MATEMÁTICA SUPERIOR APLICADA

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Ejemplos de Resolución de SEAL mediante Métodos Iterativos

Método de Jacobi

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \\ -x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Despejando $x_1$de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera, se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.50 + 0.25x_2 \\ x_2 &= 1.50 + 0.25x_1 + 0.25x_3 \\ x_3 &= 0.50 + 0.25x_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

O sea,

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.50 + 0.25x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1.50 + 0.25x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 0.50 + 0.25x_2^{(k)} \end{aligned} \qquad (3)$$

Considérese como aproximación inicial al vector: $\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, esto es:

$$x_1^{(0)} = 0 \;\; ; \;\; x_2^{(0)} = 0 \;\; ; \;\; x_3^{(0)} = 0$$

Este primer valor de solución puede tener cualquier valor, y entre más cercano a sea al valor supuesto con respecto al valor final, la convergencia será más rápida.

En general no se conocen los signos de los resultados y por esta razón se escoge el vector inicial supuesto igual a cero. Sustituyendo en el Sistema (3), haciendo $k=0$, se obtiene:

$$x_1^{(1)} = 0.50 + 0.25(0) = 0.50$$

$$x_2^{(1)} = 1.50 + 0.25(0) + 0.25(0) = 1.50 \;\; ; \;\; \underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 1.50 \\ 0.50 \end{pmatrix}$$

$$x_3^{(1)} = 0.50 + 0.25(0) = 0.50$$

Siguiendo en igual forma las iteraciones, resulta:

$$x_1^{(2)} = 0.50 + 0.25\left(1.50\right) = 0.875$$

$$x_2^{(2)} = 1.50 + 0.25\left(0.50\right) + 0.25\left(0.50\right) = 1.750 \;\; ; \;\; \underline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 1.750 \\ 0.875 \end{pmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = 0.50 + 0.25\left(1.50\right) = 0.875$$

Siguiendo de igual forma las iteraciones, resulta:

$$\underline{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.938 \\ 1.940 \\ 0.938 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \underline{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.985 \\ 1.970 \\ 0.985 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \underline{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.995 \\ 1.990 \\ 0.995 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.998 \\ 2.000 \\ 0.998 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \underline{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 1.000 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \underline{x}^{(8)} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema es:

$$x_1 = 1 \;\; ; \;\; x_2 = 2 \;\; ; \;\; x_3 = 1$$

El método de Jacobi presentado se usa muy poco en la práctica. Esto se debe a que el método iterativo que se establecerá a continuación siempre converge cuando el de Jacobi no lo hace, y en general converge más rápidamente que el método de Jacobi.

Método de Gauss-Seidel

Este método es en general idéntico al de Jacobi; la diferencia consiste en que una vez que se calcula la componente $x_i^{(k+1)}$, se usa inmediatamente en la misma iteración. Por esta razón el método de Gauss-Seidel también se llama de *iteraciones parciales* o *desplazamientos sucesivos*. Para el ejemplo anterior resulta:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.50 + 0.25 x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1.50 + 0.25 x_1^{(k+1)} + 0.25 x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 0.50 + 0.25 x_2^{(k+1)} \end{aligned} \qquad (4)$$

Si consideramos como aproximación inicial al vector $\underline{x}^{(0)} = \left[0 \quad 0 \quad 0\right]^T$, se obtiene la primera iteración:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.50 + 0.25\left(0\right) = 0.50 \\
x_2^{(1)} &= 1.50 + 0.25\left(0.50\right) + 0.25\left(0\right) = 1.63 \\
x_3^{(1)} &= 0.50 + 0.25\left(1.63\right) = 0.91
\end{aligned} \tag{5}
$$

La segunda iteración es:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= 0.50 + 0.25\left(1.63\right) = 0.91 \\
x_2^{(2)} &= 1.50 + 0.25\left(0.91\right) + 0.25\left(0.91\right) = 1.96 \\
x_3^{(2)} &= 0.50 + 0.25\left(1.96\right) = 0.99
\end{aligned} \tag{6}
$$

Siguiendo en igual forma, se obtiene:

$$
\underline{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 2.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \underline{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \underline{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} \tag{7}
$$

Obsérvese que con este método se ha llegado a la solución del sistema en cinco iteraciones, mientras que con el de Jacobi se llegaba a la solución en la octava iteración.