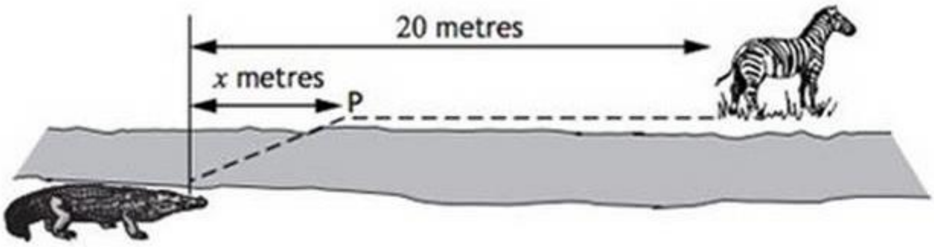
Ejercitación 2do cuatrimestre – 2025

1) Un cocodrilo acecha a su presa situada en la otra orilla de un río. Los cocodrilos viajan a diferente velocidad en el agua que en tierra. El tiempo que tarda el cocodrilo en llegar a su presa puede reducirse si nada x metros corriente arriba hasta un punto P en la otra orilla como muestra el diagrama.



El tiempo que tarda (t) se mide en décimas de segundo y está dado por la fórmula:

$$t(x) = 5\sqrt{36+x^2} + 4(20-x)$$

a) Calcular el tiempo transcurrido si el cocodrilo no viaja por tierra.
b) Calcular el tiempo transcurrido si el cocodrilo nada la distancia más corta posible.
c) Entre esos dos extremos, cuál es el valor de x que minimiza el tiempo transcurrido. Hallar ese valor para determinar cuál es el mínimo tiempo posible.

Fuente: Scottish Qualifications Authority (SQA) Higher Maths exam 2015: Crocodile and zebra question 'proved to be challenging'

---

2) Encontrar un valor mínimo de las siguientes funciones en el intervalo propuesto:

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - 2sen(x) \ \ / \ x \in [0.1, 2]$$

$$f(x) = x^3 - 3x \ / \ x \in [-3, 3]$$

$$f(x) = 2x^2(x-2)(x+2) \ / \ x \in [-5, 5]$$

$$f(x) = 0.1x^6 - 0.29x^5 + 2.31x^4 - 8.33x^3 + 12.89x^2 - 6.8x + 1 \ / \ x \in [-1, 2]$$

---

3) El costo total anual operativo de un motor en un determinado proceso es función de su tamaño. Encontrar el tamaño del motor x (Hp) que minimiza el costo total operativo C [$/año].
Realizar dos iteraciones con MIPS y luego, utilizando como valor inicial el mejor valor obtenido, continuar con Newton hasta satisfacer una tolerancia de 1×10^{-6}

$$C = 500 + 0.9x + \frac{0.03}{x}150000$$

4) El costo total anual de una cañería corresponde a la suma del costo de inversión (compra e instalación) y del costo operativo (bombeo).

Costo de operación: $C_{inv} = C_0 \dfrac{m\Delta p}{\rho\eta}$

Costo de inversión: $C_{inv} = C_1 D^{1.3} L$

C_0 y C_1: Coeficientes de costo.

D: Diámetro de la tubería.

η: Eficiencia de la bomba.

Δp: Caída de presión.

ρ: Densidad.

m: Flujo másico.

L: Longitud de la tubería.

El balance de energía mecánica (sin caída de presión en los accesorios y sin cambios de elevación) corresponde a:

$$\Delta p = 2 f \rho v^2 \frac{L}{D}$$

f: Factor de fricción.

v: Velocidad del líquido.

Por la ecuación de continuidad el flujo másico está dado por la siguiente expresión:

$$m = \left(\frac{\rho \pi D^2}{4} \right) v$$

El factor de fricción está relacionado con el número de Reynolds del sistema:

$$f = 0.046\,\mathrm{Re}^{-0.2} = \frac{0.046\mu^{0.2}}{D^{0.2} v^{0.2} \rho^{0.2}}$$

μ: Viscosidad del líquido.

Introduciendo las expresiones anteriores en los costos originales se llega a la función que representa al costo total del sistema:

$$C = C_1 D^{1.3} L + 0.142 \frac{C_0}{\eta} m^{2.8} \mu^{0.2} \rho^{-2} D^{-4.8} L$$

Finalmente, dividiendo por la longitud de la tubería, se obtiene el costo total de tubería por unidad de longitud:

$$c = C_1 D^{1.3} + 0.142 \frac{C_0}{\eta} m^{2.8} \mu^{0.2} \rho^{-2} D^{-4.8}$$

De esta manera el diámetro óptimo de la instalación corresponde al diámetro (D) que minimiza la expresión anterior.

a) Graficar el costo de inversión, el costo de operación y el costo total por unidad de longitud para el siguiente problema:

Caso de estudio

m : 50 lb/seg.

ρ : 60 lb/pie[3].

μ : 6.72x10-4 lb/(pie.seg)

η : 0.6 (60%)

C_0 : 0.018456

C_1 : 5.7

c : Costo total por unidad de longitud $/(año.pie)

b) Encuentre el diámetro óptimo y el costo mínimo correspondiente.

---

5) La búsqueda de línea nos permite encontrar el valor mínimo (o máximo) que toma una función sobre una dirección determinada de búsqueda. Partiendo del punto x_o y utilizando la dirección en el espacio d podemos encontrar el valor mínimo que toma la función mediante una optimización unidimensional.

Determinar ese valor mínimo de la función f en la dirección dada.

$$Min.\, f(\underline{x}) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) \\ sen(\pi/4) \end{bmatrix}$$

---

6) Determinar el valor mínimo de la función de Rosenbrok en la dirección dada. Utilize xo=[0;0] como valor inicial.

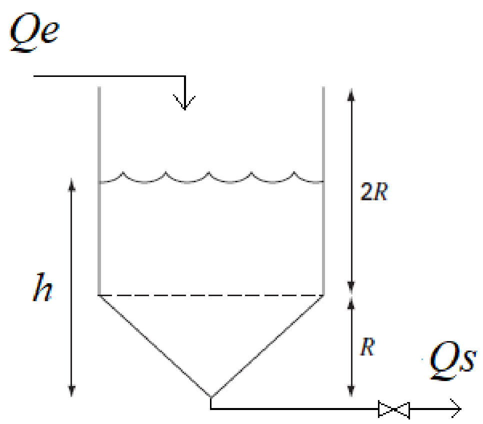
$$\boxed{Min.\;\; f(\underline{x}) = (1-x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2}$$

$$\boxed{\underline{d} = -\nabla f(\underline{x})}$$

---

7) Para estudiar la dinámica de un sistema, debe realizarse un balance de materia en estado transitorio. Para el tanque de la figura se obtiene:

$$Qe\,\rho - Qs\,\rho = \rho\frac{dV}{dt}$$



ρ : Densidad del fluido.

Qe : Caudal de entrada.

Qs : Caudal de salida.

V : Volumen del fluido en el tanque.

Dividiendo ambos miembros por la densidad y considerando que

$$V = A\,h$$

h : Altura del líquido. A : Área del tanque.

Reemplazando se obtiene:

$$Qe - Qs = \frac{d(A\,h)}{dt}$$

El caudal de salida está dado por:

$$Qs = cv\,\sqrt{h\,g}$$

cv : Coeficiente de la válvula.

g : Constante de gravedad.

Grafique la evolución de la altura de líquido en un tanque cónico con el tiempo. Considere un tiempo final igual a 210 segundos y para el método numérico considere un Δt =1 segundo.

Datos:

Altura inicial del tanque: 4 m

Diámetro del tanque: 4 m

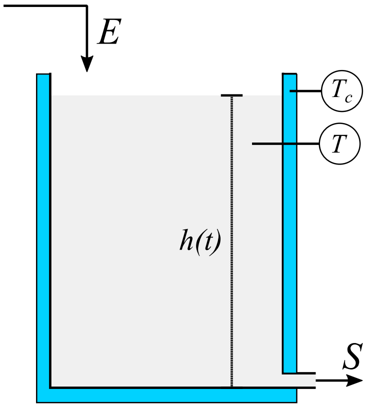
Coeficiente válvula: 0.0816 m^2

Caudal de entrada: 0.25 m^3/s

<u>Ayuda</u>: En un tanque de **sección no constante**, el área es función de la altura. Una vez conocida su funcionalidad, se reemplaza en la ecuación obteniendo la ecuación diferencial de interés.

---

8) Un tanque cilíndrico que cuenta con una camisa de calentamiento se comienza a alimentar con un caudal de fluido de 0.01 m^3/s. En el mismo instante se pone en funcionamiento su camisa calefactora. Encontrar cual es la temperatura de salida del fluido transcurrido 15 minutos.

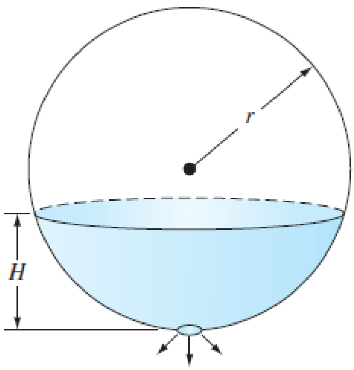


Datos:

Altura inicial del tanque: 0.1 m
Diámetro del tanque: 1 m
Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
Densidad del fluido 1000 kg/m^3
Temperatura inicial 283.15 K
Temperatura de alimentación 283.15 K
Temperatura de la camisa 373.15 K
Calor especifico del fluido 4.2 kJ/(kg K)
Coeficiente de intercambio de calor 1 kW/(m^{2}K)

9) Un tanque esférico tiene un orificio circular en el fondo a través del cual fluye líquido. La tasa de flujo a través del agujero se calcula como:

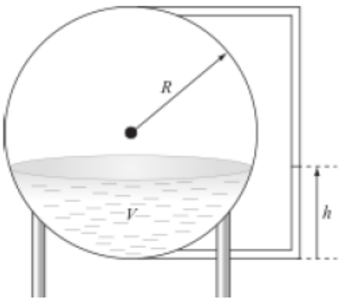
$$Q_{sal} = CA\sqrt{2gH}$$



Donde Q_{sal} es el flujo de salida (m3/s), C es un coeficiente obtenido en forma empírica, A es el área del orificio (m2), g es la constante gravitacional y H es la profundidad del líquido dentro del tanque. Determine cuántos minutos tomaría que el agua fluyera por completo de un tanque de 1 m de diámetro con altura inicial de 0.75 m. Observe que el orificio tiene un diámetro de 3 cm y C = 0.55.

Ayuda: El volumen de líquido que puede almacenar un tanque esférico está dado por la siguiente expresión

$$V = \pi h^2 \frac{(3R-h)}{3}$$



10) Se tiene la siguiente Ecuación Diferencial:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y}$$

a) Identifique la variable independiente y la dependiente.

b) Utilizando Euler Implícito, calcule el valor de **y** para un **t = 4**. Considere y=1 para t=0.

---

11) En cada uno de los siguientes casos use la linealidad de la transformada de Laplace y la tabla para encontrar la transformada de Laplace de la función.

a. $t^3 - 3t + \cos(4t)$

b. $3e^{-t} + sen(6t)$

---

12) En cada uno de los siguientes casos, use la linealidad de la transformada inversa de Laplace y la tabla para encontrar la transformada inversa de Laplace (continua) de la función.

a. $\dfrac{4s}{s^2 - 14}$

b. $\dfrac{3}{s-7} + \dfrac{1}{s^2}$

---

13) Resolver las siguientes EDOs utilizando Laplace:

a. $y' - 4y = 1 \qquad y(0) = 1$

b. $y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$