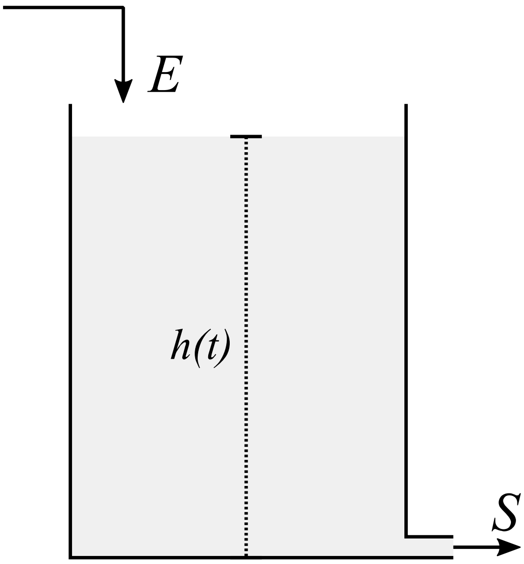
Modelado de un sistema dinámico mediante EDOs

Supongamos que se tiene un tanque que tiene una alimentación de líquido y una salida de líquido al fondo. Este puede ser un tanque de agua o un reactor que se está llenando/vaciando.
Tener un **modelo** de este sistema permitiría conocer cómo se comportan las variables como altura de líquido, caudales de salida/entrada en el tiempo y así por ejemplo predecir la altura de líquido para el diseño de un sistema de control o una alarma para evitar que el tanque rebalse.

Para modelar la evolución del sistema en el tiempo se realiza un balance de masa sobre un tanque en estado dinámico.

Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{ingresa al sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{abandona el sistema}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de la masa dentro del sistema}\end{bmatrix}$$



En base másica:

$$Acumulación = Masa\,que\,entra - Masa\,que\,sale$$

$$\frac{dM}{dt} = me - ms$$

Donde me y ms son los caudales másicos de entrada y salida del tanque respectivamente y $\frac{dM}{dt}$ es la velocidad de acumulación de masa dentro del tanque.

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico

Reemplazando los caudales másicos por el caudal volumétrico Q por la densidad del líquido ρ se obtiene $m = Q\rho$. Reemplazando en el balance y considerando que la densidad no varía con el tiempo:

$$\frac{dV}{dt}\rho = Qe\rho - Qs\rho$$

Considerando que la densidad se mantiene constante puede simplificarse y se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = Qe - Qs$$

Reemplazando el volumen V por el volumen de un cilindro $V = At\,h$ donde At es el área transversal del tanque y h la altura del líquido en el tanque. Reemplazando en el balance:

$$At\frac{dh}{dt} = Qe - Qs \qquad \text{Ec.1}$$

El caudal Q dependerá si proviene de una bomba o si proviene de otro tanque:

Caudal proveniente de una bomba	$Q = cte$
Caudal por salida gravitatoria de un tanque de sección transversal As y altura de líquido h	$Q = As\sqrt{2gh}$
Caudal por salida gravitatoria de un tanque de esférico de área de salida A, coeficiente empírico C y altura de líquido h	$Q = CA\sqrt{2gh}$

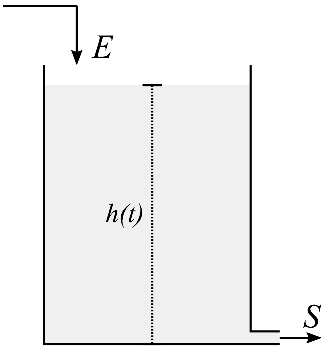
Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación Ec.1 junto con la correcta expresión de Q dependiendo de la situación que tengamos de llenado y vaciado de tanque.

Aplicación al problema

Caso 1 – Llenado de un tanque sin control de nivel alimentado por bomba

Considere que un tanque que tiene un diámetro de 2 metros y una altura de 4 metros cuenta con un orificio de salida de 0.015 m. El tanque se encuentra vacío y en un determinado momento comienza a ser alimentado por medio de una bomba que brinda un caudal de 0.05 m3/min.

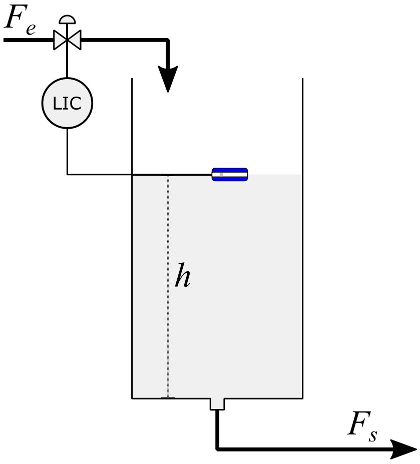
El caudal de entrada depende de una bomba, por lo que es constante. El caudal de salida es gravitatorio y depende de la altura del líquido y el área del orifico.



a) Muestre en un gráfico la evolución en el tiempo de la altura del tanque para un tiempo total de 2 horas. En otro gráfico muestre el caudal de salida vs el tiempo. ¿Qué altura de líquido tiene el tanque luego de 2 horas?
b) Se desea realizar una modificación en el sistema aumentando el caudal de entrada de agua. ¿Qué valor máximo puede tener el caudal de entrada sin que el tanque rebalse, si en el momento inicial se tiene un pulmón de líquido del 85% del volumen total del tanque?
c) Con el valor de alimentación original (0.05 m3/s) se conecta otra salida del tanque con otro orificio igual al anterior. El tanque tiene un pulmón de líquido del 85% del volumen total del tanque. Muestre en un gráfico la evolución en el tiempo de la altura del tanque para un tiempo total de 2 horas con esta nueva salida adicional del tanque. ¿Qué altura de líquido tiene el tanque luego de 2 horas?

Caso 2 – Tanque con control on-off alimentado por bomba con salida gravitatoria

Un tanque de alimentación de agua cuenta con un controlador on/off por medio de un flotante. El tanque tiene un diámetro de 2 metros y cuenta con un orificio de salida de 0.0508 m. La alimentación al tanque se hace por medio de una bomba que brinda un caudal de 0.05 m3/s. El flotante controla el caudal de entrada activando la válvula de entrada de agua cuando la altura de líquido es menor a 4.5 m y cortando la entrada cuando la altura es mayor a 5.5 m para que el tanque no rebalse. El tanque tiene una altura de 6 m.

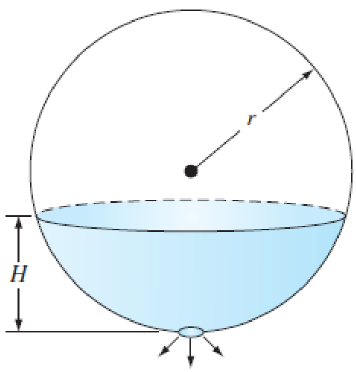


a) El tanque se encuentra vacío al inicio. Muestre en un gráfico la evolución en el tiempo de la altura del tanque para un tiempo total de 12 horas. En otro gráfico muestre el caudal de salida vs el tiempo. ¿En qué momentos prende o apaga la bomba de alimentación?

Caso 3 – Llenado de un tanque esférico sin control de nivel alimentado por bomba

Considere que un tanque esférico que tiene un diámetro de 2 metros cuenta con un orificio de salida Observe que el orificio tiene un diámetro de 3 cm y C = 0.55. El tanque tiene una altura de líquido inicial de 0.75 m y no cuenta con alimentación.

El caudal de entrada depende de una bomba, por lo que es constante. El caudal de salida es gravitatorio y depende de la altura del líquido y el área del orifico.



a) Muestre en un gráfico la evolución en el tiempo de la altura del tanque para un tiempo total de 2 horas. En otro gráfico muestre el caudal de salida vs el tiempo. ¿Qué altura de líquido tiene el tanque luego de 2 horas?

b) ¿Cuántas horas tarde el tanque en vaciarse?

Ayuda: El volumen de líquido que puede almacenar un tanque esférico está dado por la siguiente expresión

$$V = \pi h^2 \frac{(3R - h)}{3}$$