

Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias (EDOs I)

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si $y = f(x)$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la
variable dependiente
respecto de la independiente

La denominación de “ordinaria” se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Expresión implícita:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Orden: máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Grado: grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Lineal: la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

No Lineal: la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$$y' - \cos(\omega x) = 0$$

EDO lineal de 1er orden y 1er grado

$$y'' + k^2 y = 0$$

EDO lineal de 2do orden y 1er grado

$$(y'')^3 - xyy' + y = 0$$

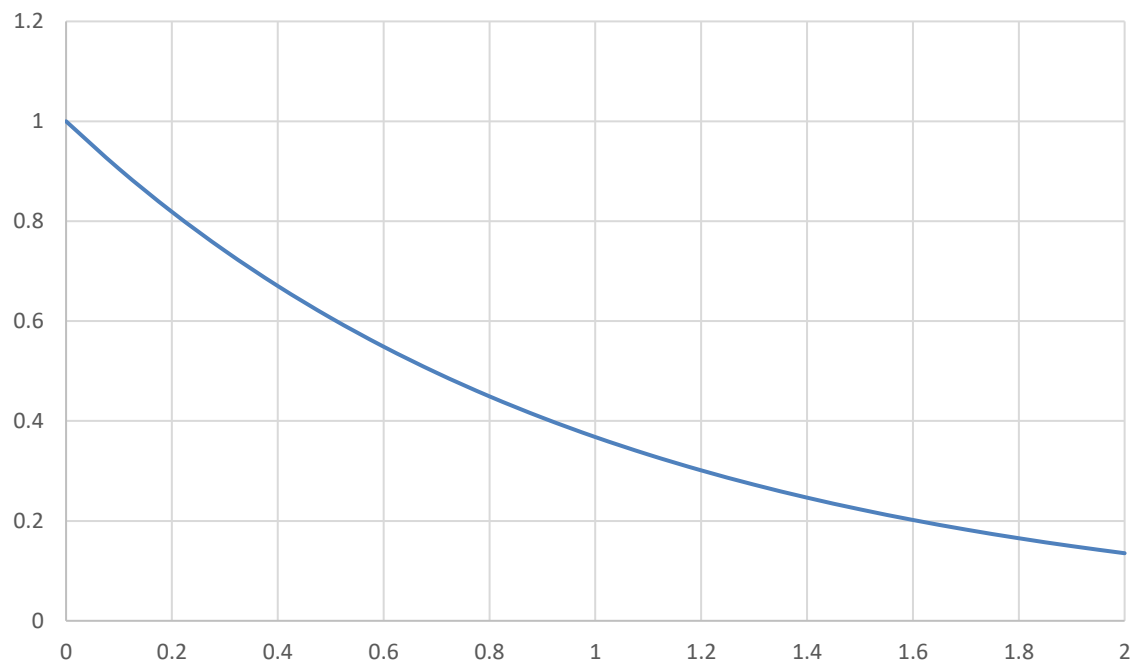
EDO no lineal de 2do orden y 3er grado

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Diremos que una función $y: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada n -ésima de y en todo punto del intervalo $[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \quad y = e^{-x}$$



Para encontrar $y(x)$ (solución) es necesario efectuar n integraciones, lo cual implica que deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1} \end{array} \right.$$

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \quad x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{array} \right.$$

El problema de valores iniciales para una EDO de primer orden corresponde a:

Ejemplo

$$\begin{cases} f(x, y, y') = 0 & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{Forma Implícita} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2\sqrt{3y} = 0 & x \in [0, 3] \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{Forma Explícita} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2\sqrt{3y} & x \in [0, 3] \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

Las EDOs de orden n se pueden transformar en n EDOs de 1er orden mediante un cambio de variables:

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \quad \text{EDO original}$$

$$\left. \begin{array}{l} y \\ y' = y_1 \\ y'' = y_1' \rightarrow y_1' = y_2 \\ y''' = y_1'' = y_2' \rightarrow y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y^{n-1} = y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y^n = y'_{n-1} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_{n-1} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Nos interesan los métodos para resolver EDOs de 1er orden

Sistema de n EDOs de 1er orden equivalente

Ejemplo:

Una EDO de orden 2 se puede transformar en 2 EDOs de 1er orden mediante un cambio de variables.

$$y'' = 2x + y + y' \quad \text{EDO original} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2x + y + \frac{dy}{dx}$$

Definimos una nueva función z:

$$z = y'$$

$$y'' = z'$$

Dos EDOs de 1er orden:

$$\begin{cases} z' = 2x + y + z \\ y' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + y + z & x \in [a, b] \\ \frac{dy}{dx} = z & y(a) = \alpha \\ & z(a) = \beta \end{cases}$$

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \\ F_2(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \end{cases}$$

Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

Problema de Valores de Contorno:

- Deben establecerse condiciones en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio.
- En el espacio o dominio unidimensional hay dos puntos frontera, en $x=a$ y $x=b$ si el dominio es el intervalo cerrado $[a,b]$.
- El orden mínimo de una EDO para un problema de valores de frontera es $n=2$.

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^n\right) = 0$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

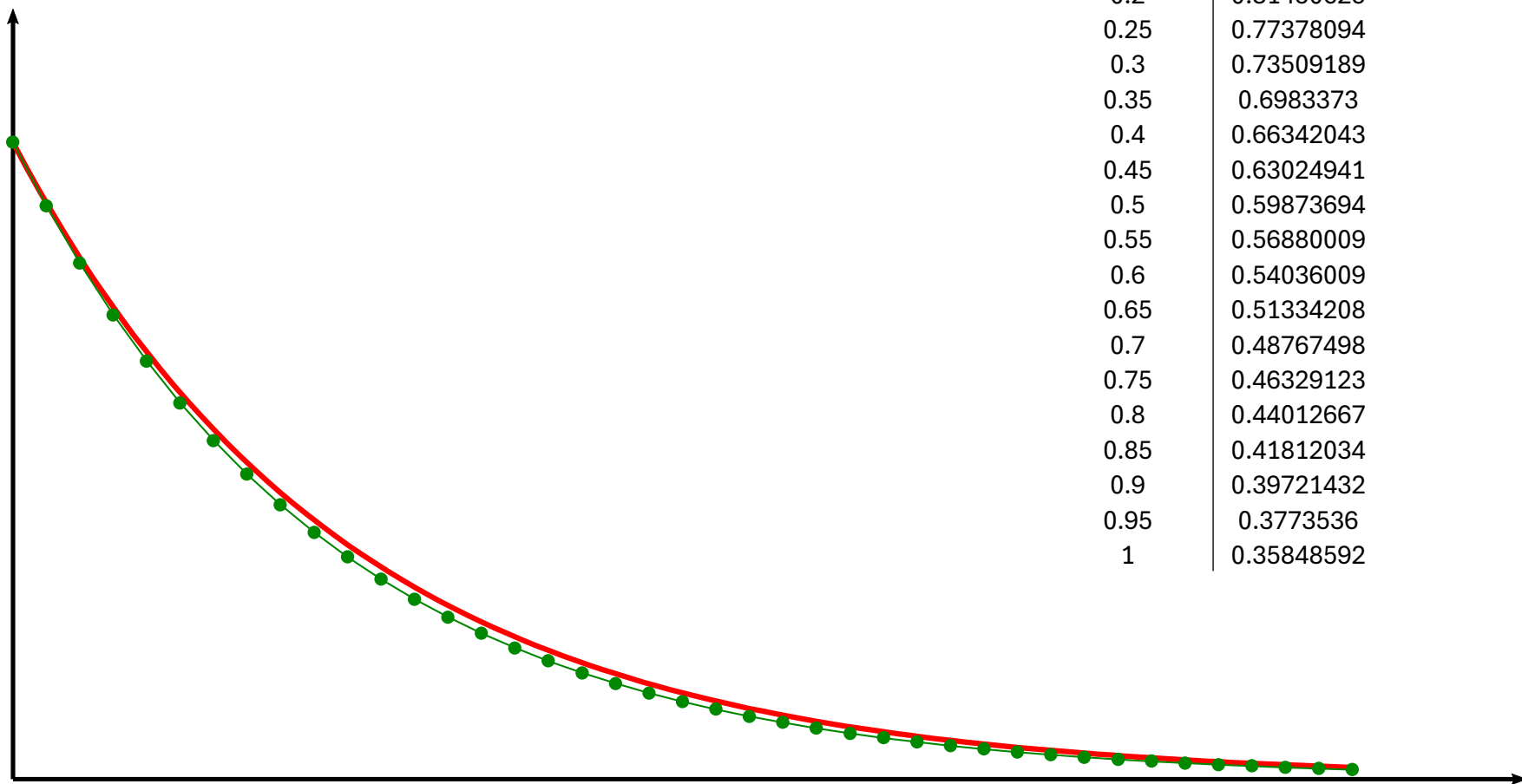
- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$y = e^{-x}$$

x	y
0	1
0.05	0.95
0.1	0.9025
0.15	0.857375
0.2	0.81450625
0.25	0.77378094
0.3	0.73509189
0.35	0.6983373
0.4	0.66342043
0.45	0.63024941
0.5	0.59873694
0.55	0.56880009
0.6	0.54036009
0.65	0.51334208
0.7	0.48767498
0.75	0.46329123
0.8	0.44012667
0.85	0.41812034
0.9	0.39721432
0.95	0.3773536
1	0.35848592



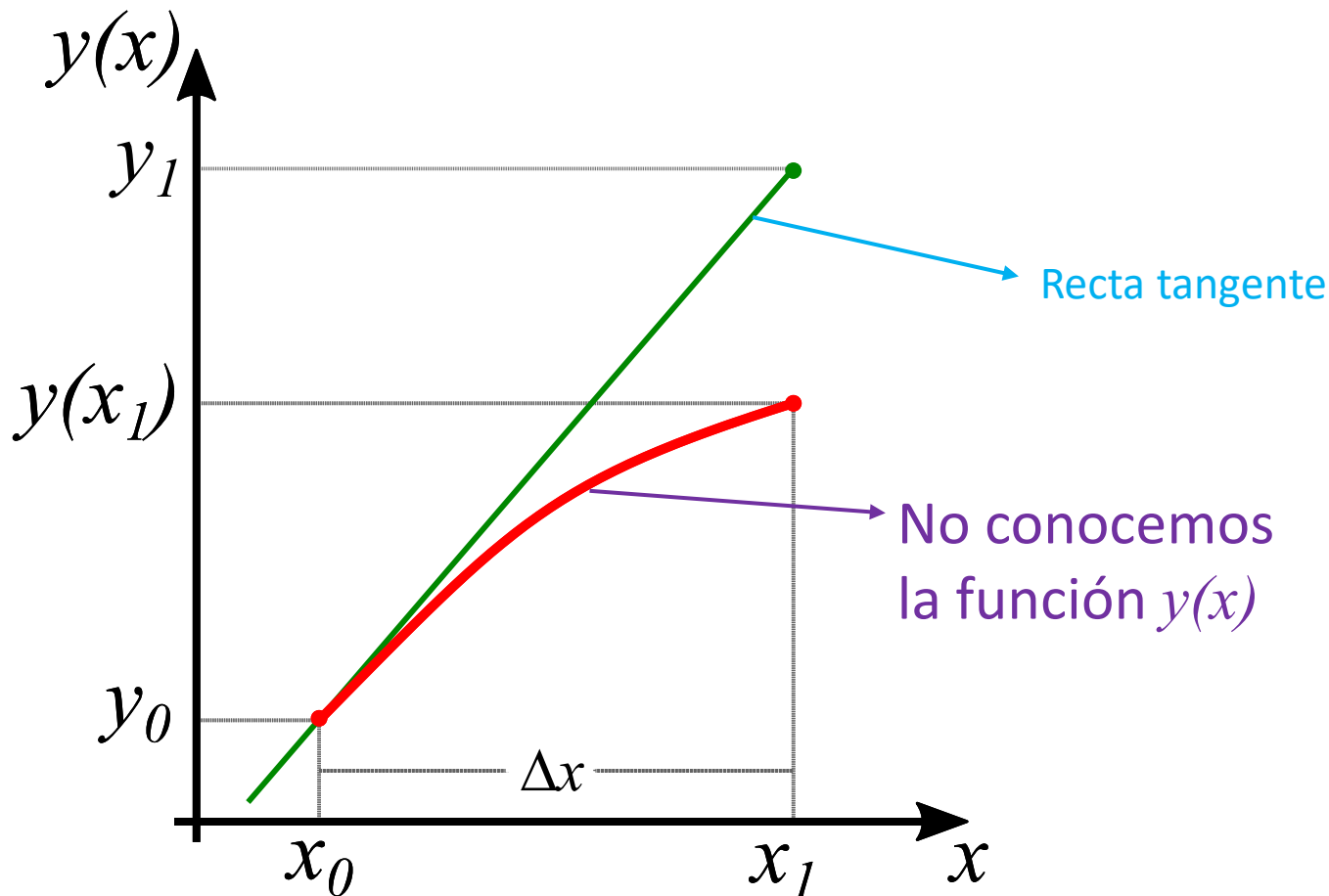
- Evaluación explícita de $f(x, y(x))$ y sus derivadas.
- Avance paso a paso en el tiempo sin utilizar procedimientos iterativos.
- Métodos más difundidos:
 - Euler
 - Taylor de orden superior
 - Runge – Kutta

Ventajas

- Sencillo
- Programación rápida
- Bueno para h del orden $< 0,1$

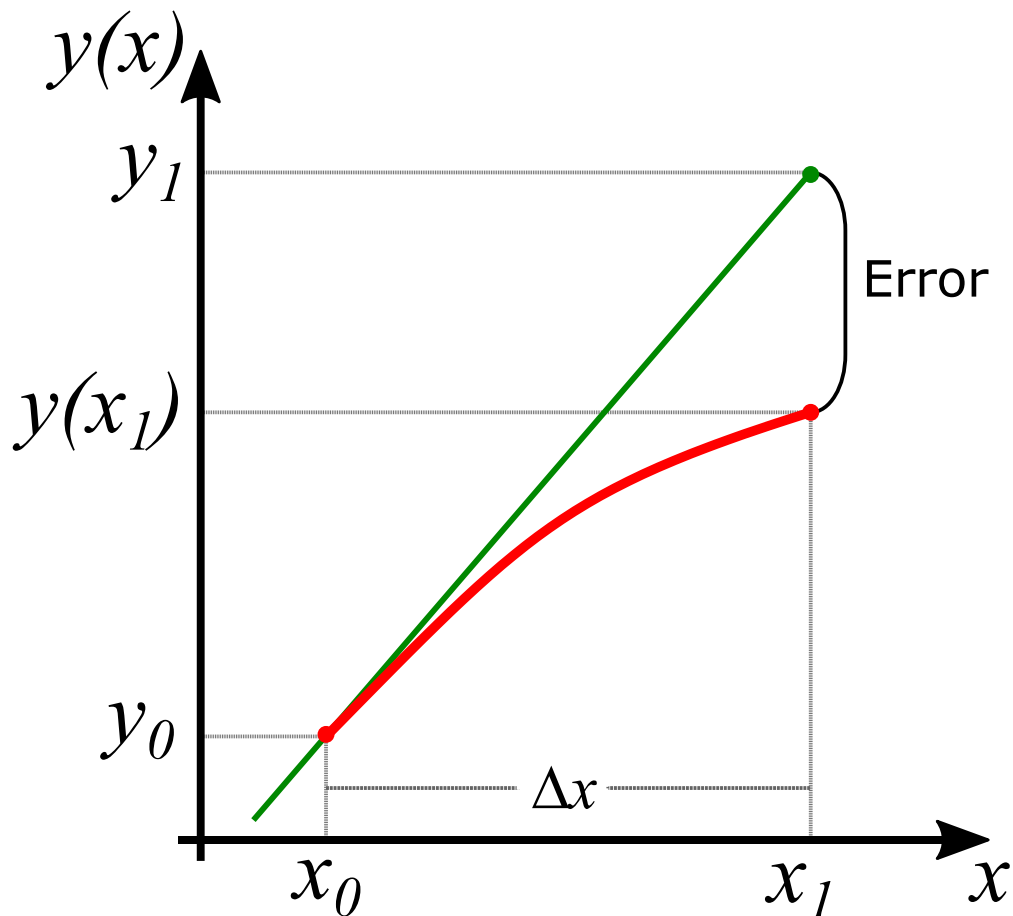
Desventajas

- Dada su inexactitud suele tener limitaciones en algunos problemas prácticos.
- Inestabilidad para Δx grande



$$y' = f(x, y)$$

No se conoce la función y pero conocemos su derivada
¿Cómo se podemos estimar el valor de la función en x_1 ?

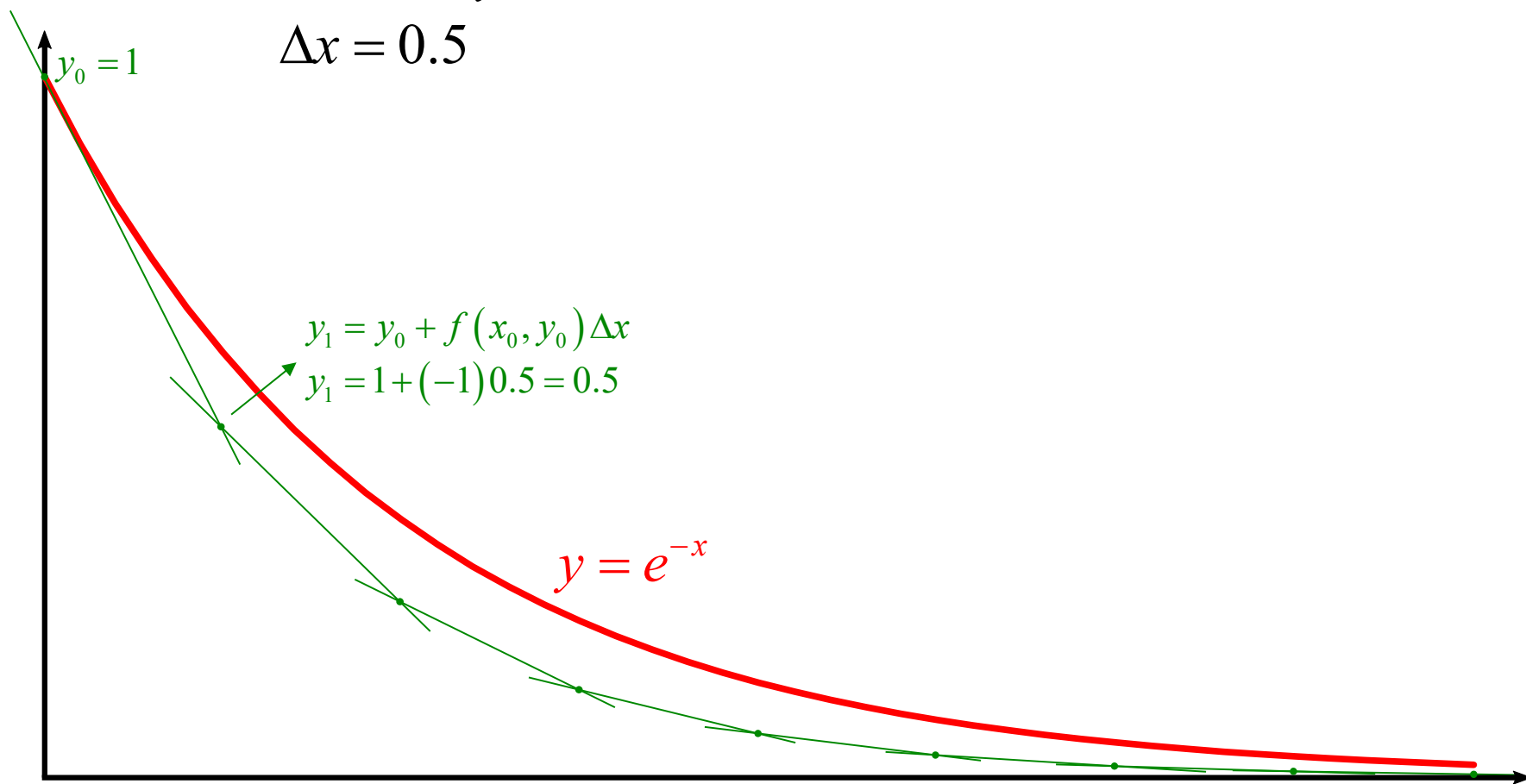


Algoritmo:
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$$

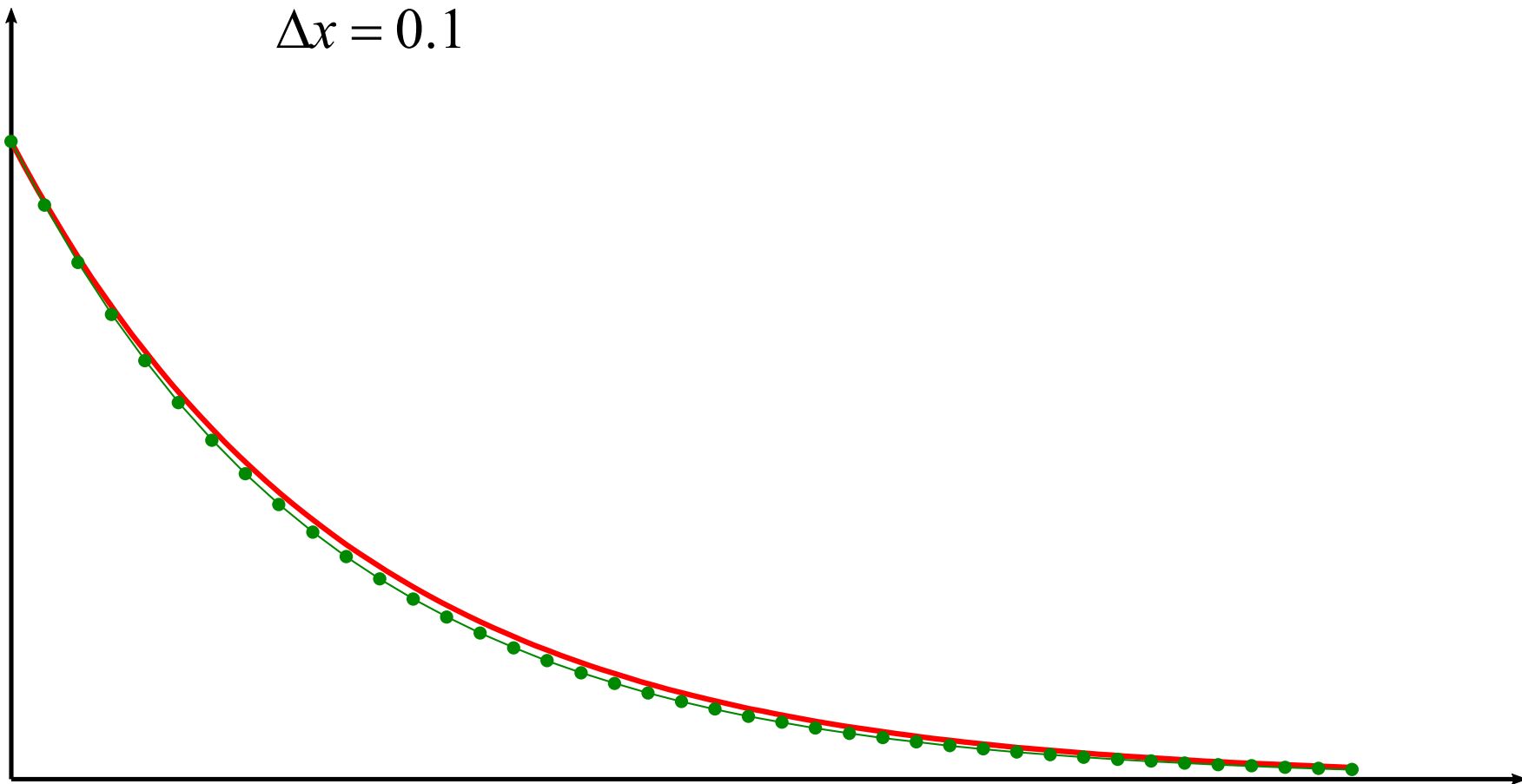
Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = -y$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$\Delta x = 0.5$



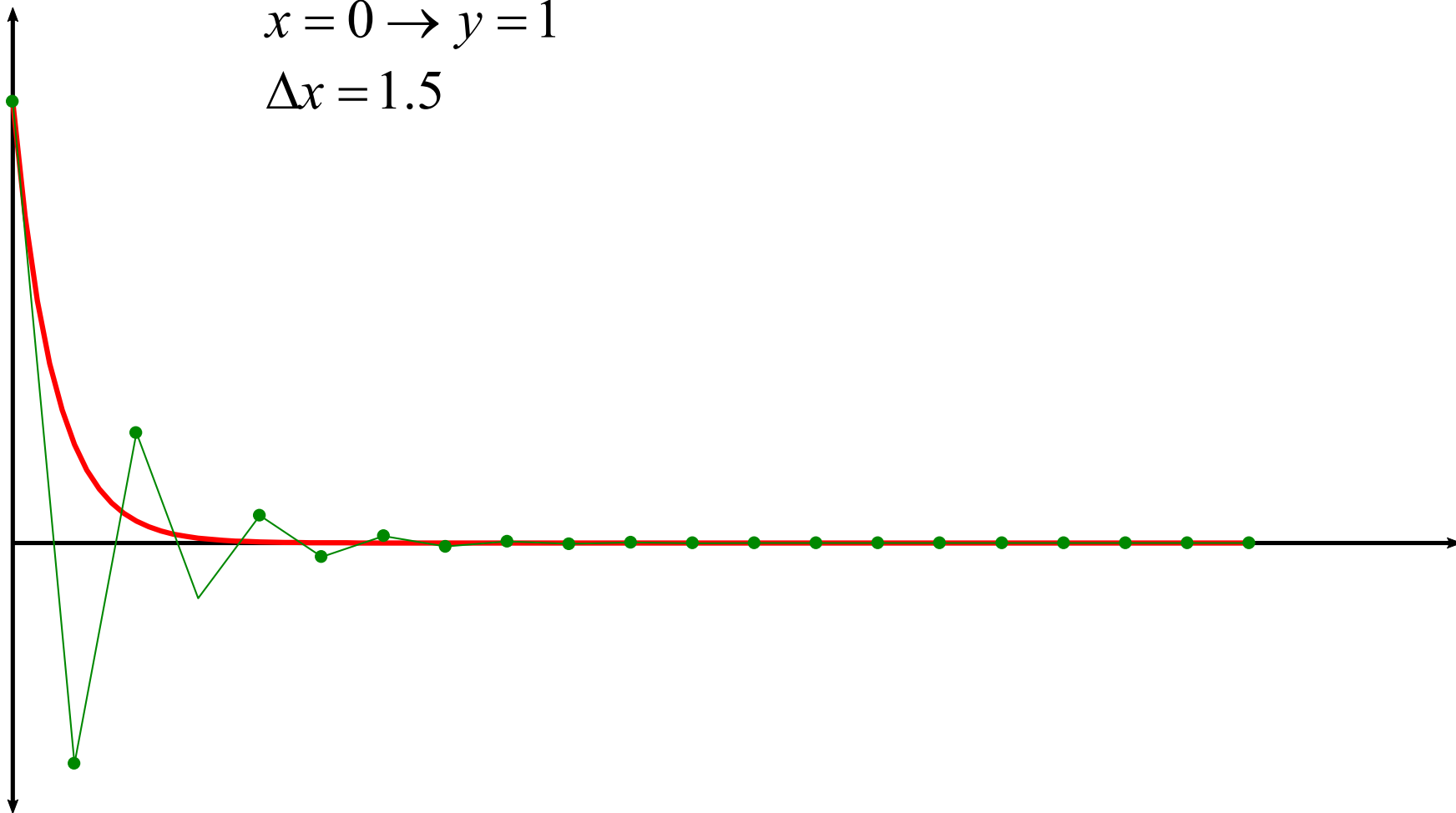
Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = -y$
 $x = 0 \rightarrow y = 1$
 $\Delta x = 0.1$



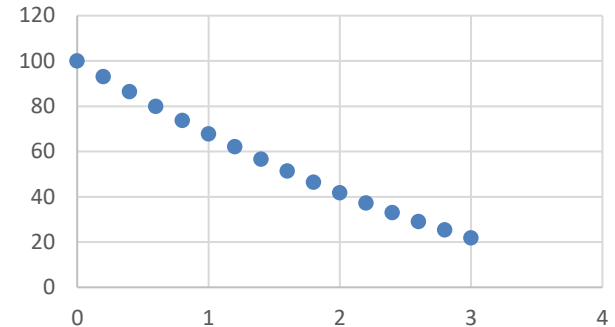
Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = -y$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$\Delta x = 1.5$



$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2\sqrt{3}y & x \in [0, 3] \\ y(0) = 100 \end{cases}$$



$\Delta x = 0.2$

i	x	y	y'
0	0	100	-34.64102
1	0.2	93.07180	-33.41948
2	0.4	86.38790	-32.19712
3	0.6	79.94848	-30.97389
4	0.8	73.75370	-29.74970
5	1	67.80376	-28.52447
6	1.2	62.09887	-27.29810
7	1.4	56.63925	-26.07050
8	1.6	51.42515	-24.84153
9	1.8	46.45684	-23.61106
10	2	41.73463	-22.37891
11	2.2	37.25885	-21.14488
12	2.4	33.02987	-19.90875
13	2.6	29.04812	-18.67023
14	2.8	25.31407	-17.42897
15	3	21.82828	-16.18454

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx} \right)_i \Delta x$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + y + z & x \in [0, 2] \\ \frac{dy}{dx} = z & y(0) = 1 \\ & z(0) = 1 \end{cases}$$

i	x	y	z	y'	z'	$\Delta x = 0.1$
0	0	1	1	1	2	
1	0.1	1.10000	1.20000	1.20000	2.50000	
2	0.2	1.22000	1.45000	1.45000	3.07000	
3	0.3	1.36500	1.75700	1.75700	3.72200	
4	0.4	1.54070	2.12920	2.12920	4.46990	
5	0.5	1.75362	2.57619	2.57619	5.32981	
6	0.6	2.01124	3.10917	3.10917	6.32041	
7	0.7	2.32216	3.74121	3.74121	7.46337	
8	0.8	2.69628	4.48755	4.48755	8.78383	
9	0.9	3.14503	5.36593	5.36593	10.31096	
10	1	3.68163	6.39703	6.39703	12.07865	
11	1.1	4.32133	7.60489	7.60489	14.12622	
12	1.2	5.08182	9.01752	9.01752	16.49933	
13	1.3	5.98357	10.66745	10.66745	19.25102	
14	1.4	7.05031	12.59255	12.59255	22.44286	
15	1.5	8.30957	14.83684	14.83684	26.14641	
16	1.6	9.79325	17.45148	17.45148	30.44473	
17	1.7	11.53840	20.49595	20.49595	35.43435	
18	1.8	13.58800	24.03939	24.03939	41.22738	
19	1.9	15.99193	28.16212	28.16212	47.95406	
20	2	18.80815	32.95753	32.95753	55.76567	

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + f_1(x_i, y_i, z_i) \Delta x \\ z_{i+1} = z_i + f_2(x_i, y_i, z_i) \Delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx} \right)_i \Delta x \\ z_{i+1} = z_i + \left(\frac{dz}{dx} \right)_i \Delta x \end{cases}$$

