s^2 (s - 1) + A_3 s^2 (s + 2)$$

$$4s + 6 = (A_1 s + B_1)(s^2 + s - 2) + A_2 s^3 - A_2 s^2 + A_3 s^3 + 2A_3 s^2$$

$$4s + 6 = A_1 s^3 + A_1 s^2 - 2A_1 s + B_1 s^2 + B_1 s - B_1 2 + A_2 s^3 - A_2 s^2 + A_3 s^3 + 2A_3 s^2$$

$$4s + 6 = (A_1 + A_2 + A_3)s^3 + (A_1 + B_1 - A_2 + 2A_3)s^2 + (-2A_1 + B_1)s - B_1 2$$

$$4s + 6 = (A_1 + A_2 + A_3)s^3 + (A_1 + B_1 - A_2 + 2A_3)s^2 + (-2A_1 + B_1)s - B_1$$

$$\begin{cases} -B_1 = 6 \\ -2A_1 + B_1 = 4 \\ A_1 + B_1 - A_2 + 2A_3 = 0 \\ A_1 + A_2 + A_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_1 = -3 \\ A_1 = -3.5 \\ -3.5 - 3 - A_2 + 2A_3 = 0 \\ -3.5 + A_2 + A_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_2 + 2A_3 = 6.5 \\ A_2 + A_3 = 3.5 \end{cases}$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \frac{10}{3}$$

$$B_1 = -3$$

$$A_1 = -3.5$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \frac{10}{3}$$

$$X = \frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s-1)}$$

$$X = \frac{-3.5s - 3}{s^2} + \frac{\frac{1}{6}}{(s+2)} + \frac{\frac{10}{3}}{(s-1)}$$

$$X = -3.5 \frac{1}{s} - 3 \frac{1}{s^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{(s+2)} + \frac{10}{3} \frac{1}{(s-1)}$$

$$Y = \frac{2s}{s^2 (s^2 + s - 2)}$$

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s-1)}$$

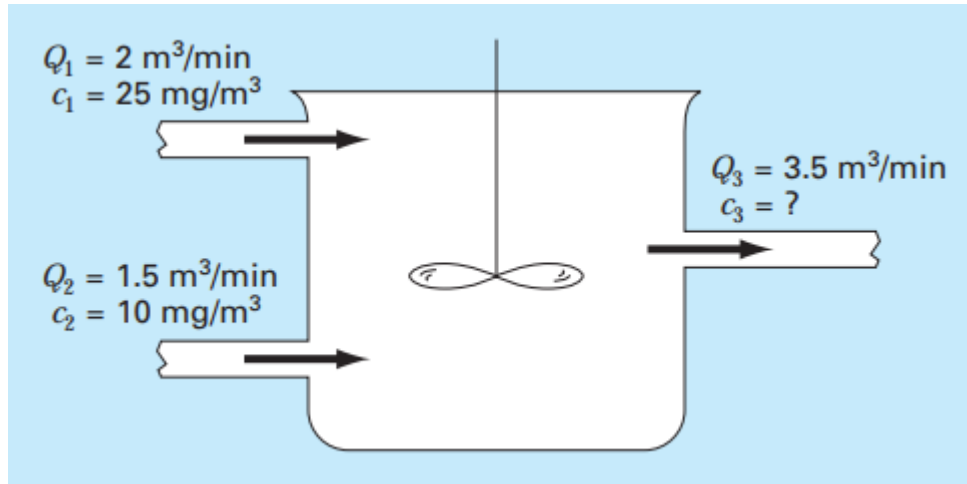
$$X = -3.5 \frac{1}{s} - 3 \frac{1}{s^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{(s+2)} + \frac{10}{3} \frac{1}{(s-1)}$$

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s-1)}$$

Pasar a dominio temporal

$$x(t) = -3.5 - 3t + \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{10}{3} e^t$$

$$y(t) = -1 + \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t$$



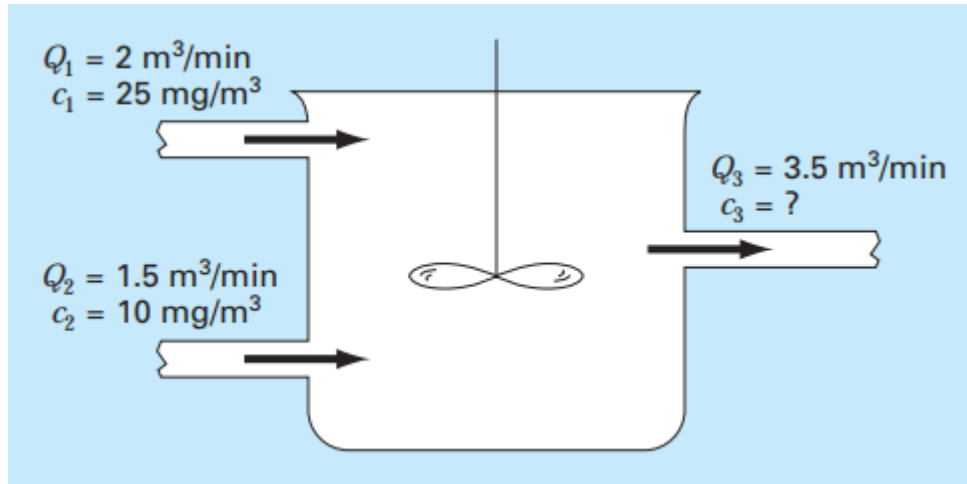
Balance Masa

$$\frac{dM}{dt} = m_1 + m_2 - m_3$$

$$\rho \frac{dV_{liq}}{dt} = \rho Q_1 + \rho Q_2 - \rho Q_3$$

$$\rho \frac{dV_{liq}}{dt} = \rho Q_1 + \rho Q_2 - \rho Q_3$$

$$\frac{dV_{liq}}{dt} = 0 \rightarrow V_{liq} = \text{constante}$$



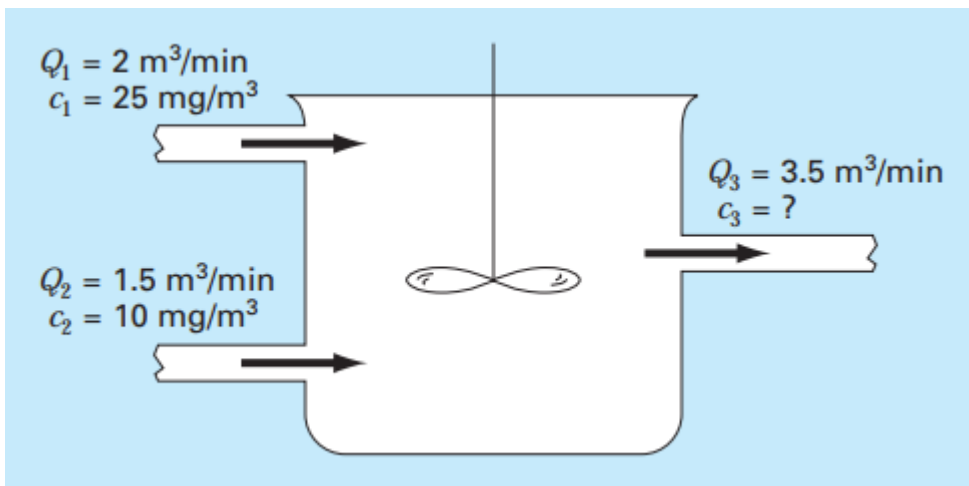
Balance Masa por Componente

$$\frac{dM_c}{dt} = m_{c,1} + m_{c,2} - m_{c,3}$$

$$M_c = c_3 V_{liq} \rightarrow \frac{dM_c}{dt} = V_{liq} \frac{dc_3}{dt} \quad m_{c,k} = Q_k c_k$$

$$V_{liq} \frac{dc_3}{dt} = Q_1 c_1 + Q_2 c_2 - Q_3 c_3$$

$$q = \frac{Q}{V_{liq}} \rightarrow \frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$



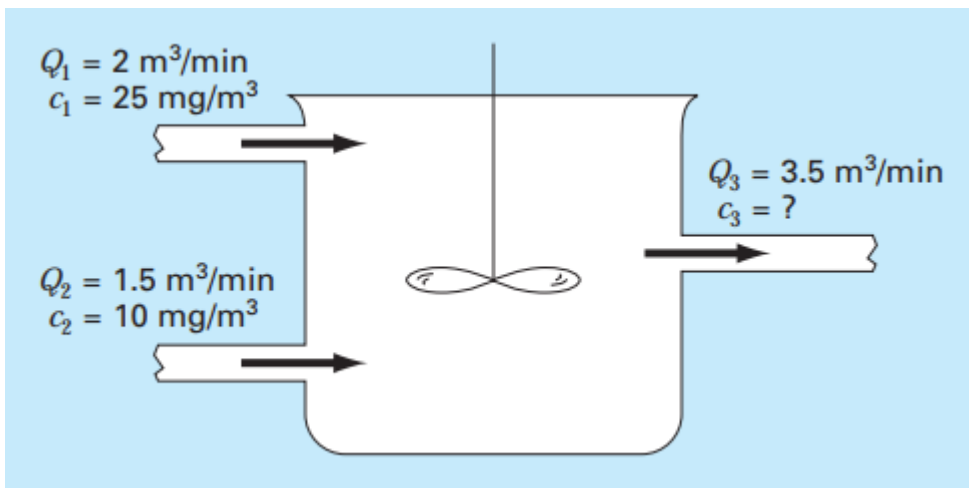
$$\frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

Para analizar el sistema
suponemos que $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$

$$sC_3(s) - c_3(0) = q_1 C_1(s) + q_2 C_2(s) - q_3 C_3(s)$$

$$C_3(s)(s + q_3) = q_1 C_1(s) + q_2 C_2(s) + c_3(0)$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s + q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s + q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s + q_3)}$$



$$V_{liq} = 200 m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = 65/3.5$$

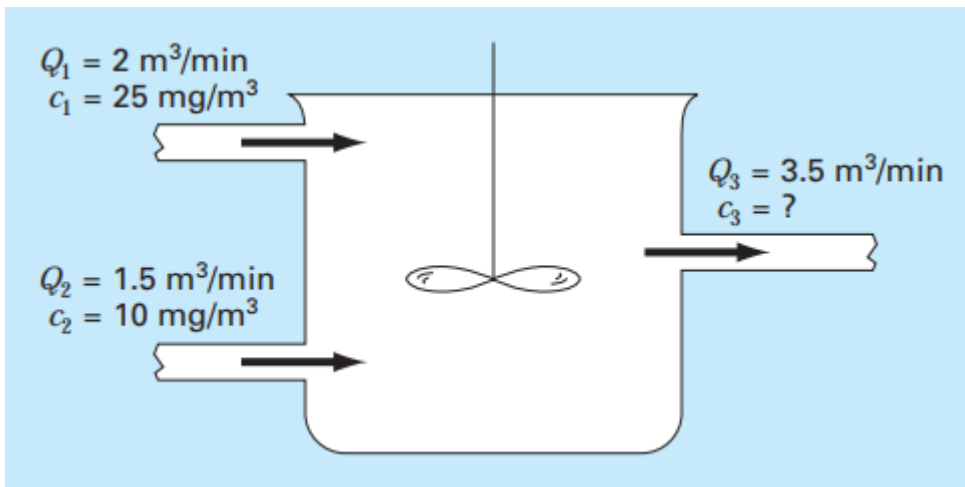
Caso 1:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% (c_2 permanece constante)

$$c_1(t) = 25 + 0.5H(t)$$

$$C_1(s) = \frac{25}{s} + \frac{0.5}{s} = \frac{25.5}{s}$$

$$c_2(t) = 10 \rightarrow C_2(s) = \frac{10}{s}$$



$$V_{liq} = 200 m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = 65/3.5$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} \quad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s + q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s + q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s + q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s + q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s + q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s + q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s + q_3)}$$

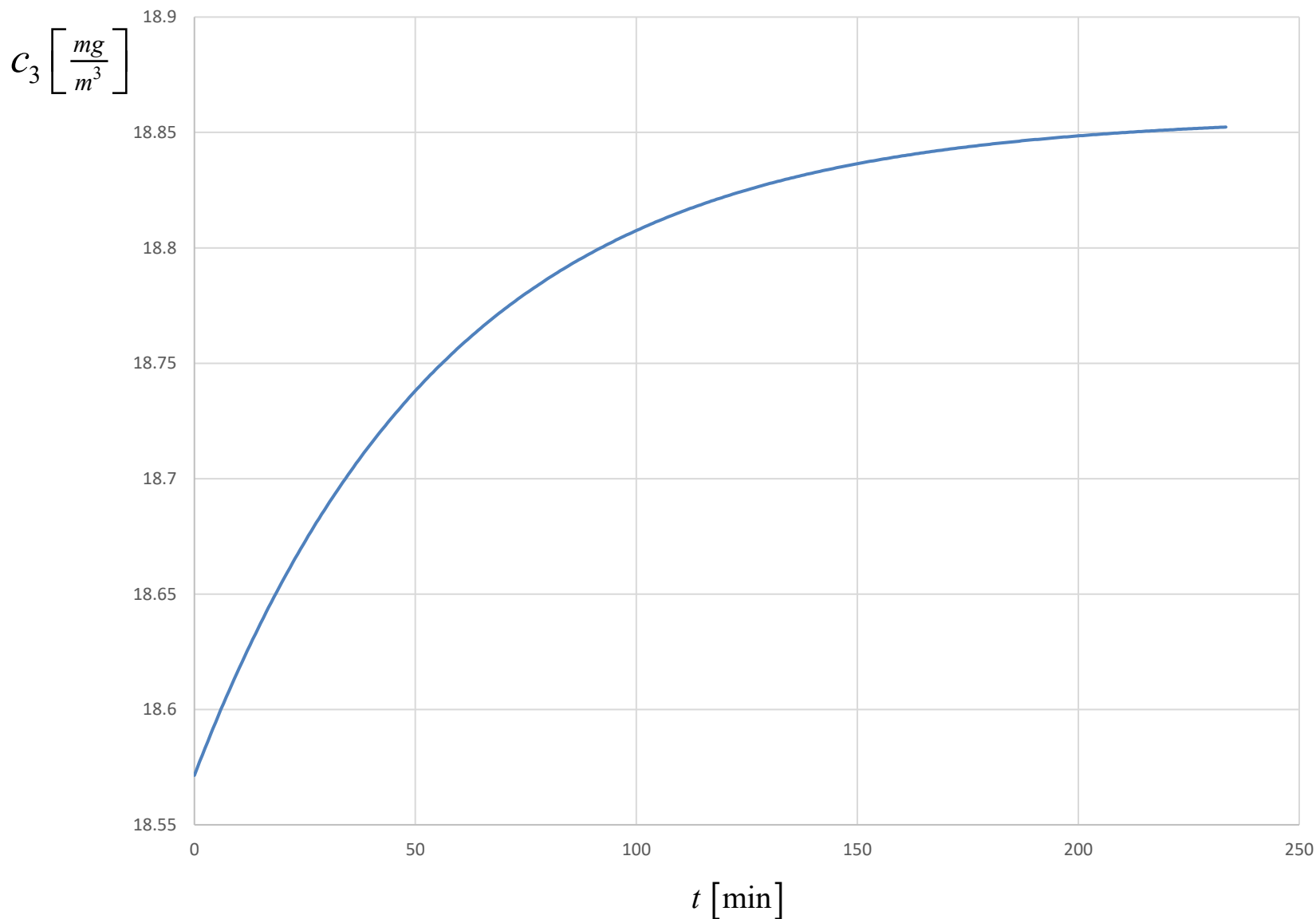
$$V_{liq} = 200m^3$$

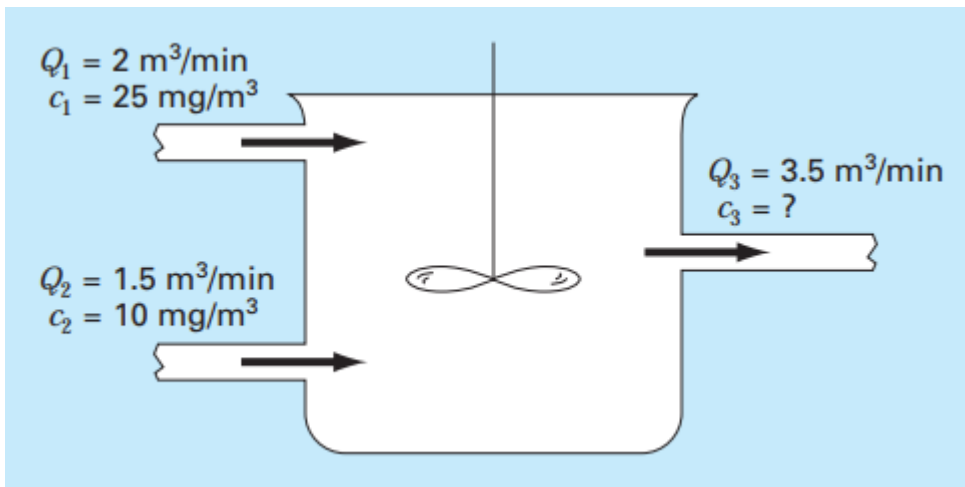
$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

$$c_3(0) = 18.571429$$

$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s + 0.0175)} + \frac{18.571429}{(s + 0.0175)}$$

$$c_3(t) = 18.857143(1 - e^{-0.0175t}) + 18.571429e^{-0.0175t}$$





$$V_{liq} = 200 m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = 65/3.5$$

Caso 2:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% y luego de 20 minutos vuelve a su estado normal (c_2 permanece constante).

$$c_1(t) = 25 + 0.5[H(t) - H(t - 20)] = 25 + 0.5H(t) - 0.5H(t - 20)$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} - e^{-20s} \frac{0.5}{s}$$

$$C_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s + q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s + q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s + q_3)}$$

$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

$$c_3(0) = 18.571429$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} - e^{-20s} \frac{0.5}{s}$$

$$C_2(s) = \frac{10}{s}$$

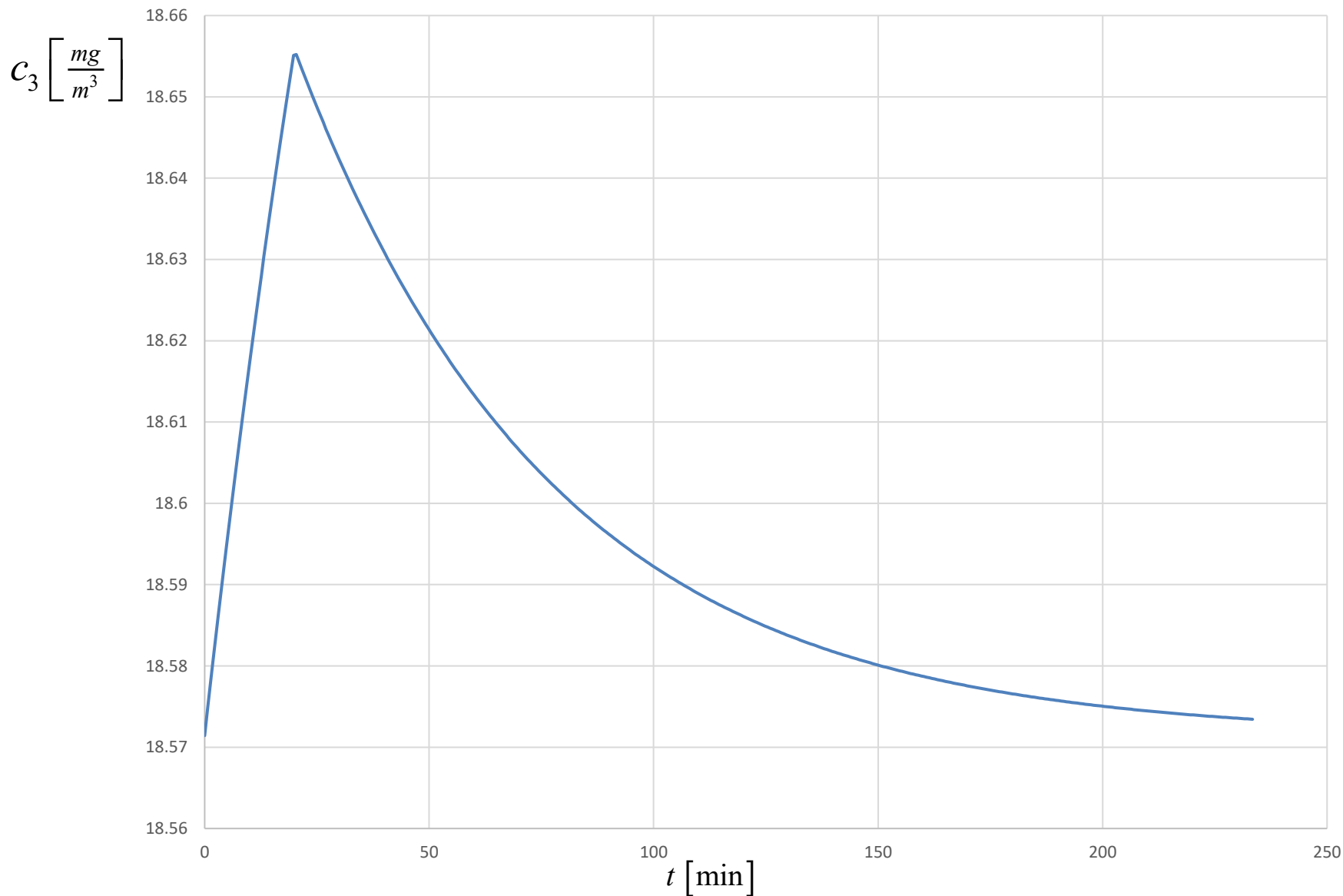
$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s + q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s + q_3)} - e^{-20s} \frac{0.5 q_1}{s(s + q_3)}$$

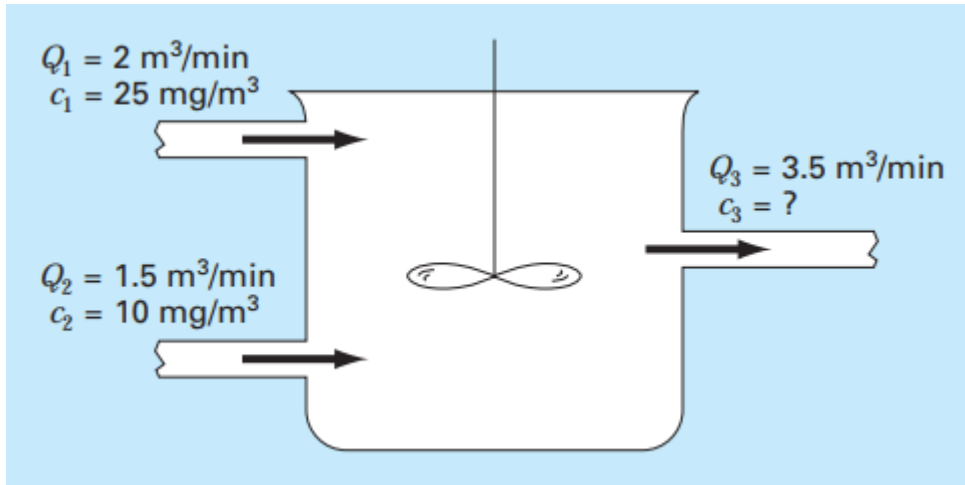
$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s + 0.0175)} + \frac{18.571429}{(s + 0.0175)} - e^{-20s} \frac{0.005}{s(s + 0.0175)}$$

$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s + 0.0175)} + \frac{18.571429}{(s + 0.0175)} - e^{-20s} \frac{0.005}{s(s + 0.0175)}$$

$$c_3(t) = 18.857143(1 - e^{-0.0175t}) + 18.571429e^{-0.0175t} \dots$$

$$\dots - 0.285714(1 - e^{-0.0175(t-20)})H(t - 20)$$





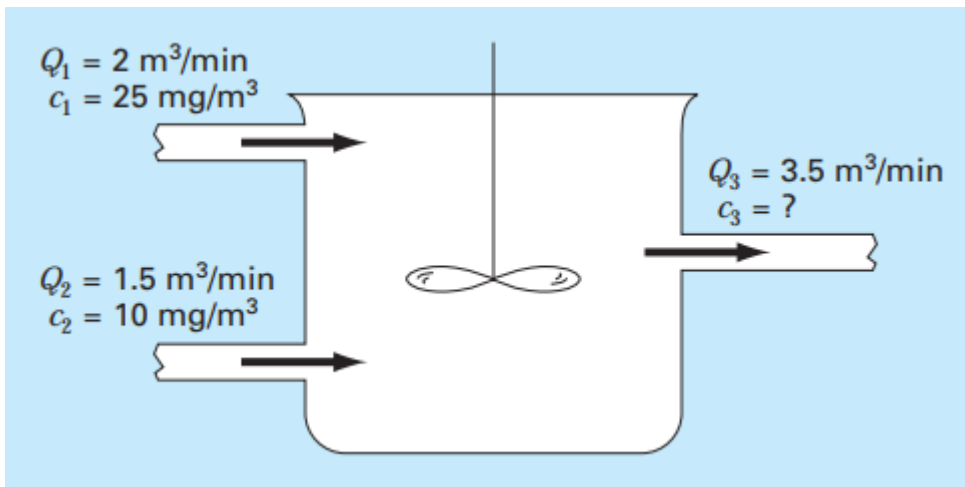
$$\tilde{c} = c - c^0$$

$$\frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1 (\tilde{c}_1 + c_1^0) + q_2 (\tilde{c}_2 + c_2^0) - q_3 (\tilde{c}_3 + c_3^0)$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1 \tilde{c}_1 + q_2 \tilde{c}_2 - q_3 \tilde{c}_3 + q_1 c_1^0 + q_2 c_2^0 - q_3 c_3^0$$

$$\frac{d\tilde{c}_3}{dt} = q_1 \tilde{c}_1 + q_2 \tilde{c}_2 - q_3 \tilde{c}_3$$



$$V_{liq} = 200 m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

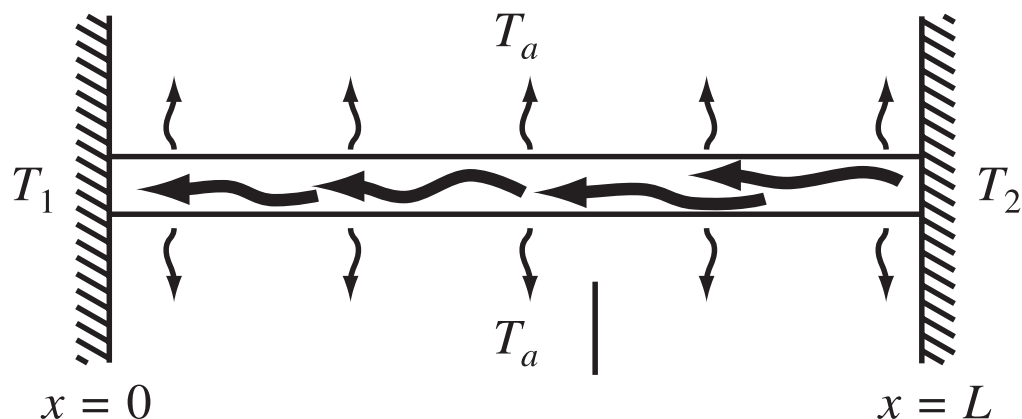
$$\tilde{c} = c - c^0$$

Caso 1:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% (c_2 permanece constante)

$$c_1(t) = 25 + 0.5H(t) \quad \tilde{c}_1 = 25 + 0.5H(t) - 25$$

$$C_1(s) = \frac{25}{s} + \frac{0.5}{s} = \frac{25.5}{s} \quad c_2(t) = 10 \rightarrow C_2(s) = \frac{10}{s}$$



Barra delgada entre dos fuentes a temperatura constante

$$T_a = 20^\circ C$$

$$T_1 = 40^\circ C$$

$$T_2 = 200^\circ C$$

$$h' = 0.01$$

$$L = 10$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

$$T(0) = 40$$

$$T'(0) = ?$$

$$T(10) = 200$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + 0.01(20 - T) = \frac{d^2 T}{dx^2} + 0.2 - 0.01T = 0$$

$$\underbrace{s^2 T(s) - sT(0) - T'(0)}_{\text{Laplace transform of } d^2T/dx^2} + \frac{0.2}{s} - \underbrace{0.01T(s)}_{\text{Laplace transform of } T} = 0$$

$$s^2 T(s) - sT(0) - T'(0) + \frac{0.2}{s} - 0.01T(s) = 0$$

$$T(0) = 40$$

$$T'(0) = ?$$

$$T(10) = 200$$

$$s^2 T(s) - s \cdot 40 - T'(0) + \frac{0.2}{s} - 0.01T(s) = 0$$

$$T(s)(s^2 - 0.01) - s \cdot 40 - T'(0) + \frac{0.2}{s} = 0$$

$$T(s) = -\frac{0.2}{s(s^2 - 0.01)} + \frac{T'(0)}{(s^2 - 0.01)} + 40 \frac{s}{(s^2 - 0.01)}$$

$$T(s) = -\frac{0.2}{s(s^2 - 0.1^2)} + \frac{T'(0)}{(s^2 - 0.1^2)} + 40 \frac{s}{(s^2 - 0.1^2)}$$

$$T(s) = -\frac{0.2}{s(s + 0.1)(s - 0.1)} + \frac{T'(0)}{(s + 0.1)(s - 0.1)} + 40 \frac{s}{(s + 0.1)(s - 0.1)}$$

$$T(s) = -\frac{0.2}{s(s+0.1)(s-0.1)} + \frac{T'(0)}{(s+0.1)(s-0.1)} + 40 \frac{s}{(s+0.1)(s-0.1)}$$

$$-0.2 \frac{1}{(s-0)(s-(-0.1))(s-0.1)} \rightarrow -0.2 \frac{(0.1+0.1)e^{0t} + (0-0.1)e^{-0.1t} + (-0.1-0)e^{0.1t}}{(0+0.1)(-0.1-0.1)(0.1-0)}$$

$$-0.2 \frac{0.2 - 0.1e^{-0.1t} - 0.1e^{0.1t}}{0.1(-0.2)0.1} = 0.2 \frac{0.2 - 0.1e^{-0.1t} - 0.1e^{0.1t}}{0.002} = 20 - 10e^{-0.1t} - 10e^{0.1t}$$

$$T(s) = -\frac{0.2}{s(s+0.1)(s-0.1)} + \frac{T'(0)}{(s+0.1)(s-0.1)} + 40\frac{s}{(s+0.1)(s-0.1)}$$

$$\frac{T'(0)}{(s-(-0.1))(s-0.1)} - \frac{T'(0)}{-0.1-0.1}(e^{-0.1t} - e^{0.1t}) - 5T'(0)e^{-0.1t} + 5T'(0)e^{0.1t}$$

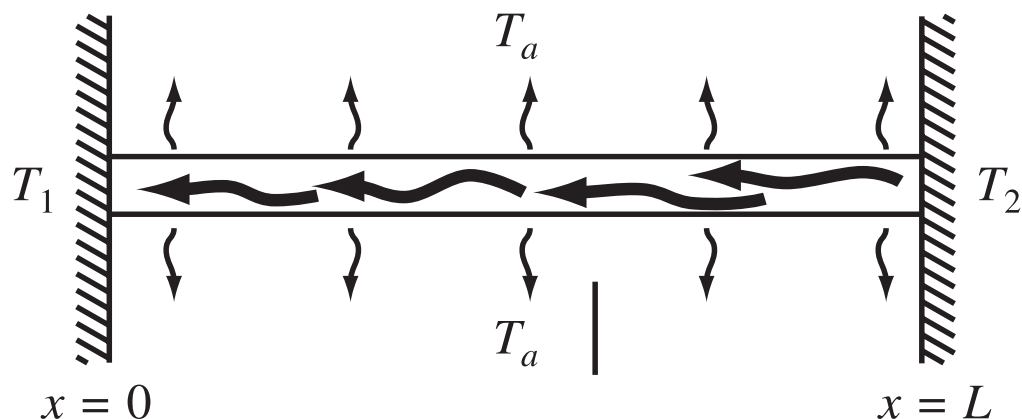
$$40\frac{s}{(s-(-0.1))(s-0.1)} - \frac{40}{-0.1-0.1}(-0.1e^{-0.1t} - 0.1e^{0.1t}) = 20e^{-0.1t} + 20e^{0.1t}$$

$$T(s) = -\frac{0.2}{s(s+0.1)(s-0.1)} + \frac{T'(0)}{(s+0.1)(s-0.1)} + 40\frac{s}{(s+0.1)(s-0.1)}$$

$$= 20 - 10e^{-0.1t} - 10e^{0.1t} - 5T'(0)e^{-0.1t} + 5T'(0)e^{0.1t} + 20e^{-0.1t} + 20e^{0.1t}$$

$$= 20 + (-10 - 5T'(0) + 20)e^{-0.1t} + (-10 + 5T'(0) + 20)e^{0.1t}$$

$$T(x) = 20 + (10 - 5T'(0))e^{-0.1x} + (10 + 5T'(0))e^{0.1x}$$



Barra delgada entre dos fuentes a temperatura constante

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - 0.15T = 0$$

$$T(0) = 240$$

$$T'(0) = ?$$

$$T(10) = 150$$

$$T_a = 0$$

$$T_1 = 240^\circ C$$

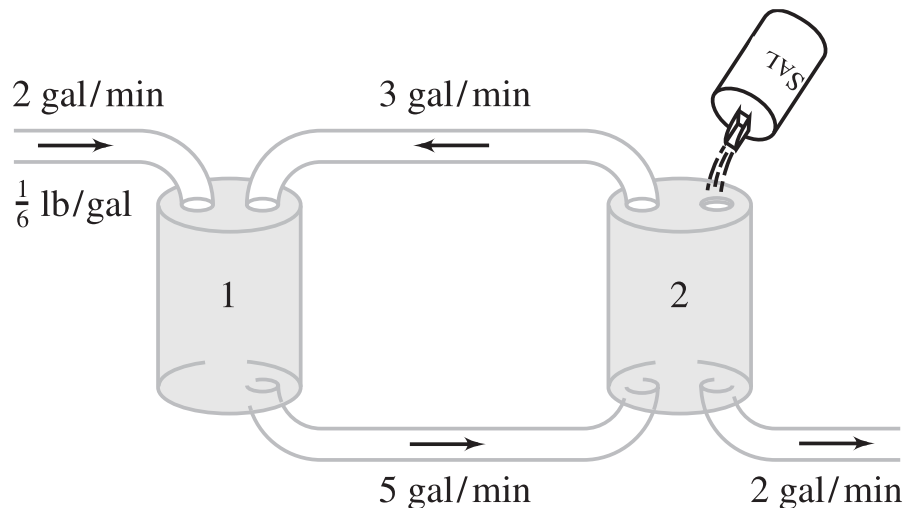
$$T_2 = 150^\circ C$$

$$h' = 0.15$$

$$L = 10$$

$$s^2 T(s) - sT(0) - T'(0) - 0.15T(s) = 0$$

$$T(s) = 240 \frac{s}{(s^2 - 0.15)} + T'(0) \frac{1}{(s^2 - 0.15)}$$



$$V_1(0) = 60 \text{ gal} \quad c_1(0) = \frac{11}{60} \text{ lb/gal}$$

$$V_2(0) = 18 \text{ gal} \quad c_2(0) = \frac{7}{18} \text{ lb/gal}$$

Cuatro minutos después del tiempo cero, se vierte sal en el tanque 2 a razón de **11 libras por minuto por un periodo de 2 minutos**.

$$60 \frac{dc_1}{dt} = 2 \frac{1}{6} + 3c_2 - 5c_1 \quad \text{Tanque 1}$$

$$18 \frac{dc_2}{dt} = 5c_1 - 3c_2 - 2c_2 + \text{sal} \quad \text{Tanque 2}$$

$$f(t) = 1 + 5t + 3t^2$$

$$g(t) = e^{4t} (1 + 5t + 3t^2)$$

$$p(t) = \underbrace{H(t-2)}_{\text{Heaviside}} (1 + 5(t-2) + 3(t-2)^2)$$

$$F(s) = \frac{5}{s+8}$$

$$G(s) = e^{-2s} \frac{5}{s+2} 8$$