

Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias (EDOs – Scilab - Ejemplos)

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - \sqrt{y} \\ x \in [0, 3] \quad y(0) = 100 \end{cases}$$

```
function f=EDO(x, y)
f=x - sqrt(y);
endfunction
```

```
function [y, x]=EULER(f, x0, xf, dx, y0)
    x=[x0:dx:xf];
    y(:,1)=y0;
    for i=1:length(x)-1
        y(:,i+1) = y(:,i) + dx*f(x(i),y(:,i));
    end
endfunction
```

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$$

```
function [y, x]=RK4(f, x0, xf, dx, y0)
    x=[x0:dx:xf]
    y(:,1)=y0;
    for i=1:length(x)-1
        k1 = f(x(i)      , y(:,i));
        k2 = f(x(i)+0.5*dx , y(:,i)+0.5*dx*k1);
        k3 = f(x(i)+0.5*dx , y(:,i)+0.5*dx*k2);
        k4 = f(x(i)+  dx , y(:,i)+  dx*k3);
        delta = (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
        y(:,i+1) = y(:,i) + dx*delta;
    end
endfunction
```

```
function [y, x]=HEUN(f, x0, xf, dx, y0, N)
    x=[x0:dx:xf];
    y(:,1)=y0;
    for i=1:length(x)-1
        yi = f(x(i),y(:,i));
        y(:,i+1) = y(:,i) + dx*yi;   $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$ 
        for k=1:N
            y(:,i+1) = y(:,i) + 0.5*dx*( f(x(i+1),y(:,i+1)) + yi);
        end
    end
end
endfunction
```

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \right) \Delta x$$

```
function [y, x]=EULERGAUSS(f, x0, xf, dx, y0)
```

```
    x=[x0:dx:xf];
```

```
    y(:,1)=y0;
```

```
    for i=1:length(x)-1
```

```
        yi = f(x(i),y(:,i));
```

```
        y_1 = y(:,i) + dx*yi;
```

```
        y_1p = y(:,i) + 0.5*dx*(f(x(i+1),y_1) + yi);
```

```
        while norm(y_1-y_1p) > 1e-6
```

```
            y_1 = y_1p;
```

```
            y_1p = y(:,i) + 0.5*dx*(f(x(i+1),y_1) + yi);
```

```
        end
```

```
        y(:,i+1) = y_1p;
```

```
    end
```

```
endfunction
```

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \right) \Delta x$$



```
function [y, x]=EULERGAUSS(f, x0, xf, dx, y0)
    x=[x0:dx:xf];
    y(1)=y0;
    for i=1:length(x)-1
        yi = f(x(i),y(i));
        x_0 = y(i) + dx*yi;      Fx_0 = y(i) + 0.5*dx*(f(x(i+1),x_0) + yi);
        x_1 = Fx_0;              Fx_1 = y(i) + 0.5*dx*(f(x(i+1),x_1) + yi);
        for k=1:50
            w = (Fx_1 - Fx_0)./(x_1-x_0);    q = w./(w-1);
            x_2 = q.*x_1+(1-q).*Fx_1;
            if abs(x_2-x_1)<1e-7
                y(i+1) = x_2;
                break
            end
            x_0=x_1;      Fx_0=Fx_1;
            x_1=x_2;      Fx_1 = y(i) + 0.5*dx*( f(x(i+1),x_1) + yi);
        end
    end
endfunction
```



$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - \sqrt{y} \\ x \in [0, 3] \quad y(0) = 100 \end{cases}$$

```
function f=EDO(x, y)
f=x - sqrt(y);
endfunction
```

```
function [y, x]=EULER(f, x0, xf, dx, y0)
```

```
-->[yE,x]=EULER(EDO,0,3,0.2,100);
```

```
-->[yRK,x]=RK4(EDO,0,3,0.2,100);
```

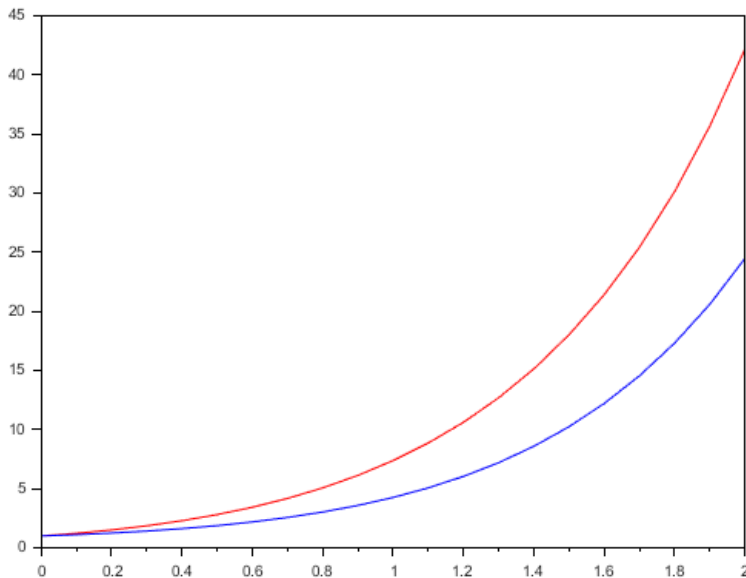
```
-->[yH,x]=HEUN(EDO,0,3,0.2,100,3);
```

```
-->[yEG,x]=EULERGAUSS(EDO,0,3,0.2,100);
```

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + y + z & x \in [0, 2] \\ \frac{dy}{dx} = z & y(0) = 1 \\ & z(0) = 1 \end{cases}$$

```
function f=EDOs(x, y)
f=[2*x + y(2) + y(1)
  y(1)
];
endfunction
```

```
--> [yRK,x]=RK4(EDOs,0,2,0.1,[1 1]')
```



```
--> plot(x,yRK(1,:), 'r')
```

```
--> plot(x,yRK(2,:), 'b')
```

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{ingresa al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{abandona el sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de la masa dentro del sistema} \end{array} \right]$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

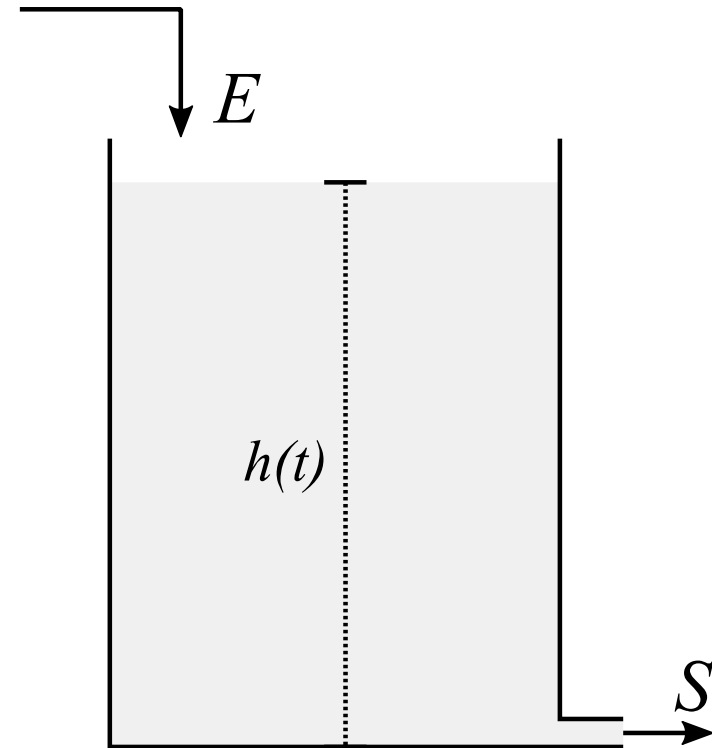
$$\left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right]$$

Las unidad de esta ecuación es moles/tiempo

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



- Balance de materia en el tanque: **Acumulación = Entrada – Salida**

$\xrightarrow{\text{HOLDUP de materia}}$

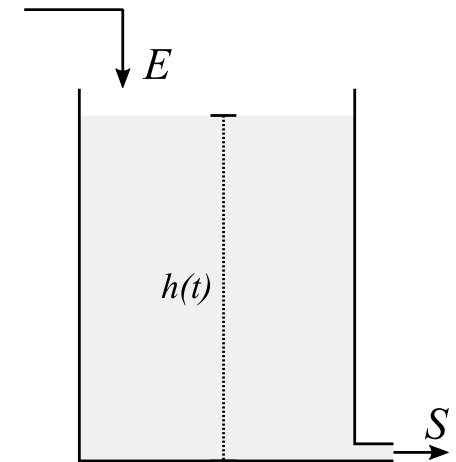
$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

$M \rightarrow$ Masa de fluido dentro del tanque
 $m_e \rightarrow$ Flujo masico de entrada de fluido
 $m_s \rightarrow$ Flujo masico de salida de fluido

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

ρ cte
 A_T cte



$$m_e = \rho E \quad E \rightarrow \text{Caudal volumetrico de entrada}$$

$$m_s = \rho S \quad S \rightarrow \text{Caudal volumetrico de salida}$$

$$m_s = \rho A_s v_s \quad A_s \rightarrow \text{Area de salida del tanque}$$

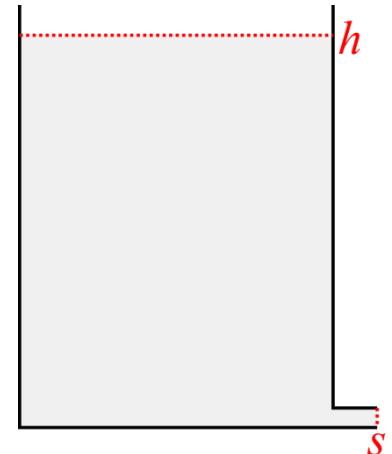
$$v_s \rightarrow \text{velocidad de salida del tanque}$$

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{v_h^2 \rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho gh = \frac{v_s^2 \rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho gh_s}$$

$v_h = 0$ $P_h = P_s$ $h_s = 0$

$$\rho gh = \frac{v_s^2 \rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$



Luego: $\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

EDO

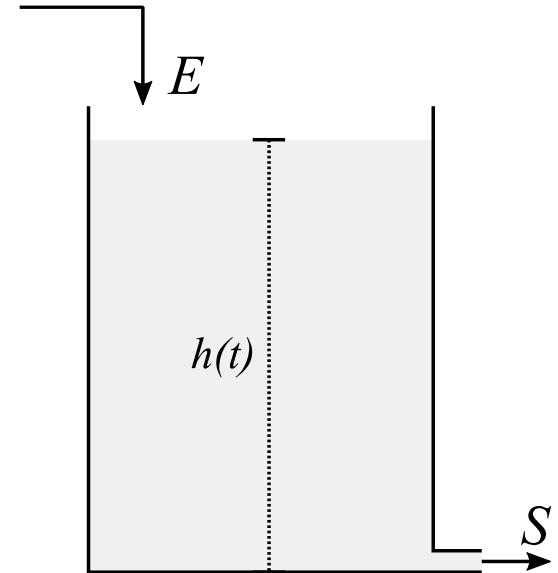
$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$t = 0 \rightarrow h = h_0$ (problema de valor inicial)

Ejemplo practico:

- Vaciado del tanque ($E=0$)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos



$$A_T = \frac{\pi D_T^2}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_T \frac{dh}{dt} = -A_s \sqrt{2gh} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi D_T^2}{4} \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^2}{4} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^2}{D_T^2} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

```
function f=EDO1(t, h)
```

```
    E = 0;
```

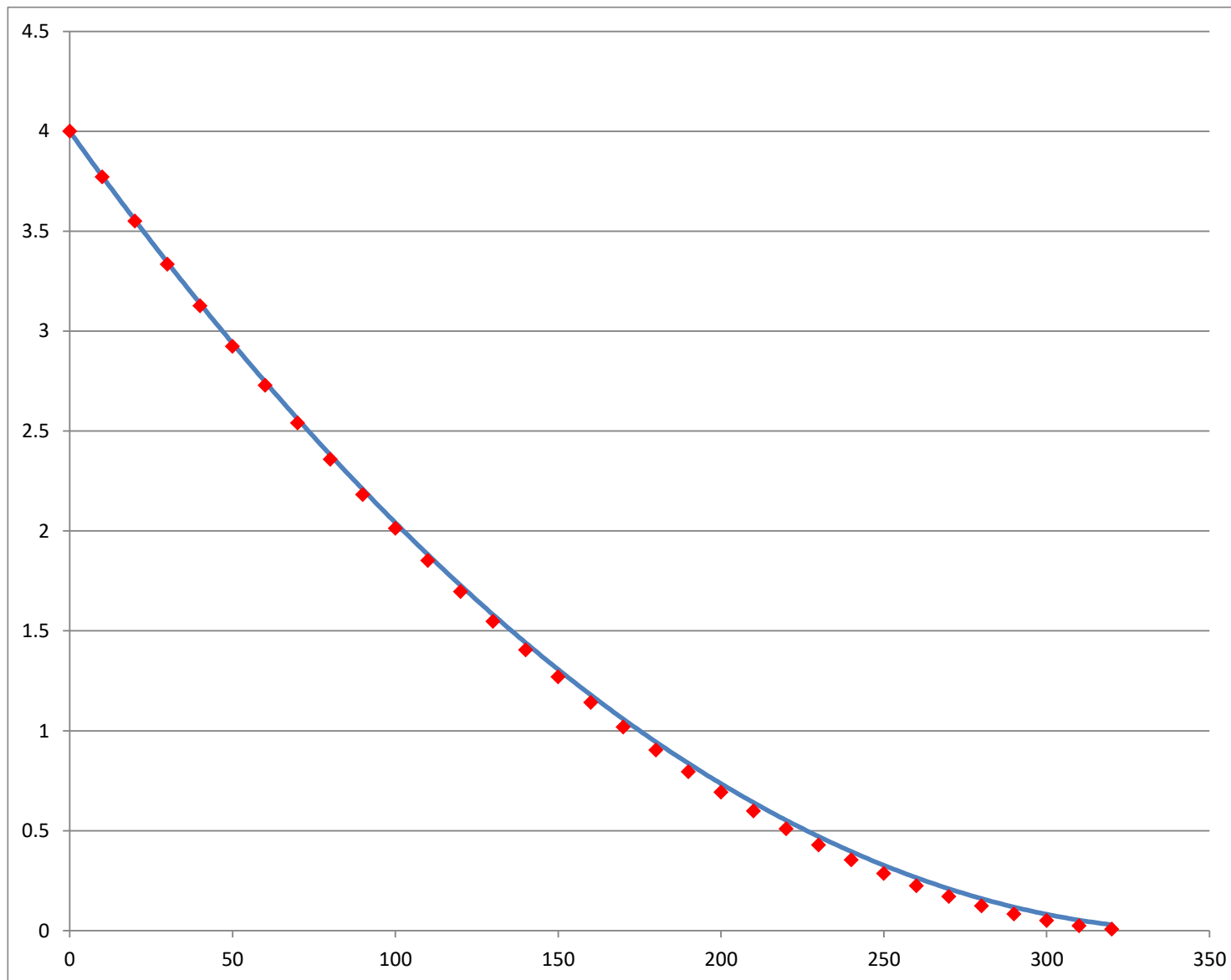
```
    At = %pi * 1^2 / 4;
```

```
    As = %pi * 0.0508^2 / 4;
```

```
    g = 9.8; // m.seg-2
```

```
    f = E / At - As / At * sqrt(2 * g * h);
```

```
endfunction
```



22.16 A spherical tank has a circular orifice in its bottom through which the liquid flows out (Fig. P22.16). The flow rate through the hole can be estimated as

$$Q_{\text{out}} = C A \sqrt{2gh}$$

where Q_{out} = outflow (m^3/s), C = an empirically derived coefficient, A = the area of the orifice (m^2), g = the gravitational constant ($= 9.81 \text{ m/s}^2$), and h = the depth of liquid in the tank. Use one of the numerical methods described in this chapter to determine how long it will take for the water to flow out of a 3-m diameter tank with an initial height of 2.75 m. Note that the orifice has a diameter of 3 cm and $C = 0.55$.

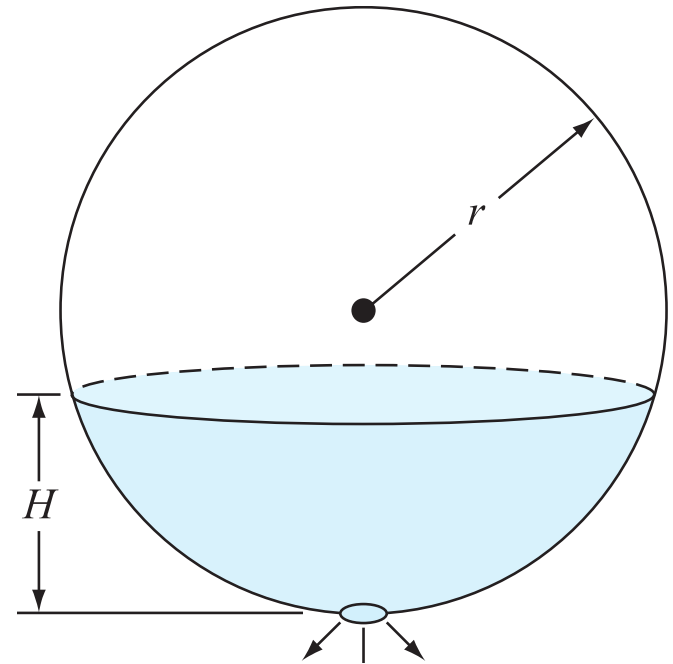
$$\frac{dM}{dt} = \cancel{m_{in}} - m_{out}$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 3r - \rho \frac{1}{3} \pi H^3$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{1}{3} \pi 3r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \frac{1}{3} \pi 3H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$



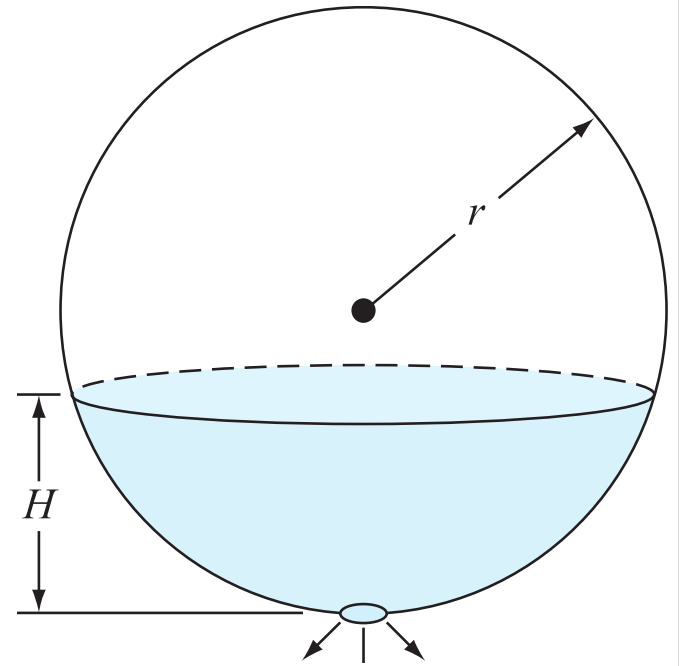
$$\frac{dM}{dt} = \rho\pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho\pi H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho\pi (2rH - H^2) \frac{dH}{dt}$$

$$m_{out} = \rho Q_{out} = \rho C A \sqrt{2gH}$$

$$m_{out} = \rho C \pi \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

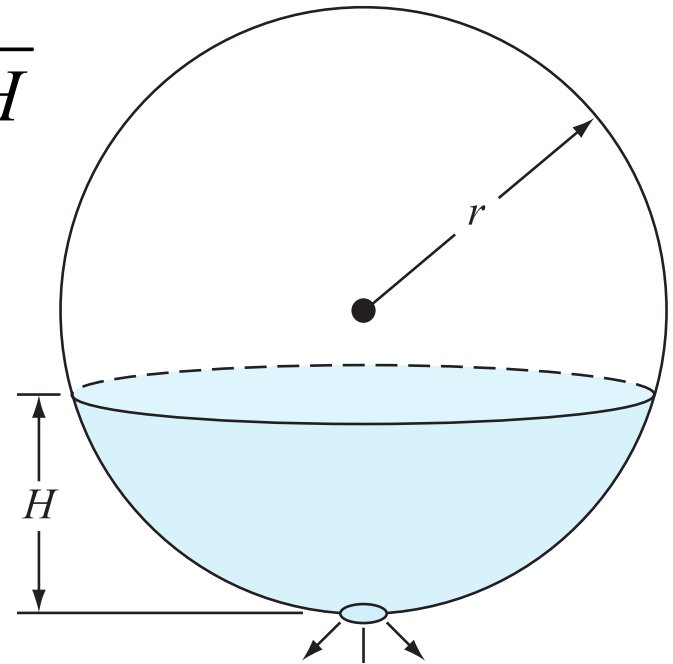
$$\rho\pi (2rH - H^2) \frac{dH}{dt} = -\rho C \pi \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$



$$\cancel{\rho} \pi (2rH - H^2) \frac{dH}{dt} = -\cancel{\rho} C \cancel{\pi} \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

$$(2rH - H^2) \frac{dH}{dt} = -C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}}{(2rH - H^2)}$$



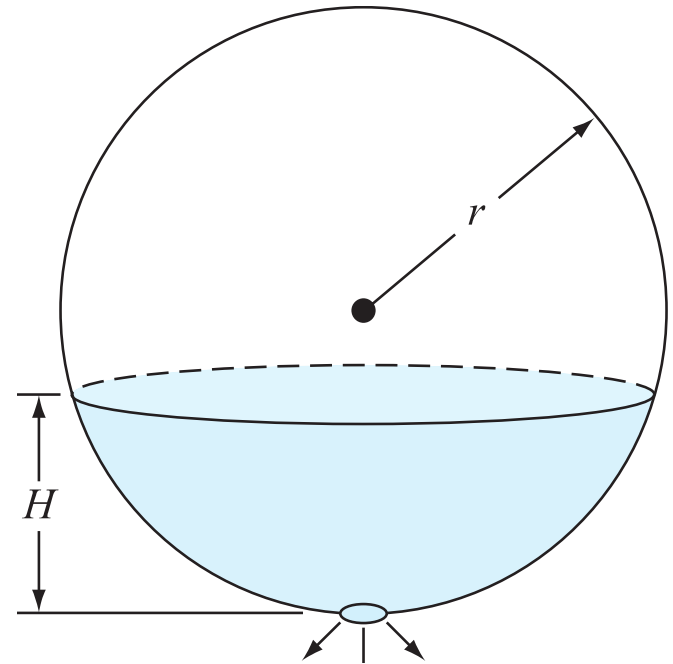
$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}}{(2rH - H^2)}$$

$$C : 0.55$$

$$D_o : 0.03 \text{ m}$$

$$r : 1.5 \text{ m}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-1.2375 \times 10^{-4} \sqrt{19.6H}}{(3H - H^2)}$$



```
function y=EDO(t, H)
```

```
C=0.55; D=0.03; //m r=1.5; //m
```

```
y=-C*D^2/4*sqrt(2*9.8*H)/(2*r*H-H^2);
```

```
endfunction
```

```
H(1)=2.75; t(1)=0; dt=1; i=1;
```

```
while H(i) > 0.01
```

```
[y,x]=RK4(EDO,t(i),t(i)+dt,dt,H(i));
```

```
H(i+1) = y(2);
```

```
t(i+1) = x(2);
```

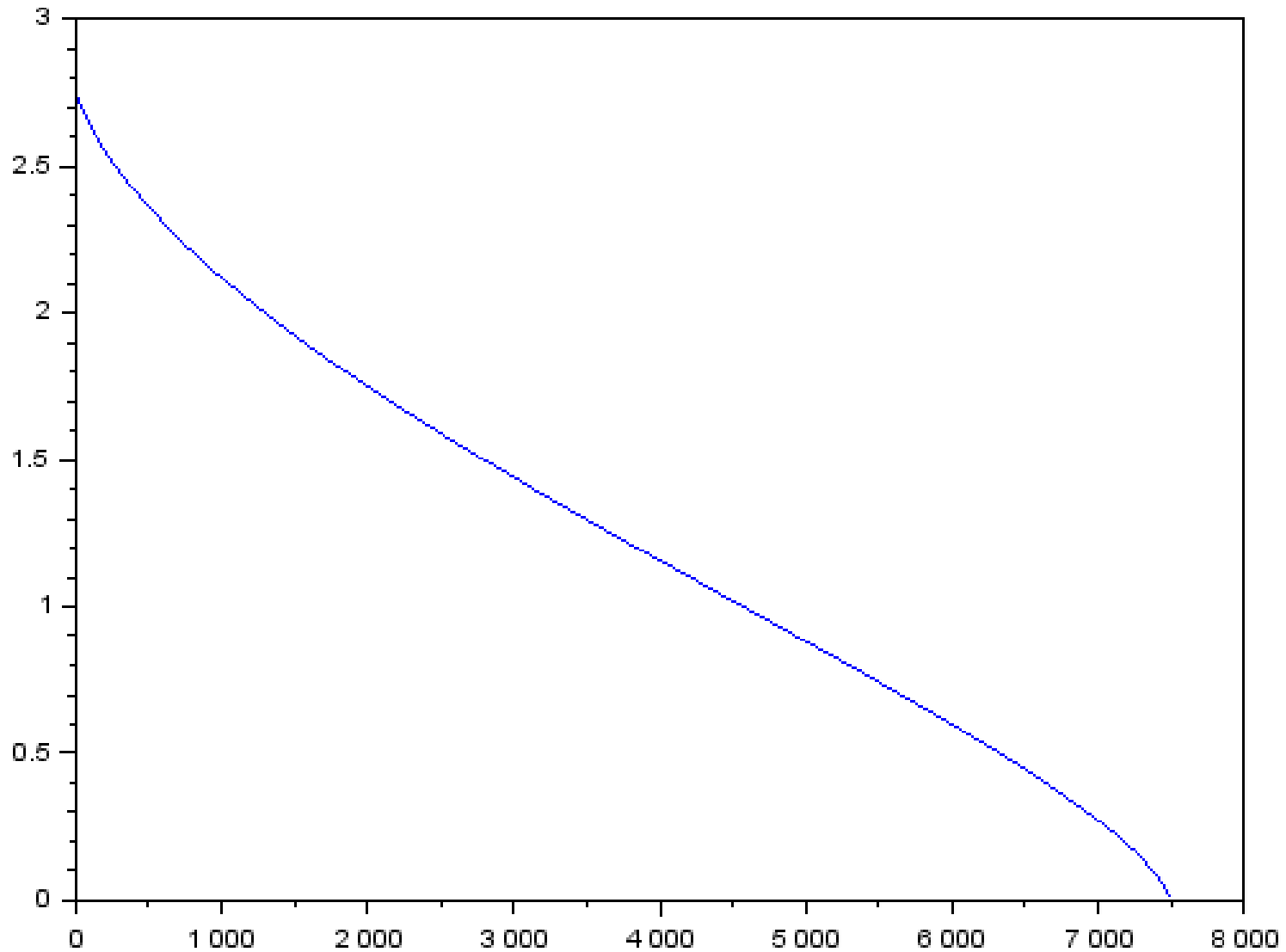
```
i=i+1;
```

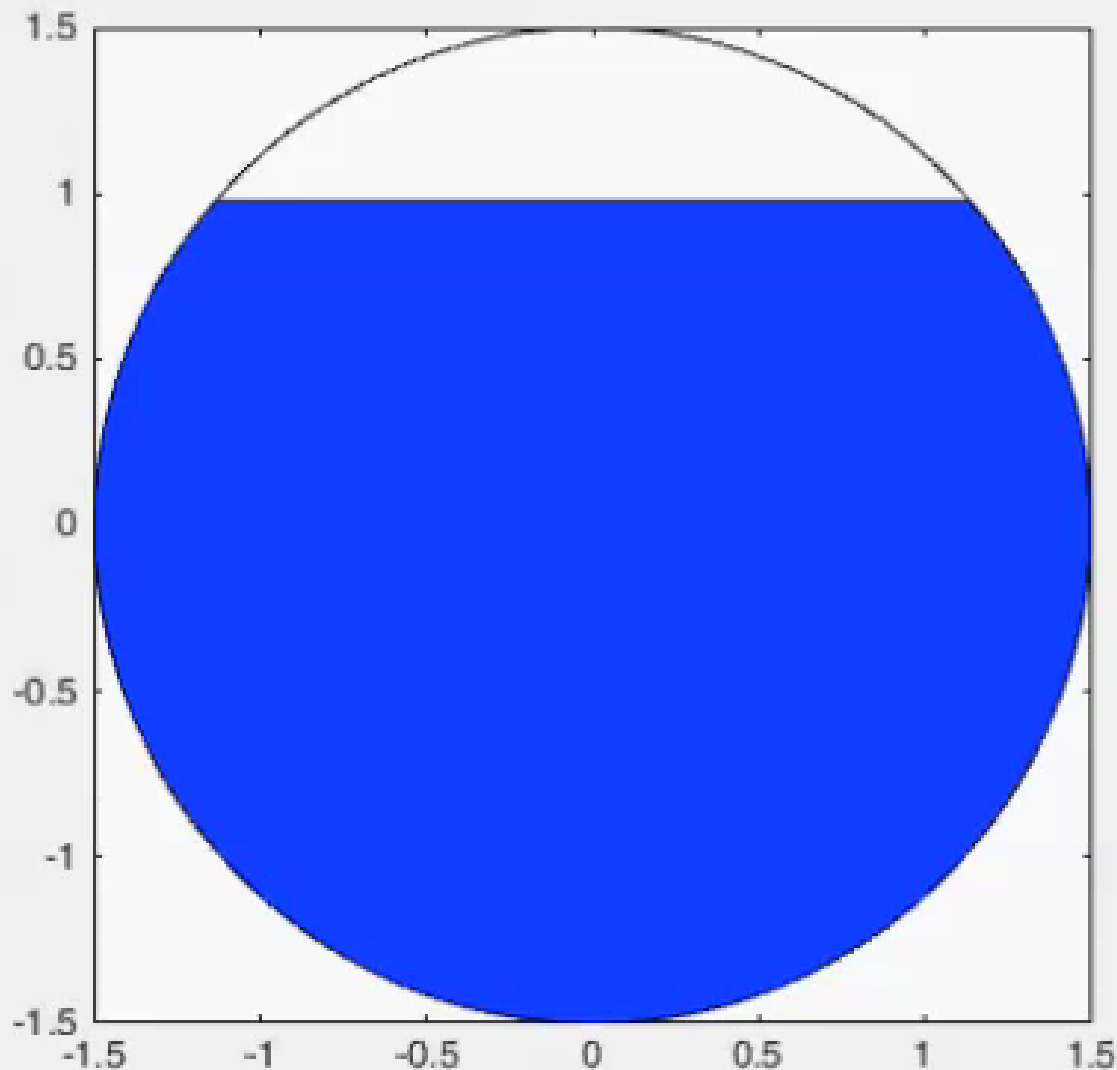
```
end
```

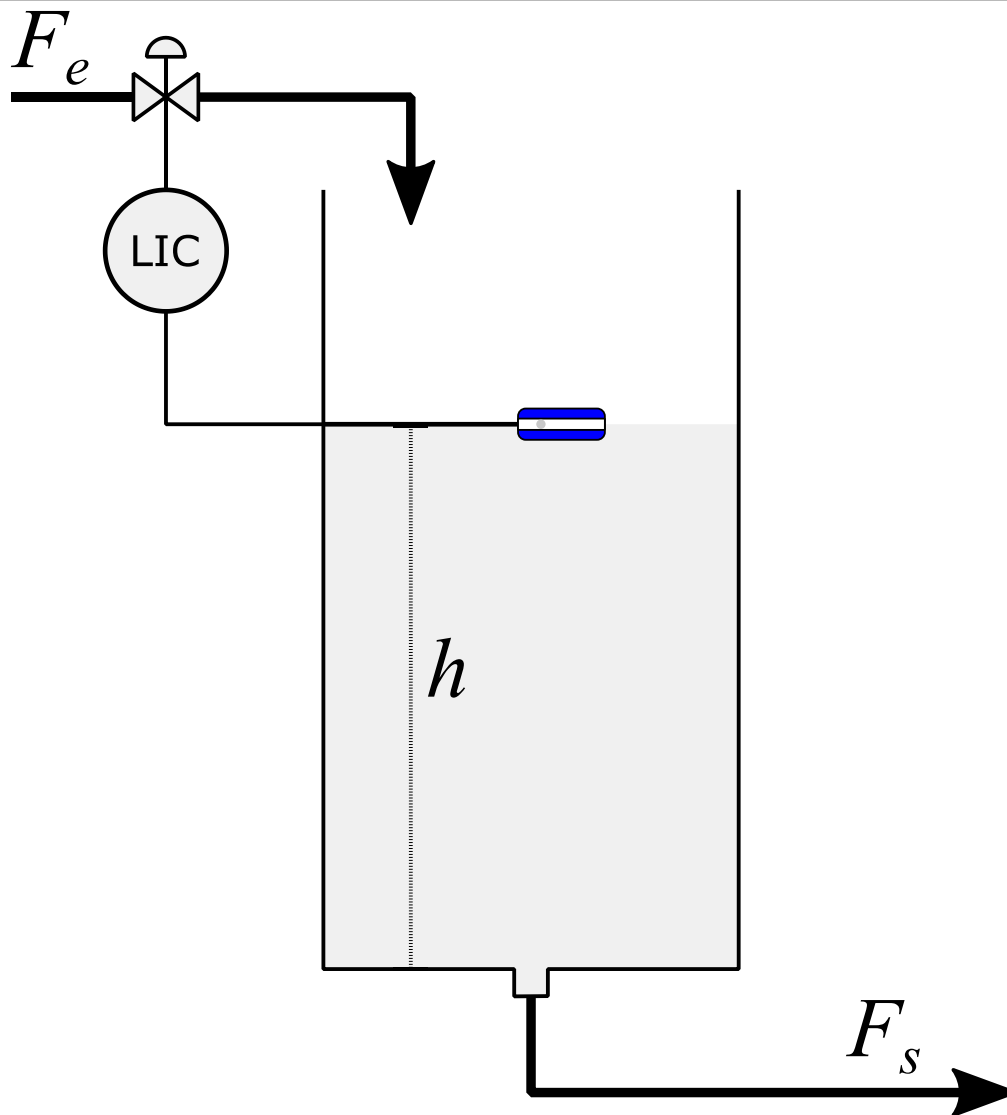
```
plot(t,H)
```

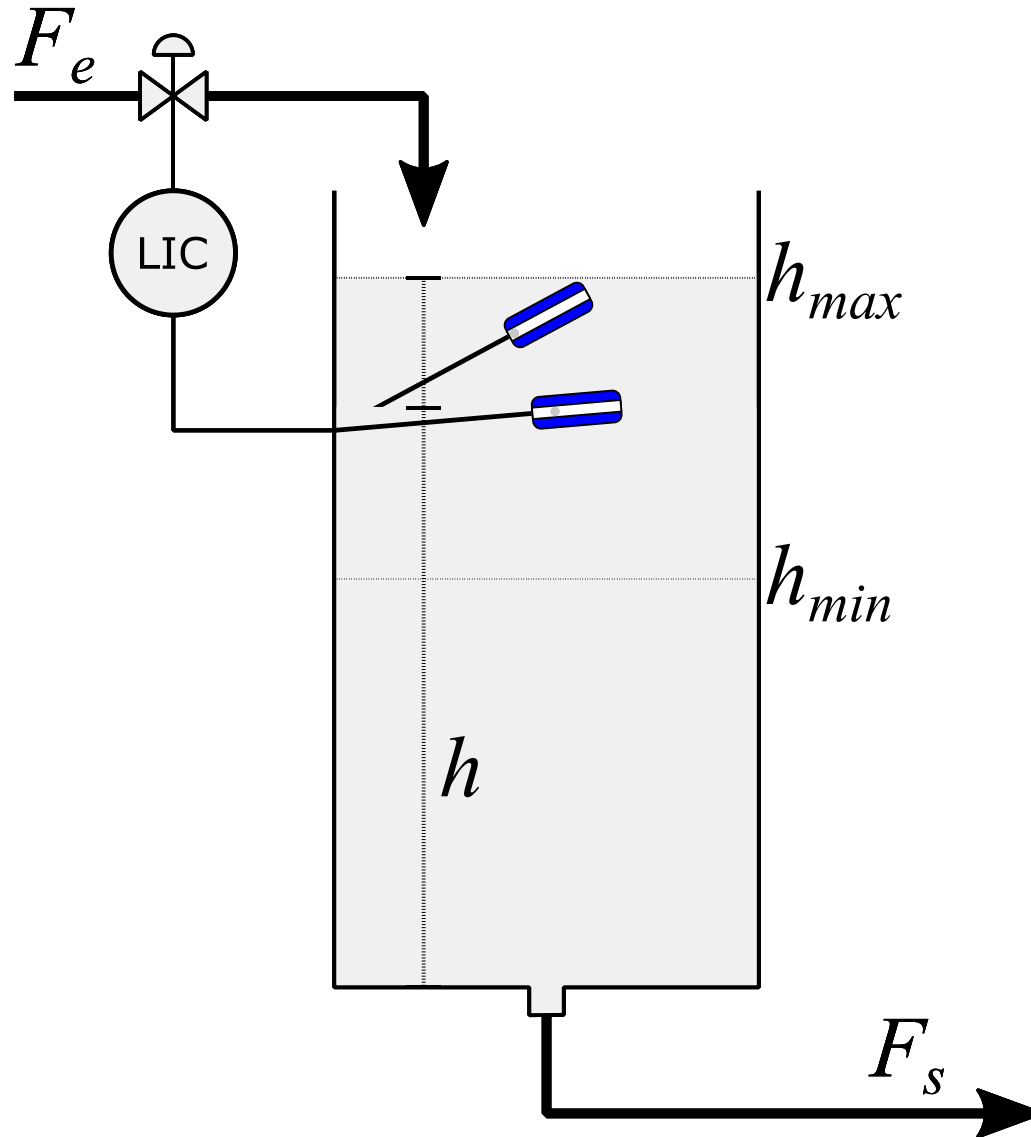
```
tiempo=t(i)/3600 ➡ 2.08 horas
```

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}}{(2rH - H^2)}$$



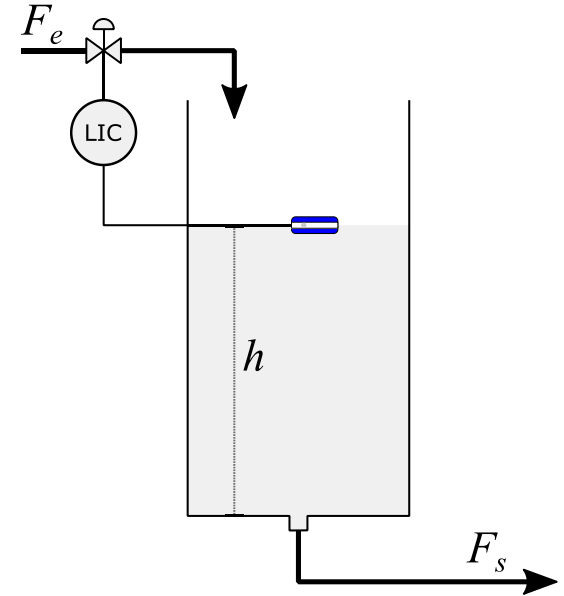






Hipótesis:

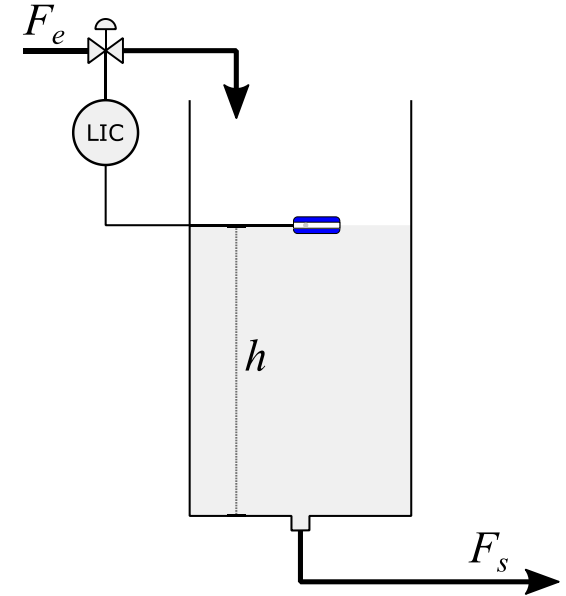
- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Control on/off mediante un flotante



- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

Similar al tanque abierto con salida gravitatoria



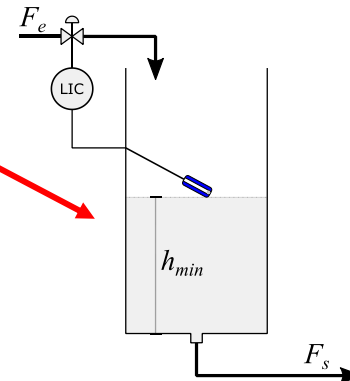
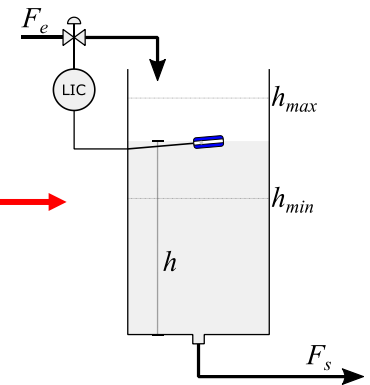
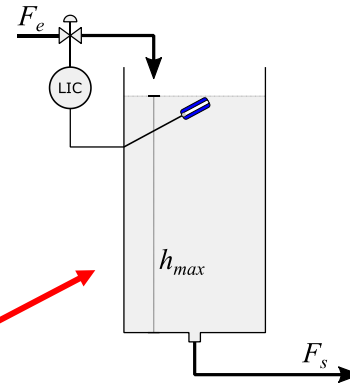
- Caudal de entrada:

F_{e_i} {

si $h_i \geq h_{\max}$

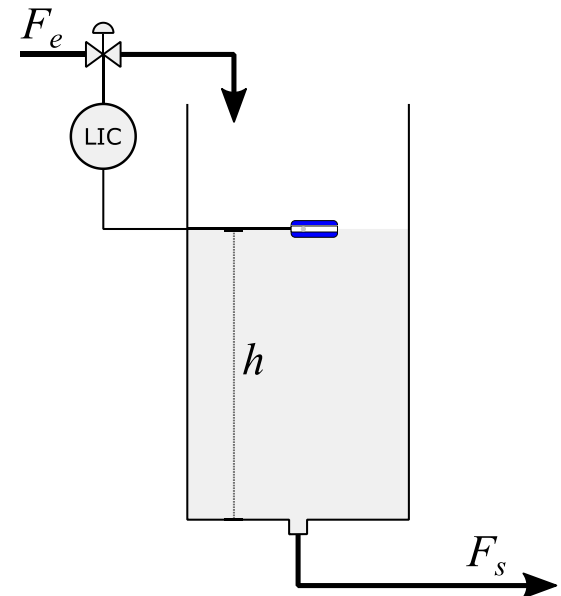
si $h_{\min} < h_i < h_{\max}$

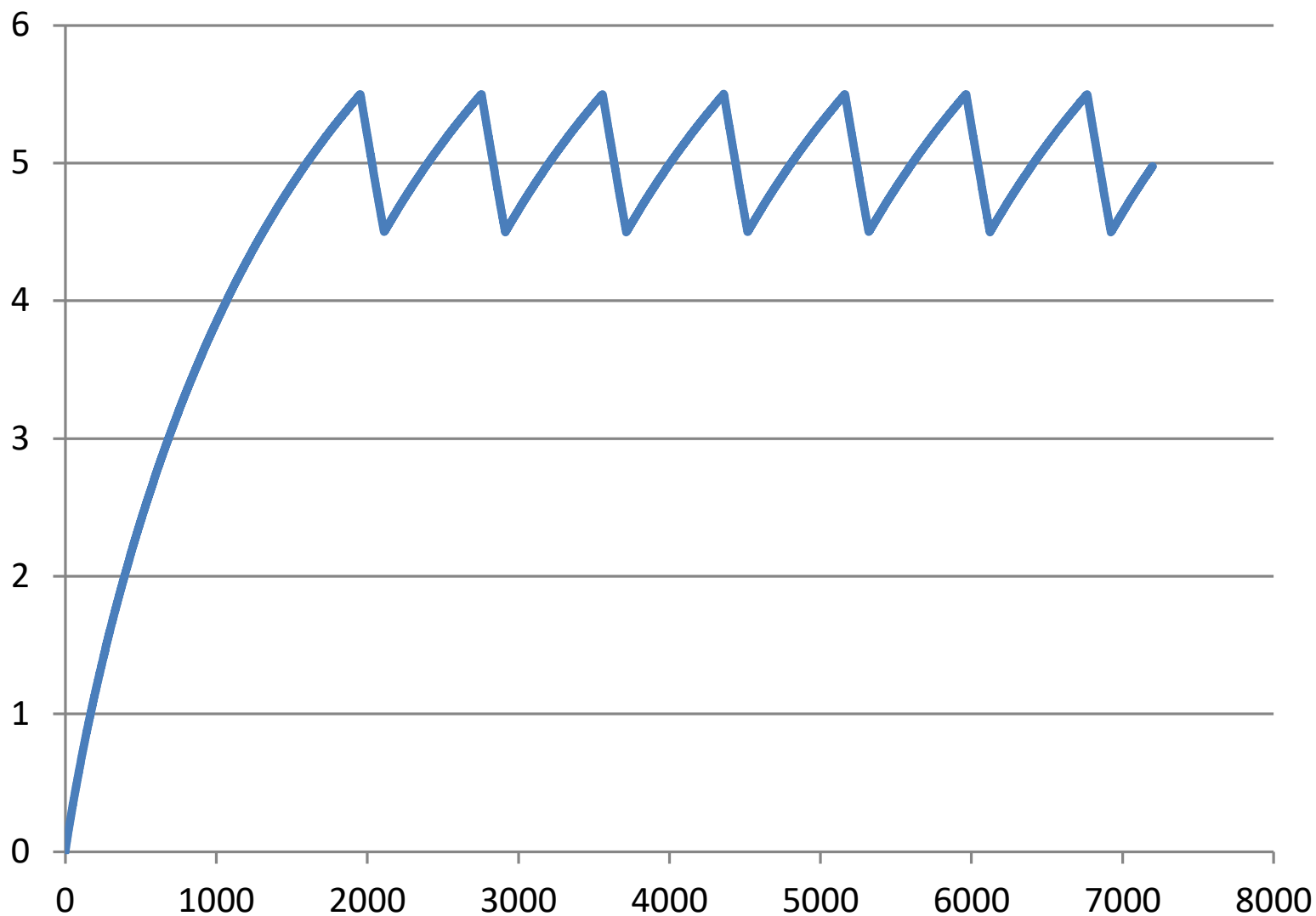
si $h_i \leq h_{\min}$

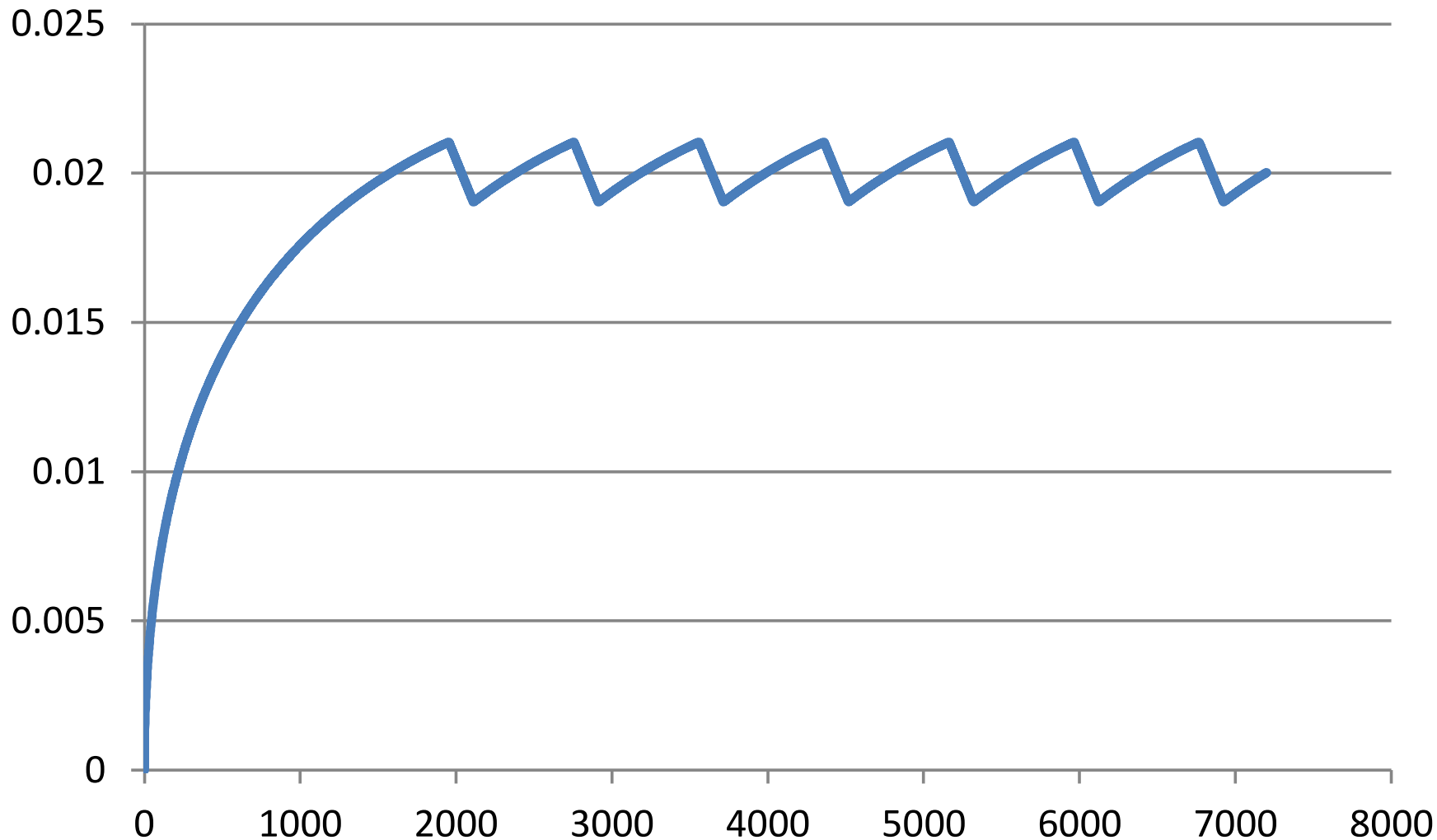


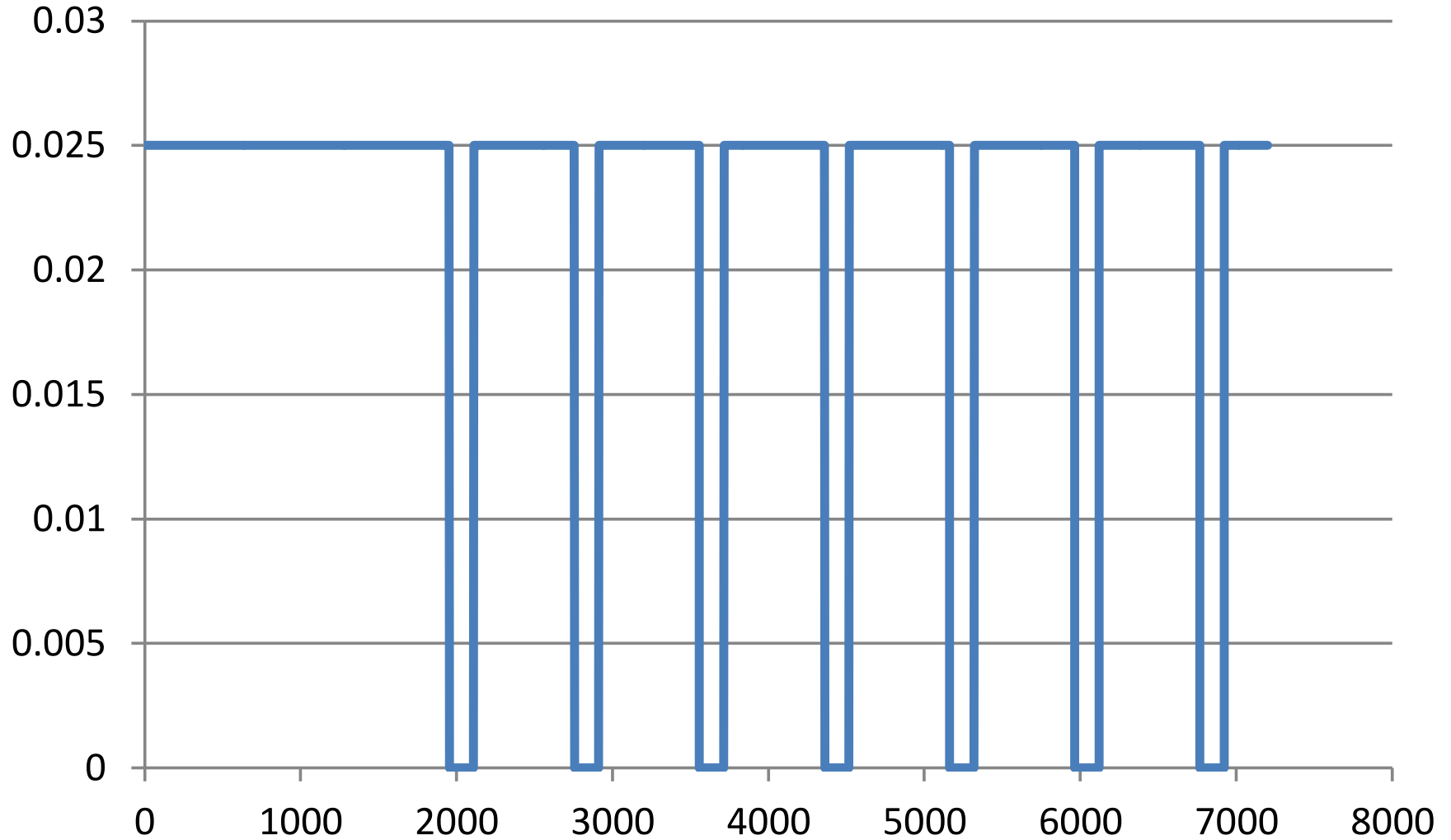
Ejemplo practico:

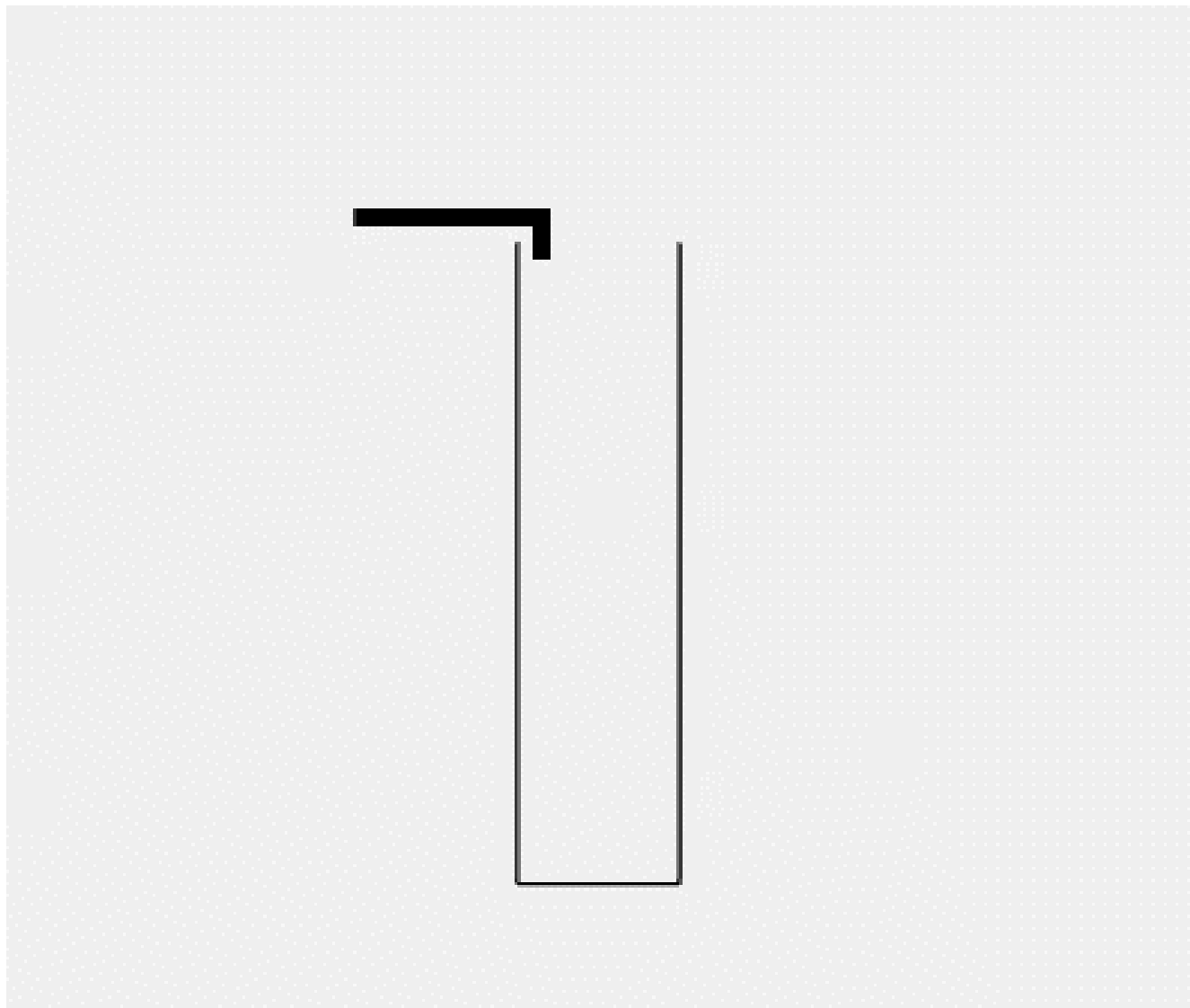
- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Diámetro del orificio de salida tanque: 0.0508 m
- Caudal de entrada al activarse la válvula: $F=0.025 \text{ m}^3/\text{seg}$
- Rango del flotante: $h_{min} = 4.5 \text{ m}$ y $h_{max} = 5.5 \text{ m}$











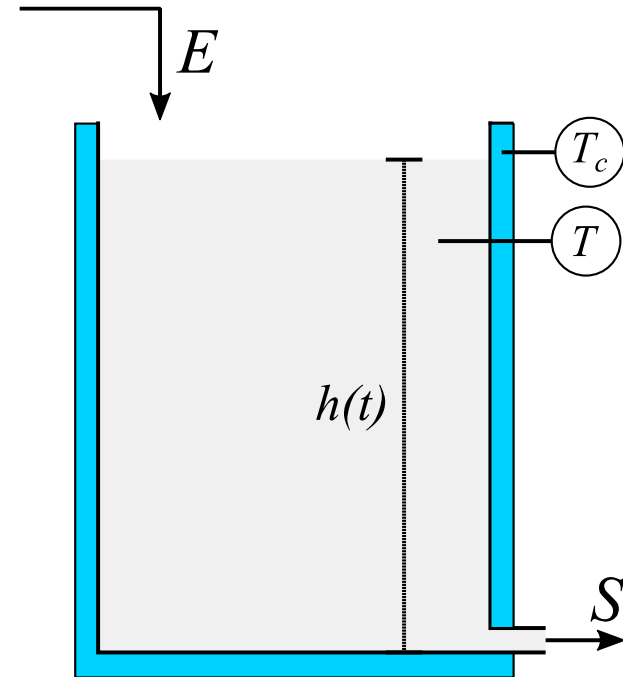
- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna, cinética y/o potencial} \\ \text{que ingresa al sistema} \\ \text{por conveccion o difusion} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna, cinética y/o potencial} \\ \text{que abandona el sistema} \\ \text{por conveccion o difusion} \end{array} \right] \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} \text{Calor que ingresa al sistema} \\ \text{por conduccion, radiacion y/o reacción} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Trabajo realizado por el sistema} \\ \text{sobre sus alrededores} \\ \text{(Trabajo de Eje o mecanico y PV)} \end{array} \right] \\
 & = \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de variación de la energía} \\ \text{interna, cinética y/o potencial} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Las unidad de esta ecuación es energía/tiempo

Hipótesis asumida:

- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Altura inicial conocida
- Temperatura inicial conocida
- Líquido perfectamente mezclado
- Se supone constante la temperatura de la camisa de calentamiento
- Calor específico del fluido constante



- Balance de materia en el tanque:

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_E - m_S$$

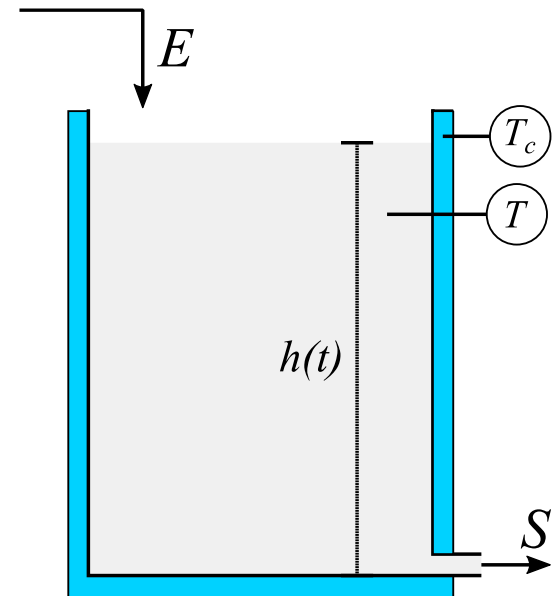
HOLDUP materia del tanque

$$\frac{dM_T}{dt} = m_E - m_S$$

Flujo másico de cada corriente

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

EDO 1



- Balance de energía en el tanque:

HOLDUP de materia

Las propiedades de salida son idénticas a la del interior del tanque

$$\frac{dM(U + \cancel{K} + \cancel{\phi})}{dt} = Q + m_E(U_E + \cancel{K}_E + \cancel{\phi}_E) - m_S(\cancel{U} + \cancel{K} + \cancel{\phi}) + m_E P_E v_E - m_S P_S v$$

$$\frac{dMU}{dt} = Q + m_E(U_E + P_E v_E) - m_S(U + P_S v)$$

$$\frac{dMU}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$\frac{dMH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

Para líquidos el termino Pv es despreciable frente a U por lo que se sigue la evolución de la entalpía del sistema

HOLDUP de energía

$MH \rightarrow$ Entalpía total del fluido dentro del tanque

$m_e H_e \rightarrow$ Entalpía total de entrada de fluido

$m_s H_s \rightarrow$ Entalpía total de salida de fluido

$Q \rightarrow$ Calor que ingresa por la camisa

$$\frac{dMH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$\frac{dM}{dt} H + M \frac{dH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$m_E = \rho F_E$$

$$m_S = \rho F_S = \rho A_s \sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_e - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

EDO 1

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

EDO 2

$$H = f(T)$$

Q = Constante o ley funcional

2 EDOS

2 Ecuaciones Algebraicas

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$H = cp(T - T_0) \quad cp \rightarrow \text{Calor específico del fluido}$$

$$dH = cp dT \quad T_0 \rightarrow \text{Temperatura inicial tomada como referencia}$$

$$\rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$\rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) cp(T - T_0) + \rho A_T h cp \frac{dT}{dt} = Q + \rho F_E cp(T_E - T_0) - \rho A_s \sqrt{2gh} cp(T - T_0)$$

La temperatura de salida corresponde
a la del fluido dentro del tanque

$$Q = UA_L (T_c - T)$$

$U \rightarrow$ Coeficiente de intercambio de calor
 $T_c \rightarrow$ Temperatura de la camisa de calentamiento

$$A_L = A_T + \pi D_T h$$

$A_L \rightarrow$ Área de contacto del liquido con la camisa

$$\begin{aligned} & \rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) cp(T - T_0) + \rho A_T h cp \frac{dT}{dt} \\ &= UA_T (T_c - T) + U \pi D_T h (T_c - T) + \rho F_E cp(T_E - T_0) - \rho A_s \sqrt{2gh} cp(T - T_0) \end{aligned}$$

$$\rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) cp (T - T_0) + \rho A_T h cp \frac{dT}{dt}$$

$$= UA_T (T_c - T) + U \pi D_T h (T_c - T) + \rho F_E cp (T_E - T_0) - \rho A_s \sqrt{2gh} cp (T - T_0)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{UA_T}{\rho A_T h cp} (T_c - T) + \frac{U \pi D_T h}{\rho A_T h cp} (T_c - T)$$

$$+ \frac{\rho F_E cp}{\rho A_T h cp} (T_E - T_0) - \frac{\rho A_s \sqrt{2gh} cp}{\rho A_T h cp} (T - T_0) - \frac{\rho A_T cp}{\rho A_T h cp} \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U}{\rho h cp} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T cp} (T_c - T)$$

$$+ \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0)$$

Sistema de EDOs obtenido:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

2 EDOS

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{U}{\rho h c_p} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T c_p} (T_c - T) \\ & + \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0) \end{aligned}$$

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$T \rightarrow$ Variable dependiente (temperatura)

$$f_1(t, T, h) = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

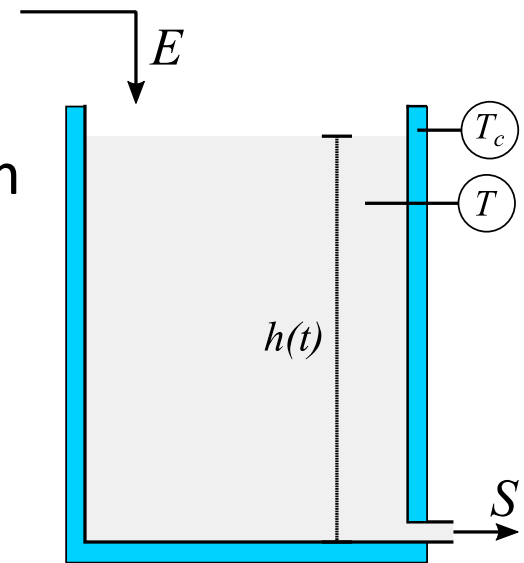
$$f_2(t, T, h) = \frac{U}{\rho h c_p} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T c_p} (T_c - T)$$

$$+ \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0)$$

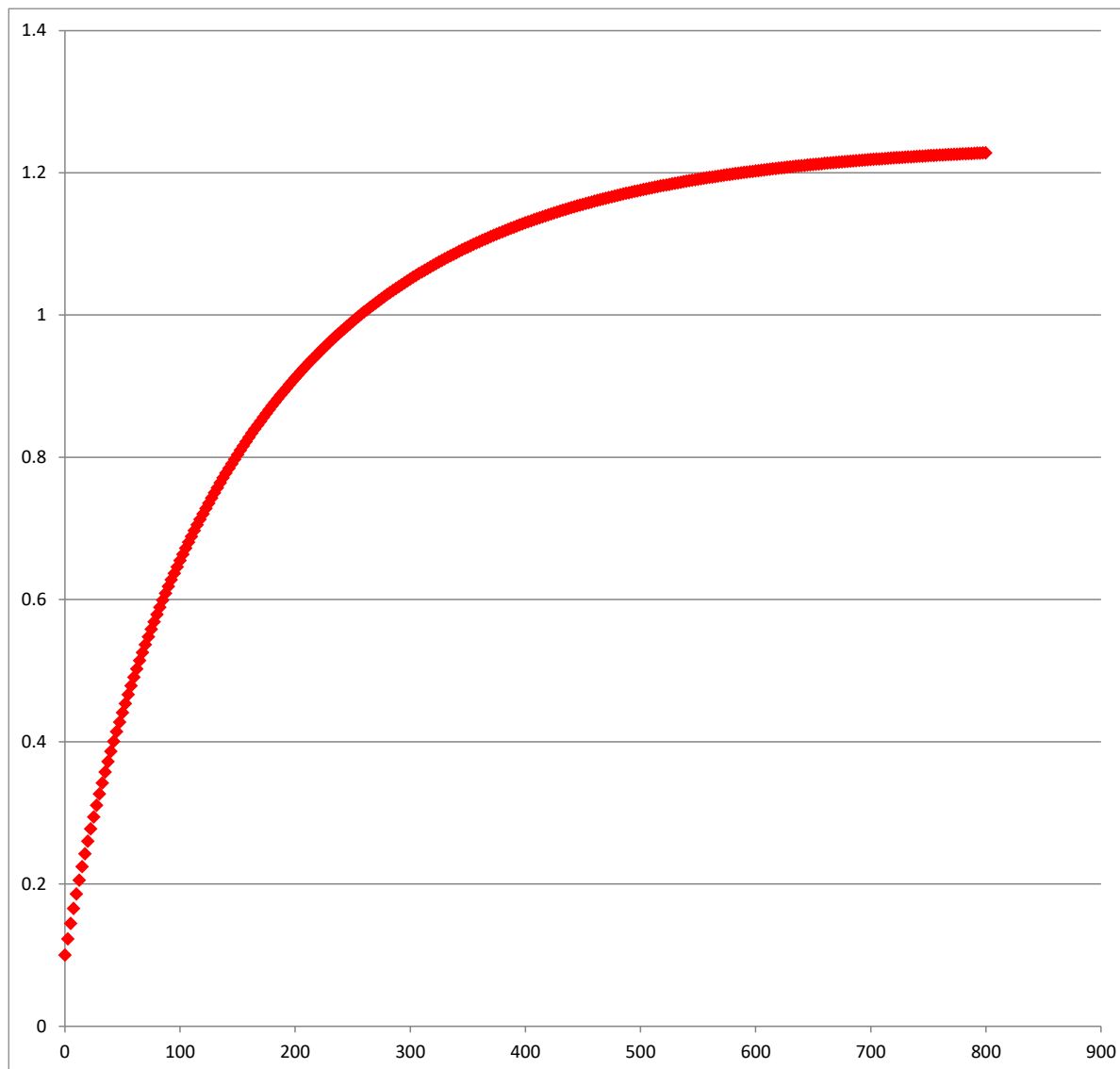
$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = f_1(t, T, h) \\ \frac{dT}{dt} = f_2(t, T, h) \end{cases}$$

Ejemplo práctico:

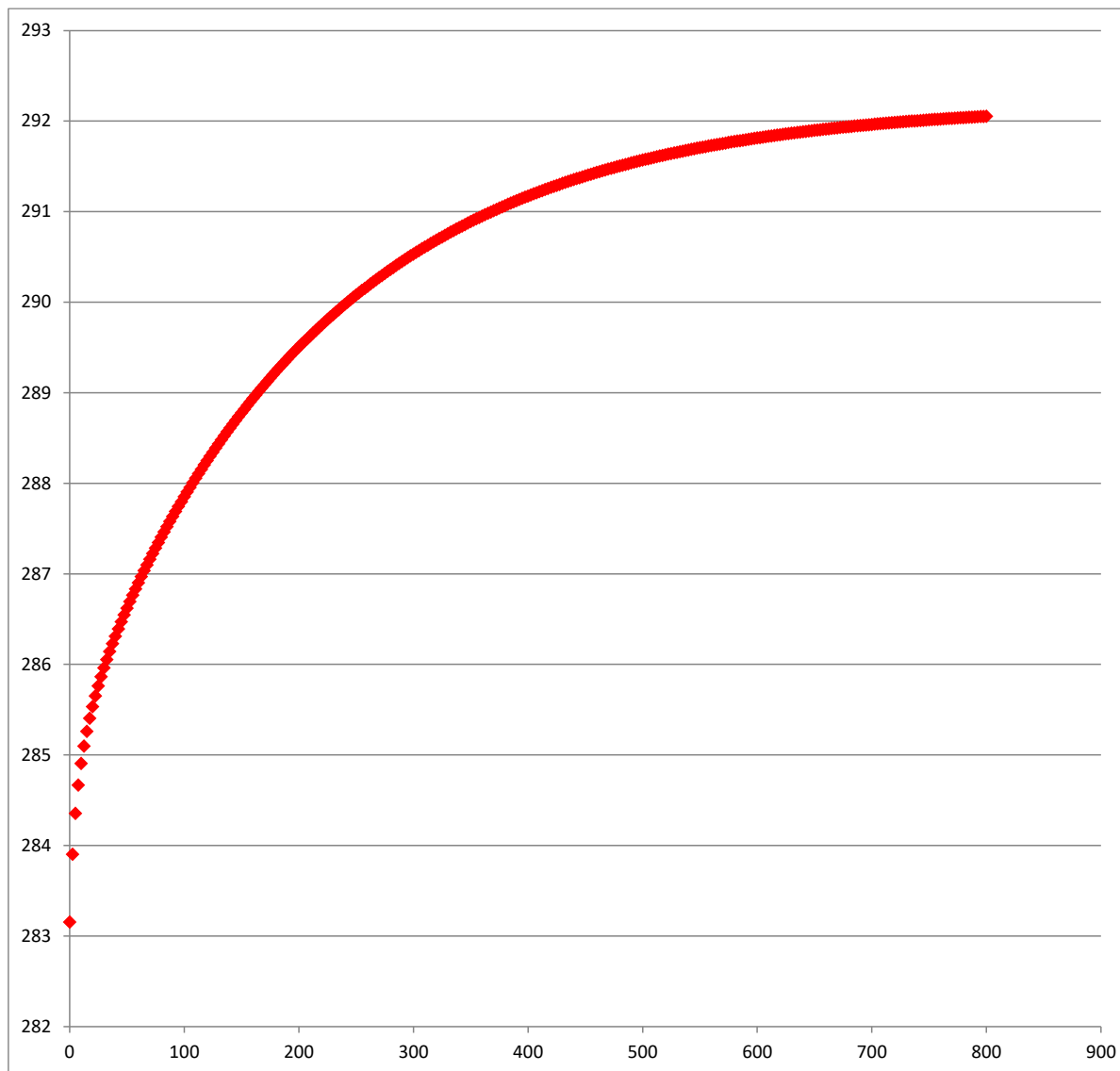
- Caudal constante de alimentación ($F_E = 0.01 \text{ m}^3/\text{h}$)
- Altura inicial del tanque: $h_0 = 0.1 \text{ m}$
- Diámetro del tanque: $D_T = 1 \text{ m}$
- Diámetro de orificio de salida: $D_S = 0.0508 \text{ m}$
- Tiempo final 800 segundos
- Densidad del fluido $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Temperatura inicial $T_0 = 283.15 \text{ K}$
- Temperatura de alimentación $T_E = 283.15 \text{ K}$
- Temperatura de la camisa $T_c = 373.15 \text{ K}$
- Calor específico del fluido $c_p = 4.2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
- Coeficiente de intercambio de calor $U = 1 \text{ kW}/(\text{m}^2 \text{ K})$

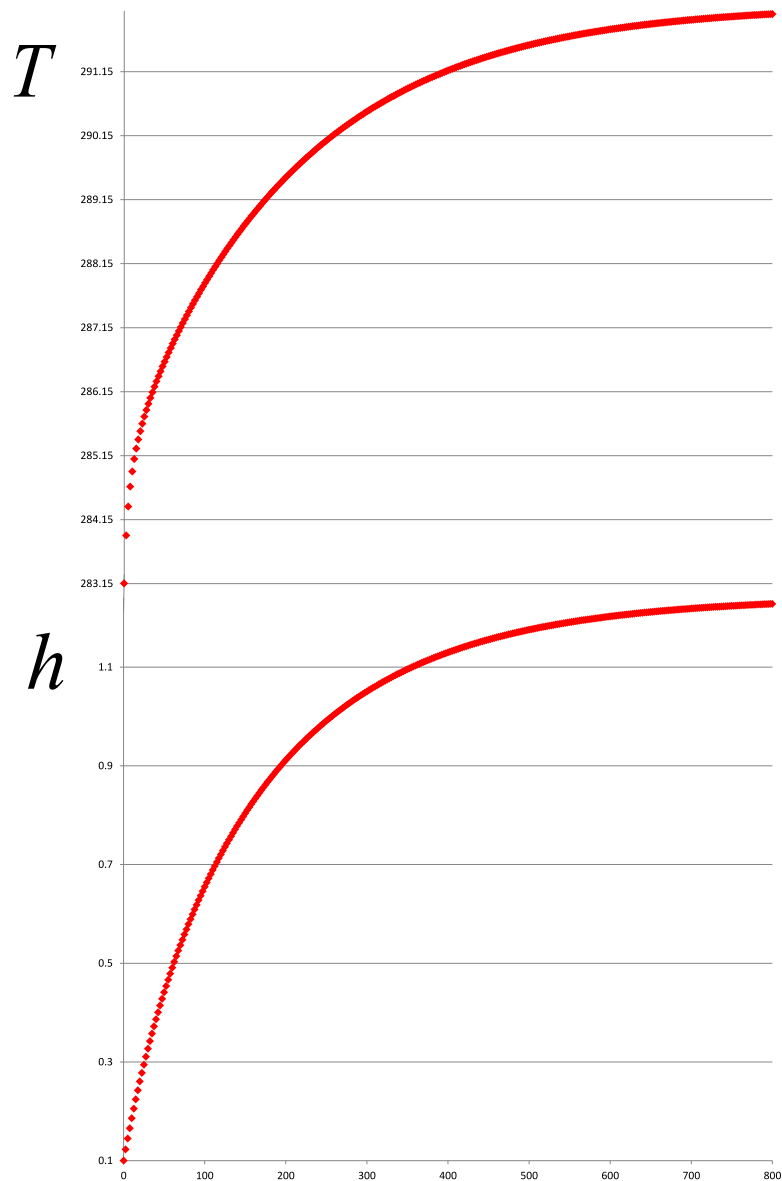


h



T





- Las válvulas de control son conceptualmente orificios de área variable.
- Se las puede considerar simplemente como una restricción que cambia su tamaño de acuerdo a un pedido por parte del controlador u operador.
- Al pasar un fluido por una restricción , la fórmula (para líquidos) que vincula el caudal con la diferencia de presión entre la entrada y la salida es:

$$Q = k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula

$\rho \rightarrow$ Densidad del fluido

$k \rightarrow$ Constante del orificio

$$Q = k' \sqrt{\frac{\Delta P^*}{G}}$$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido

- El predominio histórico de los fabricantes de válvulas en Estados Unidos ha llevado a que las características de las válvulas se den a menudo en unidades estadounidenses.
- Para gases suele utilizarse la misma ecuación pero utilizando la gravedad específica referenciada al aire y el caudal expresado de forma estándar.

$$Q = C_v \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula [*US gpm*]

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula [*psi*]

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60^\circ F}^{agua}$ [*adim*]

$C_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 °F

$$Q = K_v \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula [*m³/h*]

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula [*bar*]

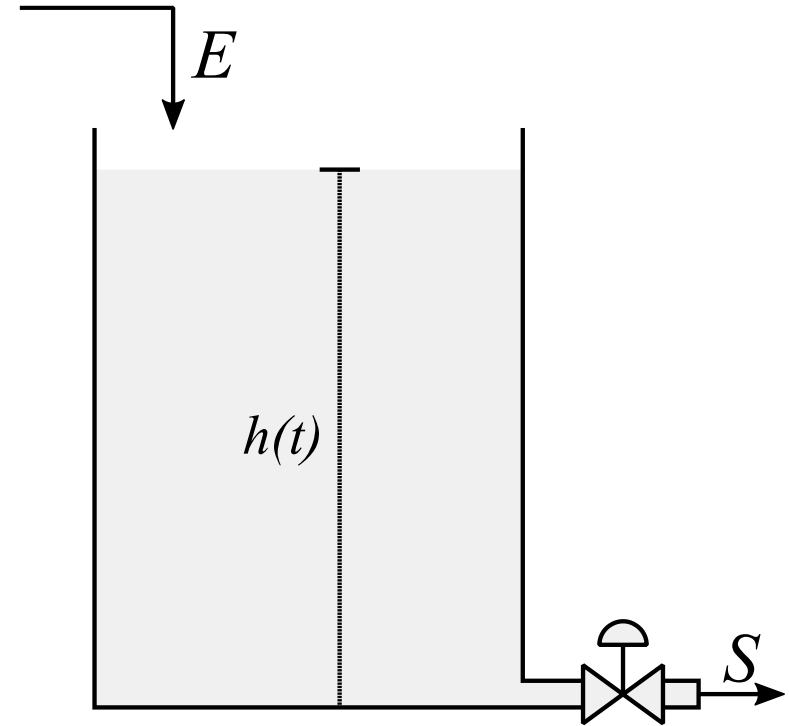
$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60^\circ F}^{agua}$ [*adim*]

$K_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 °F

$$C_v = 1.15 K_v$$

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico



- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s \quad M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

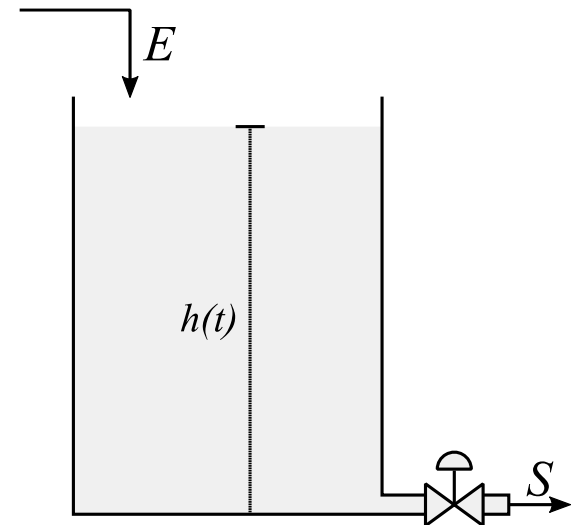
ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho S$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$



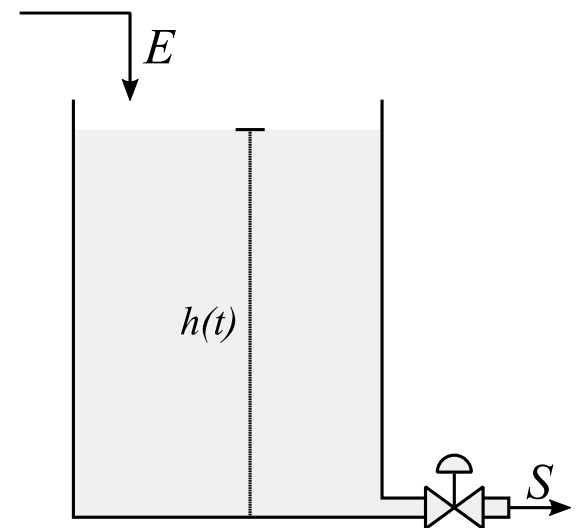
$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

$$S = C_v \sqrt{\Delta P_s / \rho} \rightarrow S = C_v \sqrt{(P_f - P_s) / \rho}$$

$$P_0 = P_s$$

$$S = C_v \sqrt{(\cancel{P_0} + \cancel{\rho gh} - \cancel{P_s})_s / \cancel{\rho}}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T} \sqrt{gh}$$

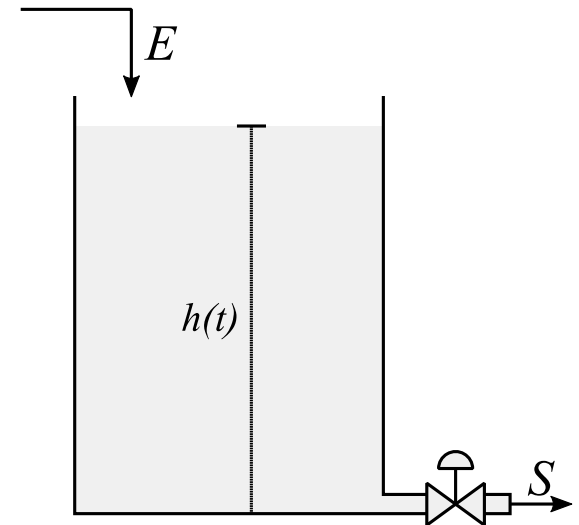


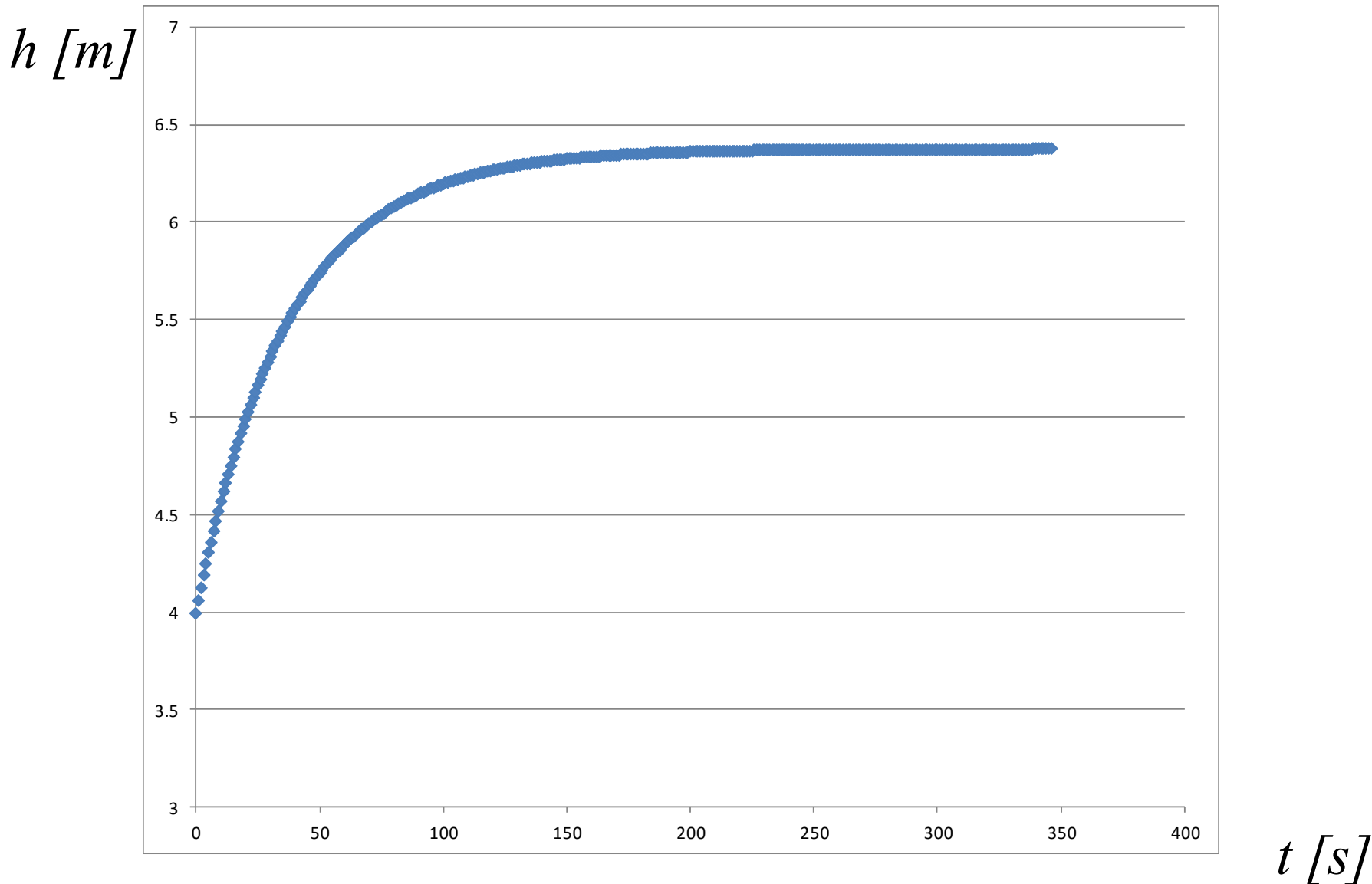
Ejemplo práctico:

- Caudal de entrada ($E=0.25 \text{ m}^3/\text{seg}$)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_v de la válvula de descarga: 0.0316 m^2

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T} \sqrt{gh}$$

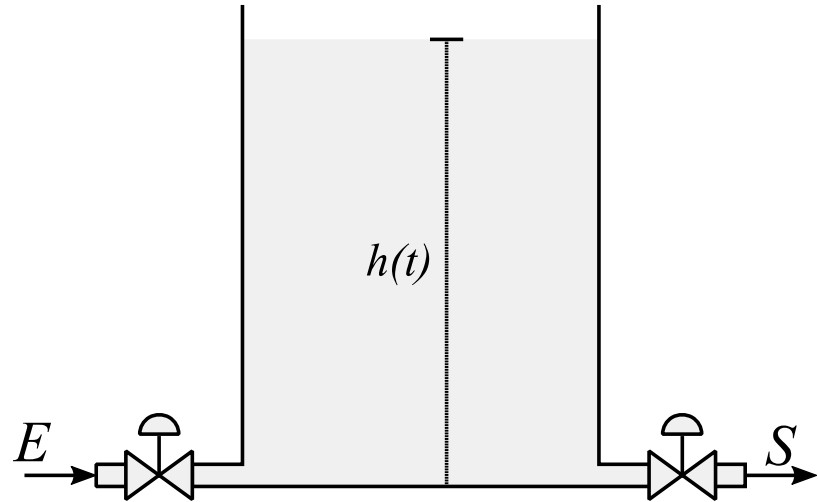
$$t = 0 \rightarrow h = 4 \text{ m}$$





Hipótesis

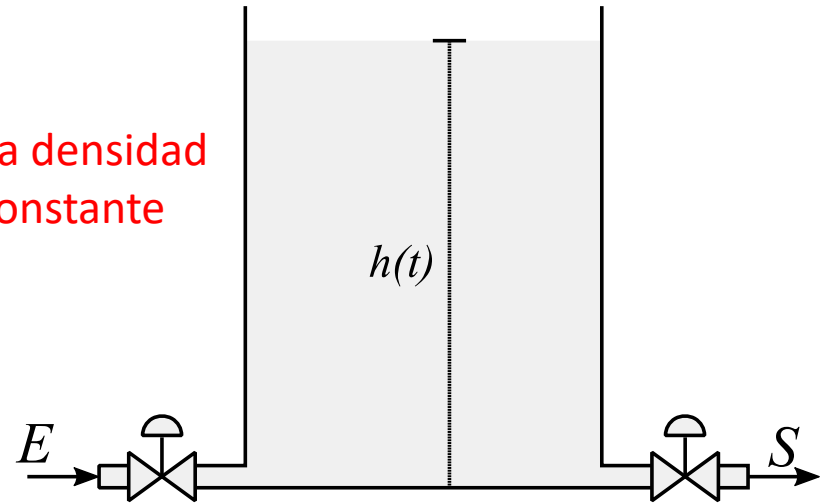
- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas



- Balance de materia en el tanque:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

¡Cuidado!: Solo para densidad
y área transversal constante



$$E = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_f) / \rho}$$

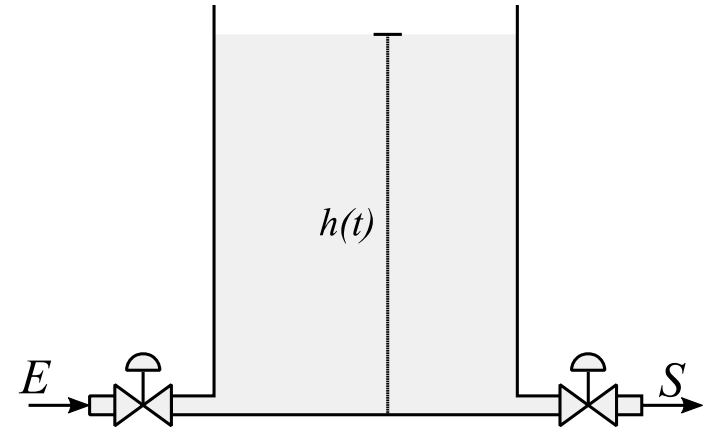
$$S = C_{v2} \sqrt{(P_f - P_s) / \rho}$$

$$E = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_0 - \rho gh) / \rho} \quad S = C_{v2} \sqrt{(P_0 + \rho gh - P_s) / \rho}$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_0 - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_0 + \rho gh - P_s) / \rho}$$

Ejemplo practico:

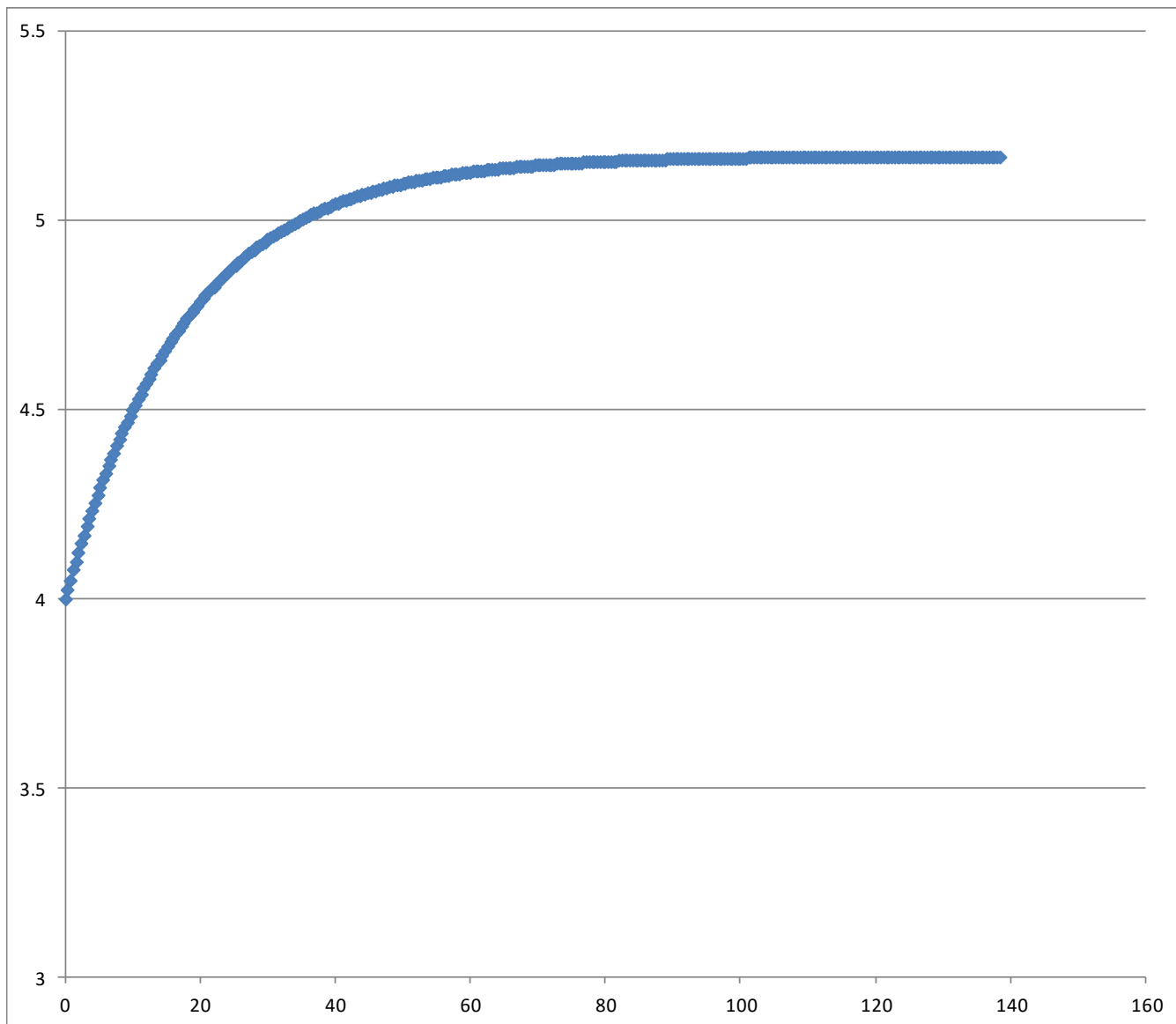
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m²
- Densidad del fluido: 1000 kg/m³
- Presión en la superficie del liquido $P_0 = 101325 \text{ Pa}$
- Presión de descarga igual a la superior del tanque ($P_s = P_0$)
- Presión de entrada: $P_E = 202650 \text{ Pa}$



$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_0 - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_0 + \rho gh - P_s) / \rho}$$

$$t = 0 \rightarrow h = 4 \text{ m}$$

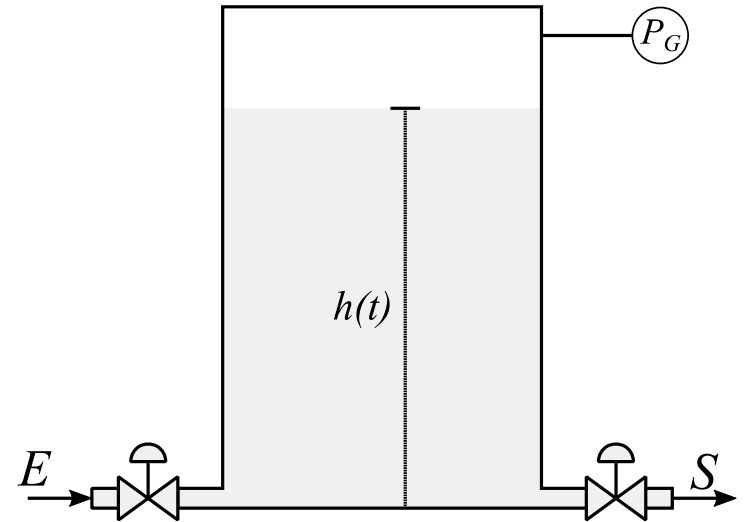
$h [m]$



$t [s]$

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- El tanque tiene una atmosfera de gas inerte



$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{P_E - P_G - \rho gh / \rho} - C_{v2} \sqrt{P_G + \rho gh - P_s / \rho}$$

¡Varía con la altura!

$$M_G = \rho_G V_G \quad \text{Gas inerte en la superficie constante}$$

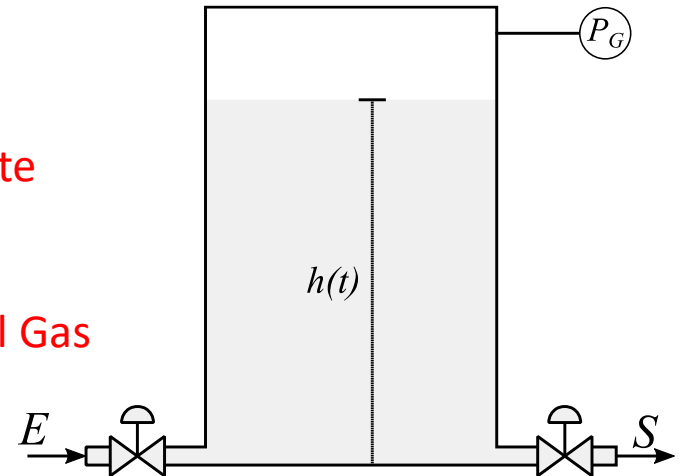
$$\rho_G = \frac{P_G}{R'T} \quad \text{Asumiendo comportamiento ideal del Gas}$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{R'T_G^0} = \frac{P_G V_G}{R'T_G}$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{T_G^0} = \frac{P_G V_G}{T_G} \quad \text{Se desprecia la variación de temperatura}$$

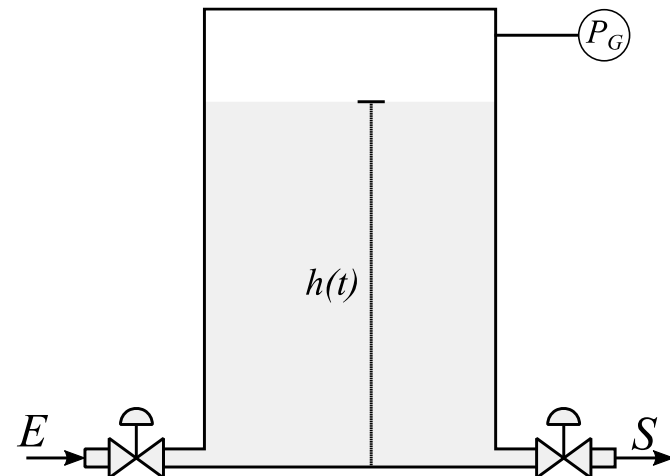
$$V_G = V_T - A_T h$$

$$P_G = \frac{P_G^0 (V_T - A_T h^0)}{(V_T - A_T h)}$$



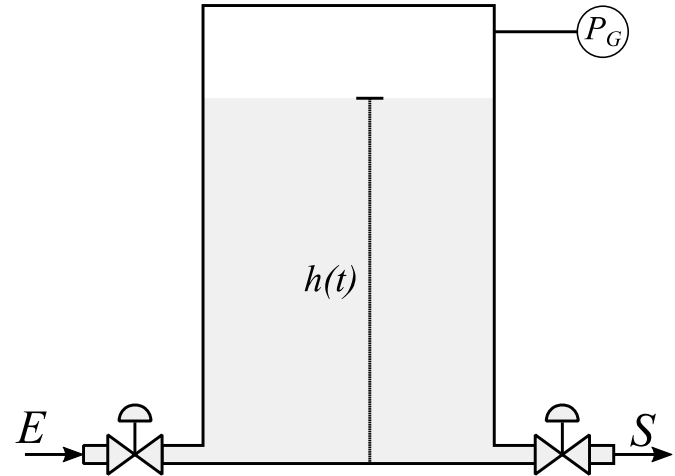
$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_G - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_G + \rho gh - P_s) / \rho}$$

$$P_G = \frac{P_G^0 (V_T - A_T h^0)}{(V_T - A_T h)}$$



Ejemplo practico:

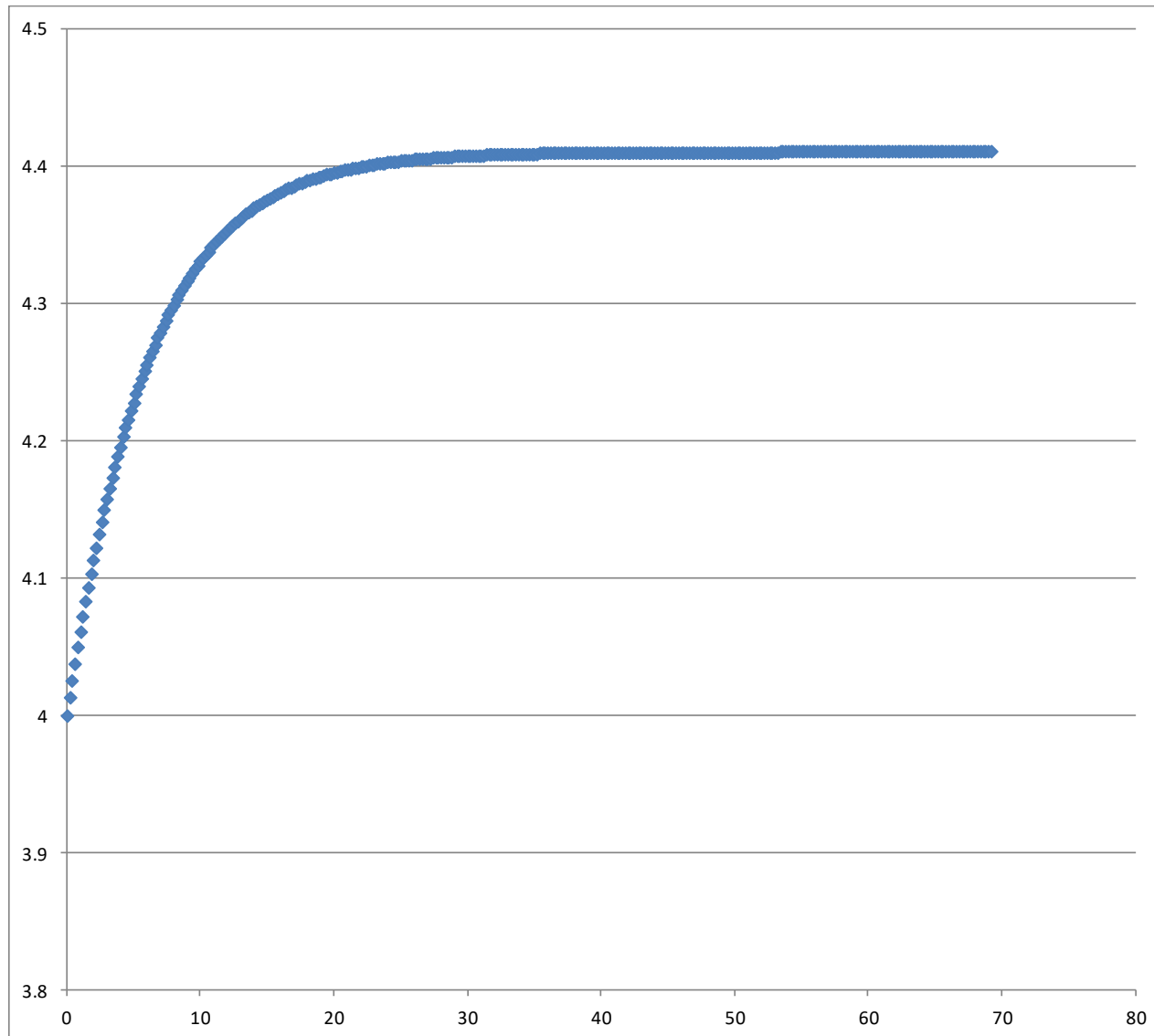
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Altura del tanque: 10 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión de descarga : $P_s = 101325 \text{ Pa}$
- Presión de entrada: $P_E = 202650 \text{ Pa}$
- Presión inicial del gas: $P_G^0 = 101325 \text{ Pa}$



$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_G - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_G + \rho gh - P_s) / \rho}$$

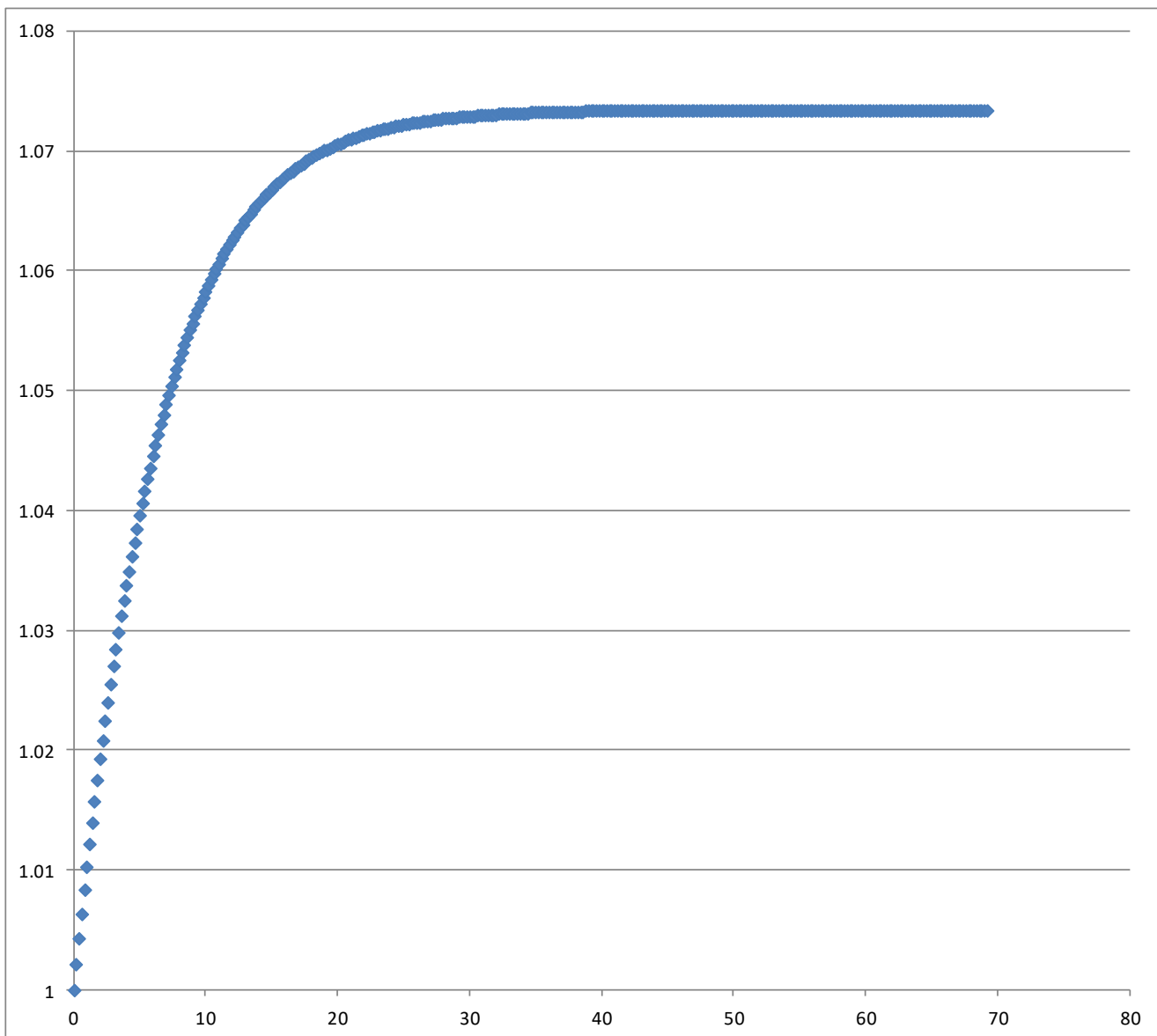
$$P_G = P_G^0 \left(V_T - A_T h^0 \right) / \left(V_T - A_T h \right)$$

$h [m]$

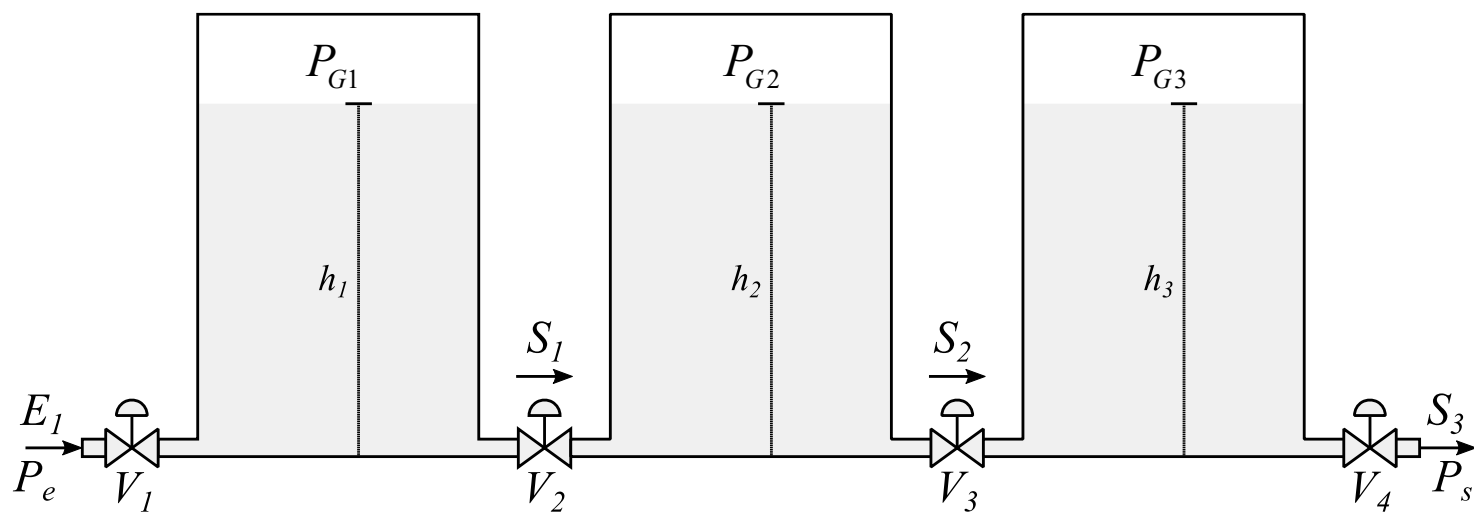


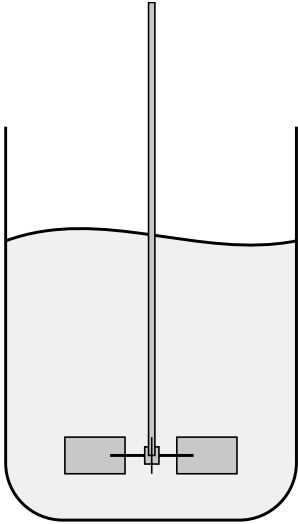
$t [s]$

$P_G [bar]$



$t [s]$



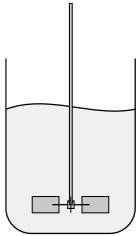


Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Volumen constante
- Dos reacciones químicas en serie:



$$\left[\begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente } i \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente } i \\ \text{que ingresan al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente } i \\ \text{que abandonan el sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente } i \\ \text{por reacción química} \end{array} \right]$$

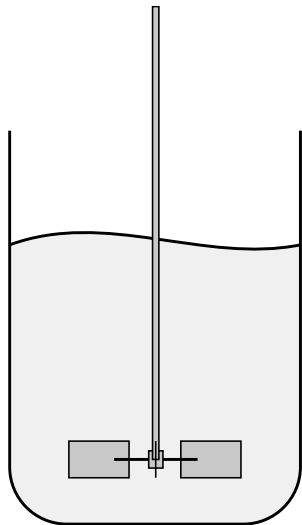


$$r_j \left[\frac{1}{\text{volumen} \times \text{tiempo}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Velocidad de avance de la reacción "j".} \\ \text{Siempre } > 0 \end{array}$$

$$r_{ij} \left[\frac{\text{moles de } i}{\text{volumen} \times \text{tiempo}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Generación de la especie "i" por unidad de} \\ \text{volumen y unidad de tiempo, causada} \\ \text{exclusivamente por el avance de la reacción "j"} \end{array}$$

$$r_i \left[\frac{\text{moles de } i}{\text{volumen} \times \text{tiempo}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Generación neta de la especie "i" por} \\ \text{unidad de volumen y unidad de tiempo,} \\ \text{causada por el conjunto de N reacciones} \end{array}$$

$$r_{ij} = \nu_{ij} \times r_j \quad r_i = \sum_{j=R1}^{RN} r_{ij} = \sum_{j=R1}^{RN} \nu_{ij} \times r_j$$



Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Volumen constante
- Dos reacciones químicas en serie:



$$r_{A1} = -k_1$$

$$r_{A2} = 0$$

$$r_{B1} = k_1$$

$$r_{B2} = -k_2 C_B$$

$$r_{C1} = 0$$

$$r_{C2} = k_2 C_B$$

$$\begin{cases} r_A = -k_1 \\ r_B = k_1 - k_2 C_B \\ r_C = k_2 C_B \end{cases}$$

$$r_1 = k_1$$

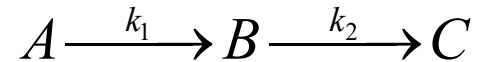
$$r_2 = k_2 C_B$$

Para este ejemplo

- Balance de materia de los reactivos en el reactor:

$$\left[\begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{array} \right]$$

Acumulación = ~~Entrada~~ - ~~Salida~~ + Generación



$$\frac{dM_A}{dt} = r_A V$$

$$r_A = -k_1$$

$$V \frac{dC_A}{dt} = -k_1 V$$

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1$$

- Balance de materia de los reactivos en el reactor:

Acumulación = ~~Entrada~~ - ~~Salida~~ + Generación $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$

$$\frac{dM_B}{dt} = r_B V \quad r_B = k_1 - k_2 C_B$$

$$V \frac{dC_B}{dt} = k_1 V - k_2 C_B V$$

$$\frac{dC_B}{dt} = k_1 - k_2 C_B$$

- Balance de materia de los reactivos en el reactor:

Acumulación = ~~Entrada~~ - ~~Salida~~ + Generación $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$

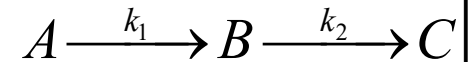
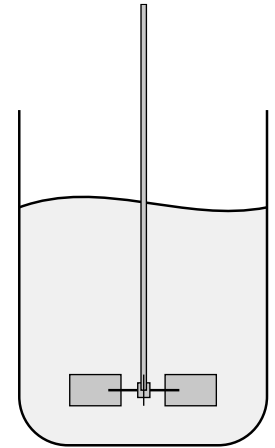
$$\frac{dM_C}{dt} = r_C V \quad r_C = k_2 C_B$$

$$V \frac{dC_C}{dt} = k_2 C_B V$$

$$\frac{dC_C}{dt} = k_2 C_B$$

Ejemplo practico:

- $k_1 = 0.5 \text{ mol}/(\text{litro min})$
- $k_2 = 0.3 \text{ min}^{-1}$
- La concentración inicial es de A es $C_{A0} = 2 \text{ mol/litro}$



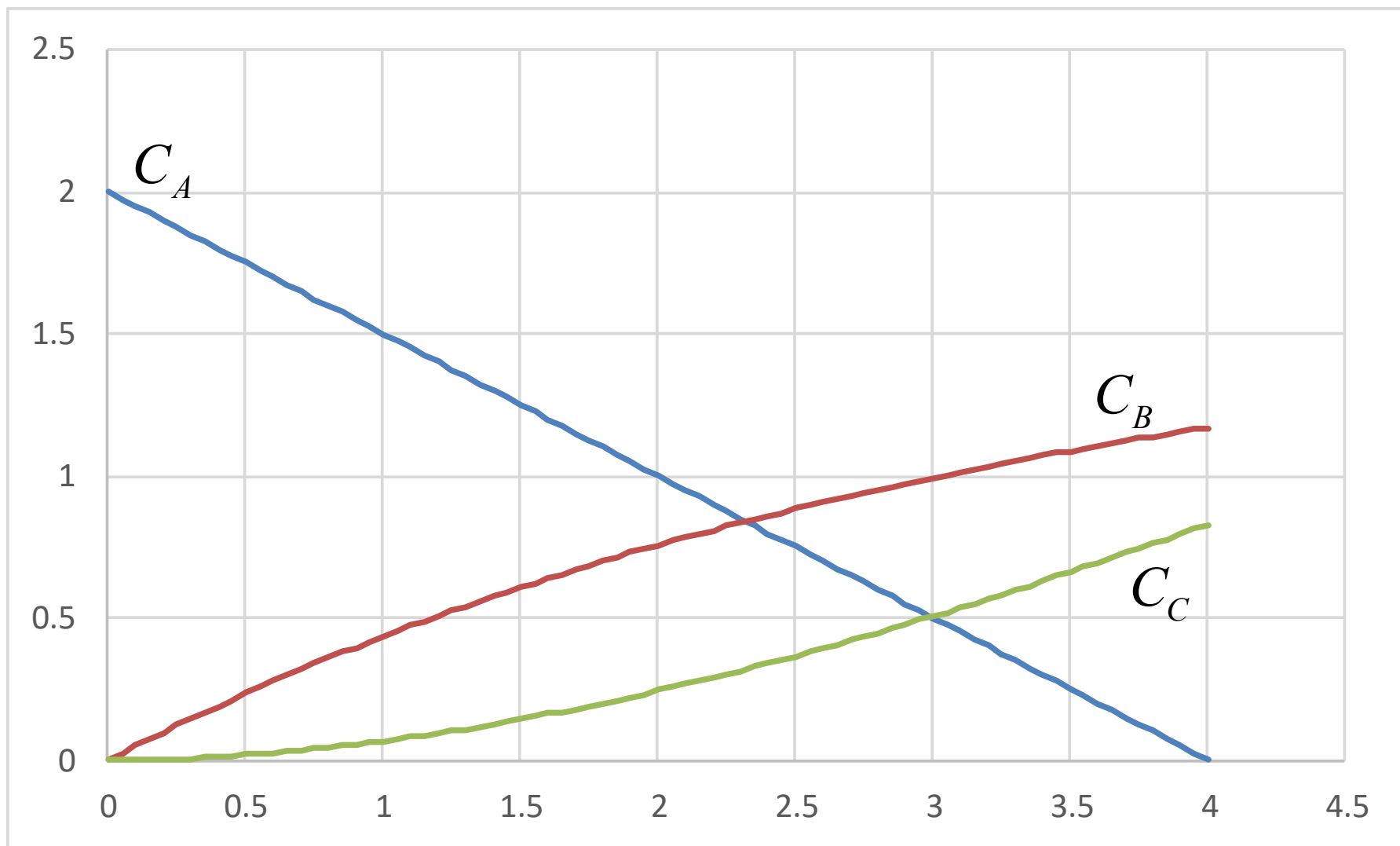
$$\frac{dC_A}{dt} = -0.5$$

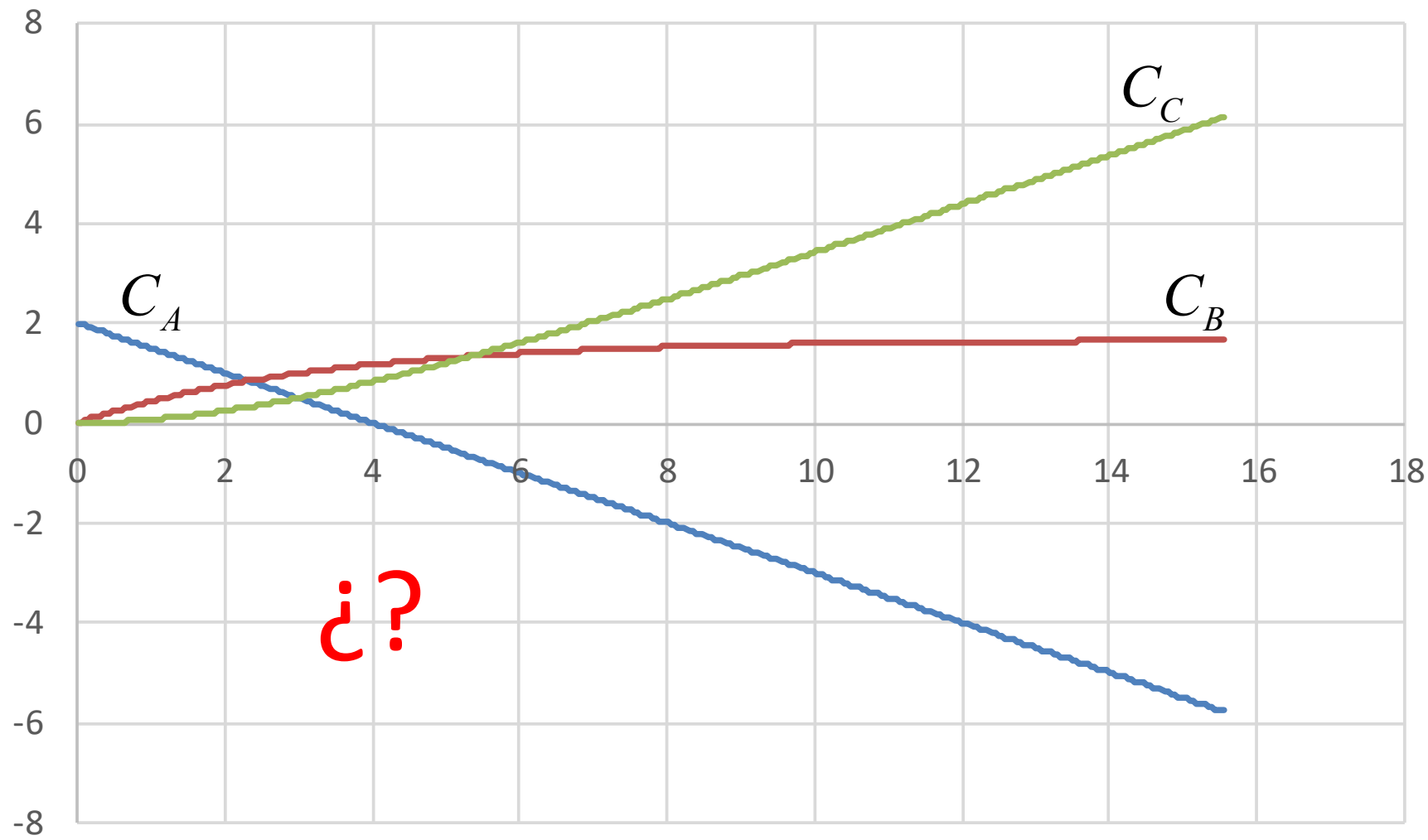
$$\frac{dC_B}{dt} = 0.5 - 0.3C_B$$

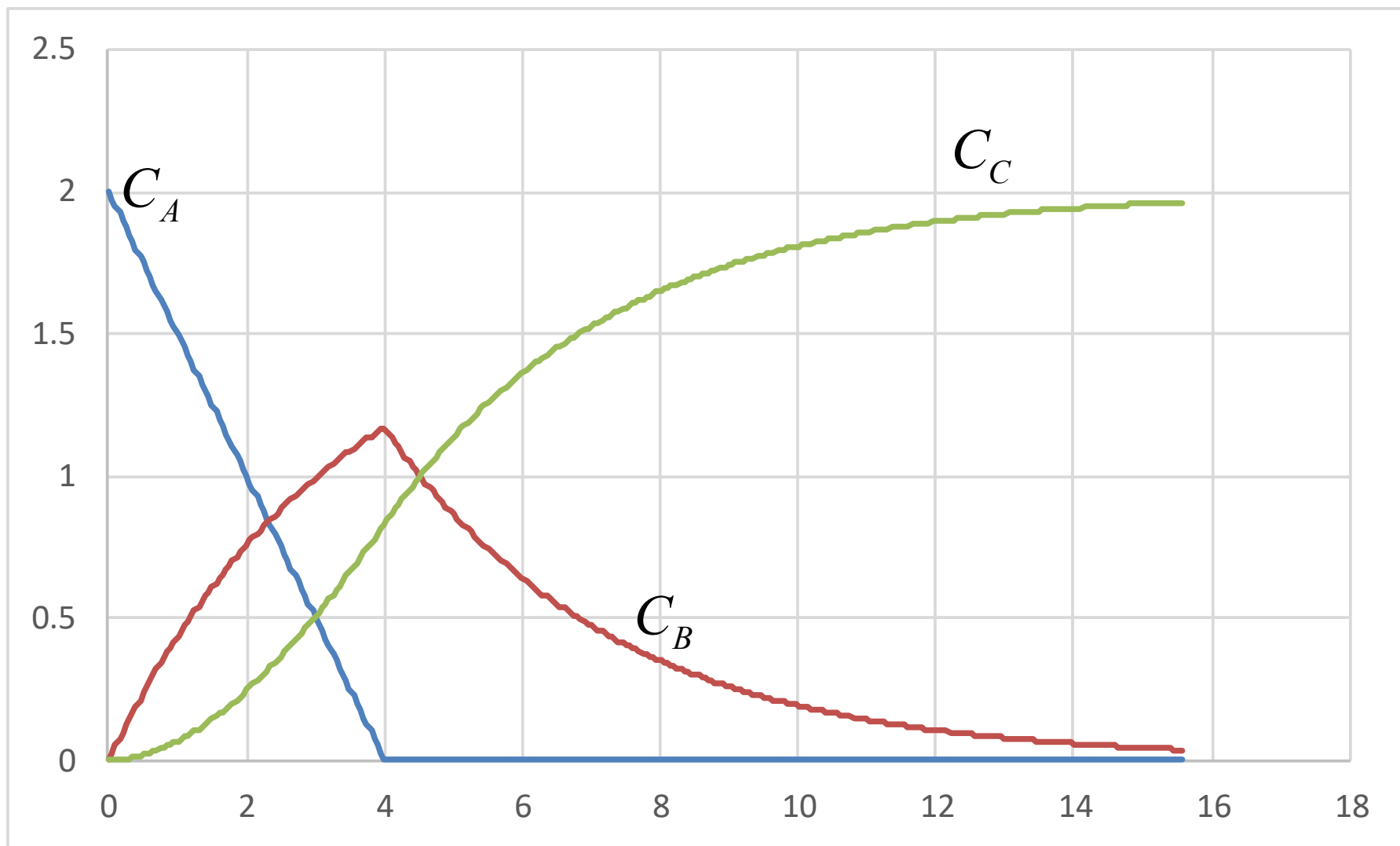
$$\frac{dC_C}{dt} = 0.3C_B$$

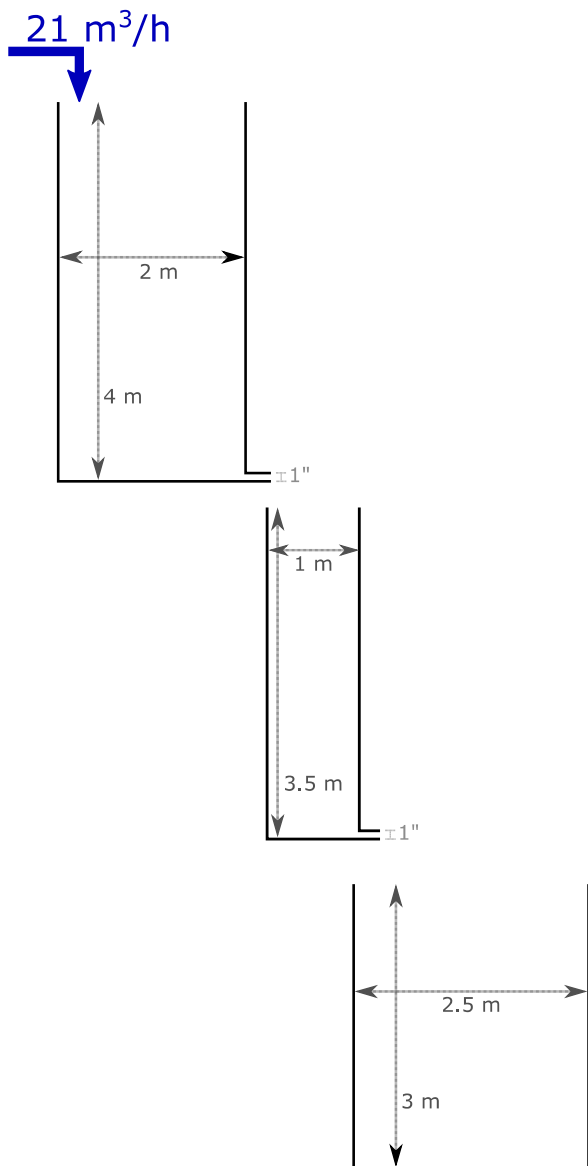
$$t = 0$$

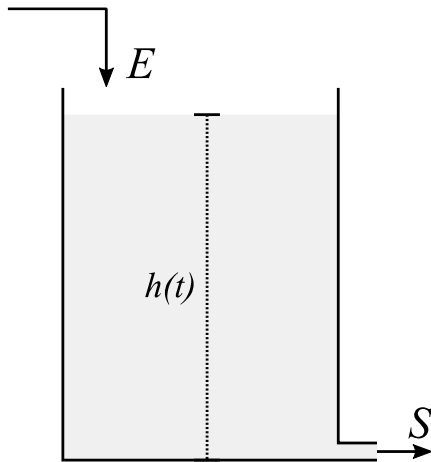
$$C_A = 2; C_B = 0; C_C = 0$$











Tanque cilíndrico y densidad constante

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_E - Q_S}{A_T}$$

$$Q_S = A_s \sqrt{2gh}$$

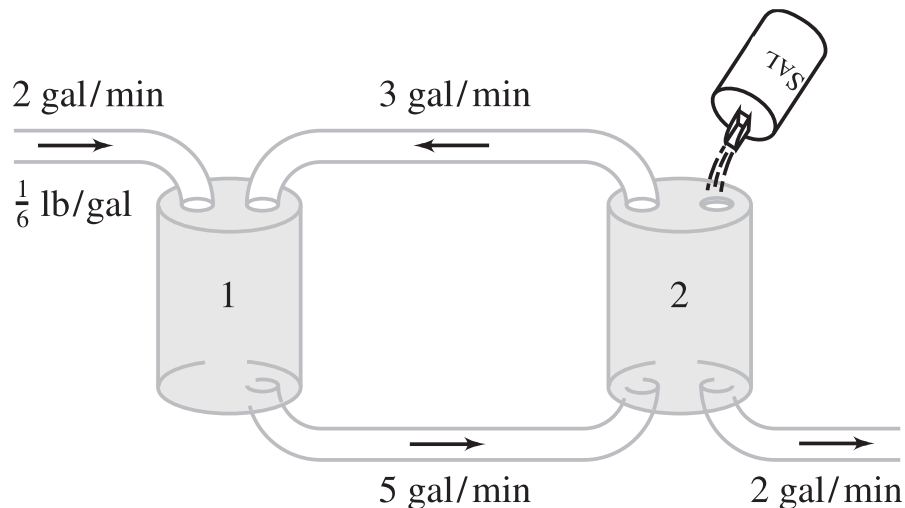
Q_E : Caudal volumétrico de entrada.

Q_S : caudal volumétrico de salida.

A_T : Área transversal del tanque.

A_s : Área del orificio de salida.

Realizar el modelo para tres tanques



$$V_1 = 60 \text{ gal} \quad c_1(0) = 0 \text{ lb/gal}$$

$$V_2 = 18 \text{ gal} \quad c_2(0) = 0 \text{ lb/gal}$$

$$60 \frac{dc_1}{dt} = 2 \frac{1}{6} + 3c_2 - 5c_1 \quad \text{Tanque 1}$$

$$18 \frac{dc_2}{dt} = 5c_1 - 3c_2 - 2c_2 + \text{sal} \quad \text{Tanque 2}$$

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^2 \ln y$$

- Identificar la variable independiente y dependiente.
- Resolver en el intervalo $[0,1]$.
- $\Delta t=0.1$ e $y(0)=1.1$.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2y + 4e^{-x} \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{yz^2}{3} \end{cases}$$

- Resuelva el sistema utilizando el método de Euler explícito, suponiendo que en $x = 0$, $y = 2$ y $z = 4$. Integre hasta $x = 1$ con un tamaño de paso igual a 0.2.
- Plantear como se resolvería con Euler implícito