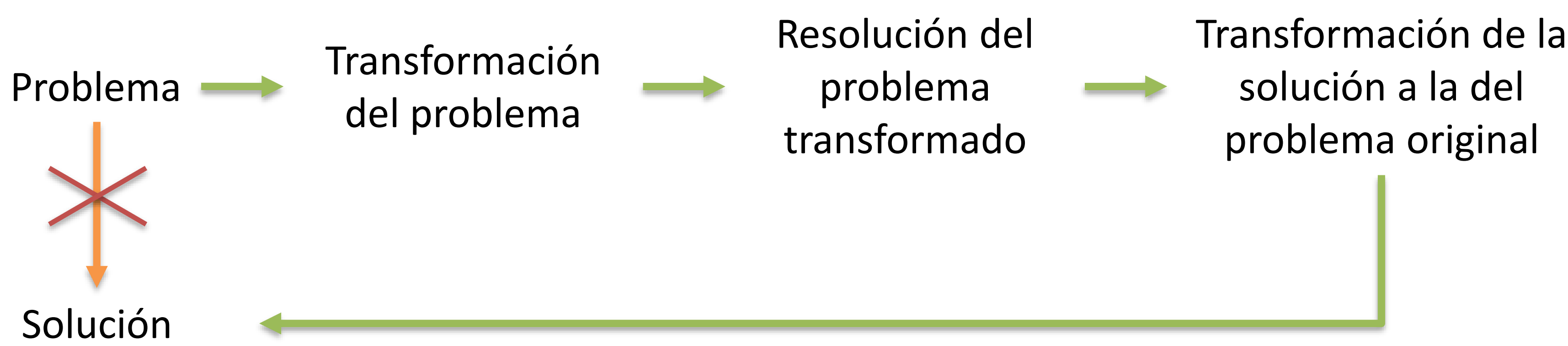
Introducción a la Transformada de Laplace

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

Introducción: Transformadas

- En matemáticas se llama **transformar** al mecanismo que convierte un problema de un tipo a otro, este último presumiblemente más fácil de resolver.
- El modo de hacerlo es resolver primero el problema transformado, para después transformar de regreso y obtener la solución del problema original.



- Las funciones que realizan estas transformaciones se conocen como “**transformadas**”.

Dada una función ***f(t)*** integrable en el intervalo ***[t_1 t_2]*** se puede definir una nueva función ***F(s)*** según:

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(s,t)\, dt$$

Donde ***K(s,t)*** es una función integrable en la variable ***t***.

Como se define a partir de una integral, este tipo de transformación se conoce como ***transformación integral*** de la función *f(t)*.

$$F(s) = T\left(f(t)\right)$$

$$\boxed{F(s)} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\boxed{K(s,t)}\,dt$$

Transformada de la función *f*

Núcleo integral

Normalmente la transformada integral se puede invertir por medio de una **transformada inversa:**

$$f(t) = \int_{s_1}^{s_2} F(s)K^{-1}(s,t)\,ds$$

$$f(t) = T^{-1}(F(s))$$

*Nota: El -1 corresponde a la condición de función inversa **NO** a una potencia.*

Al estar definidas a partir de una integración, las transformadas integrales son transformaciones lineales.

$$h(t) = a\, f(t)$$

$$T\big(h(t)\big) = H(s) = \int_{t_1}^{t_2} h(t)\, K(s,t)\, dt \;= \int_{t_1}^{t_2} a\, f(t)\, K(s,t)\, dt$$

$$H(s) = a \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, K(s,t)\, dt \;= aF(s)$$

$$h(t) = a\, f(t) + b\, g(t) \;\Rightarrow H(s) = a\, F(s) + b\, G(s)$$

Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-ist}dt$$

Transformada de Hilbert:

$$\mathcal{H}il\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)\frac{1}{\pi}\frac{1}{s-t}dt$$

Transformada de Mellin:

$$\mathcal{M}\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)=\int_{0}^{\infty}f\left(t\right)t^{s-1}dt$$

Transformada de Laplace

En el análisis de la dinámica de procesos, las variables son funciones del tiempo. La transformada de Laplace de una función del tiempo *f(t)*, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

para todo s **tal que esta integral converja**.

F(s) : Transformada de Laplace de la función *f(t)*
s : variable de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace transforma a la función del tiempo (t) en una función de la variable de la transformada de Laplace (s).

Transformada de Laplace: Ejemplo

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=1 \rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}dt$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sk} - \left(-\frac{1}{s}e^{-s0}\right)\right)$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sk} + \frac{1}{s}\right) = \boxed{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sk}\right)} + \frac{1}{s}$$

= 0; siempre que s>0

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s}} \quad s > 0$$

La transformada de Laplace de *f(t)* = *1* es *F(s)* = *1/s*, definida por *s* > *0*.

$$f(t) = e^{at} \rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \left(\left. \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right|_0^k \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} - \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)0} \right) \right)$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \boxed{\left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} \right)} - \frac{1}{a-s}$$

= 0; siempre que s>a

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s-a}} \quad s > a$$

La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = 1/(a\text{-}s)$, definida por $s > a$.

- No es habitual calcular una transformada de Laplace a partir de su definición, es decir, resolviendo la integral.
- Para realizar transformaciones se cuenta con tablas de transformadas de Laplace para funciones de uso frecuente.
- También, aprovechando las propiedades de las transformadas se pueden separar las funciones en varios términos y realizar la transformación términos individuales.

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) \longrightarrow \mathcal{L}\left(f(t)\right)$$

1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

VER TABLA

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

VER TABLA

De gran interés para la resolución de EDOs

Dada una función G y una función g tal que

$$G(s) = \mathcal{L}\big(g(t)\big)$$

g se conoce como **transformada inversa de Laplace** de G.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(G(s)\big)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(\alpha F(s) + \beta G(s)\big) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Cumple la propiedad de linealidad

Ahora se debe leer la tabla de manera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right) \longleftarrow F\left(s\right)$$

1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \, (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$

VER TABLA

Ejemplo: Obtener la transformada de Laplace

$$f(t) = \cos(t) - sen(t)$$

$\text{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}$

de Tabla

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos(t)] - \mathcal{L}[sen(t)]$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{s-1}{s^2+1}$$

Ejemplo: Obtener la inversa de la transformada de Laplace

$$F(s)=\frac{-2}{s+16}$$

e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

de Tabla

$$F(s)=-2\,\frac{1}{s-(-16)}$$

a

$$f(t)=-2e^{-16t}$$

Primer teorema de corrimiento

Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > b \geq 0$. Sea a cualquier número, entonces

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a) \quad \text{para } s > a+b$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1} \quad \rightarrow \mathcal{L}\left[e^{2t}\cos(t)\right] = \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$$

Primer teorema de corrimiento

Por otro lado, si

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at} f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

Ejemplo II:

$$F(s)=\frac{6}{(s-7)^4}$$

$$g(t)=t^3 \qquad G(s)=\frac{6}{s^4}$$ de tabla

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

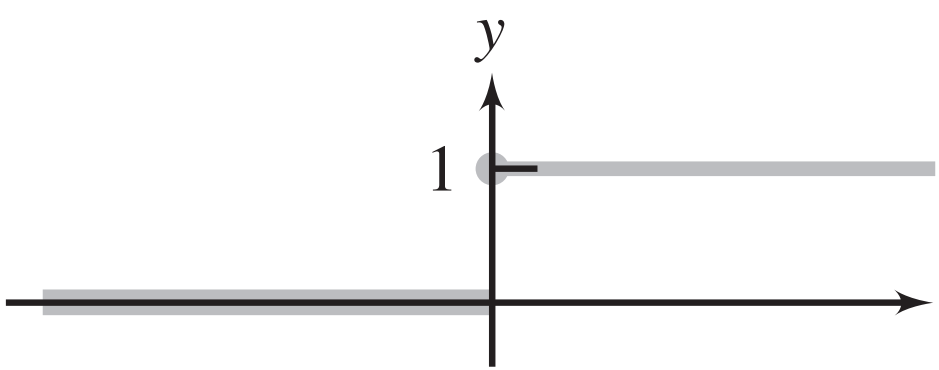
$$F(s)=G(s-7)$$

$$f(t)=e^{7t}t^3$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=e^{7t}\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

La función de Heaviside H está definida por

$$H(t)=\begin{cases} 0 \ si \ t<0 \\ 1 \ si \ t\geq 0 \end{cases}$$



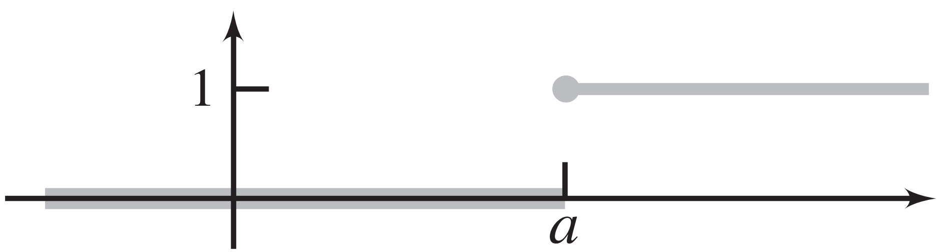
función “ON” “OFF”

Oliver Heaviside (1850-1925) fue un ingeniero electricista inglés que hizo mucho por introducir la transformada de Laplace en la práctica ingenieril.

Función de Heaviside

Si a es cualquier número, entonces $H(t\text{-}a)$ es la función de Heaviside corrida a unidades a la derecha.

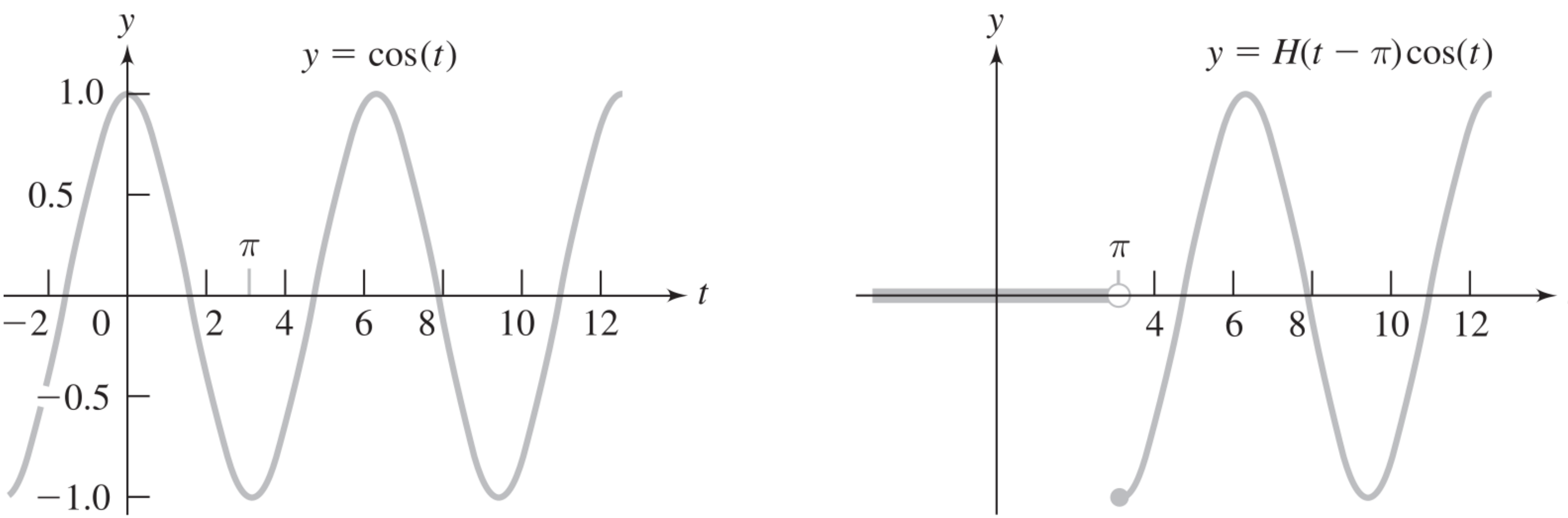
$$H\left(t-a\right)=\begin{cases}0 \ si \ t<a \\ 1 \ si \ t\geq a\end{cases}$$



Función de Heaviside

Se puede usar $H(t - a)$ para lograr el efecto de mantener una función g apagada hasta el tiempo $t = a$ y en dicho tiempo prenderla.

$$H(t-a)\,g(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < a \\ g(t) \ si \ t \geq a \end{cases}$$

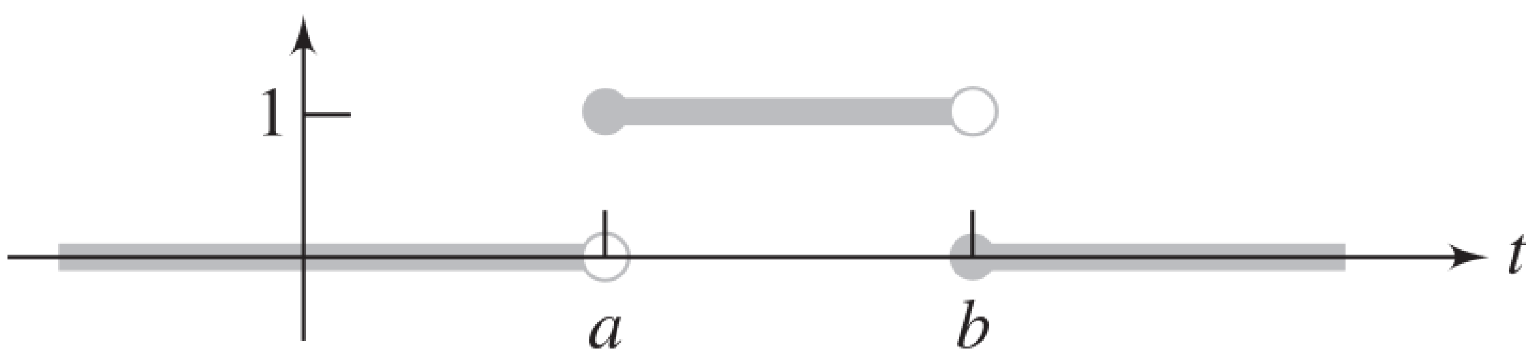


Comparación de $y = \cos(t)$ *y* $y = H(t - \pi)\cos(t)$.

La función de Heaviside también sirve para describir un pulso (plano):

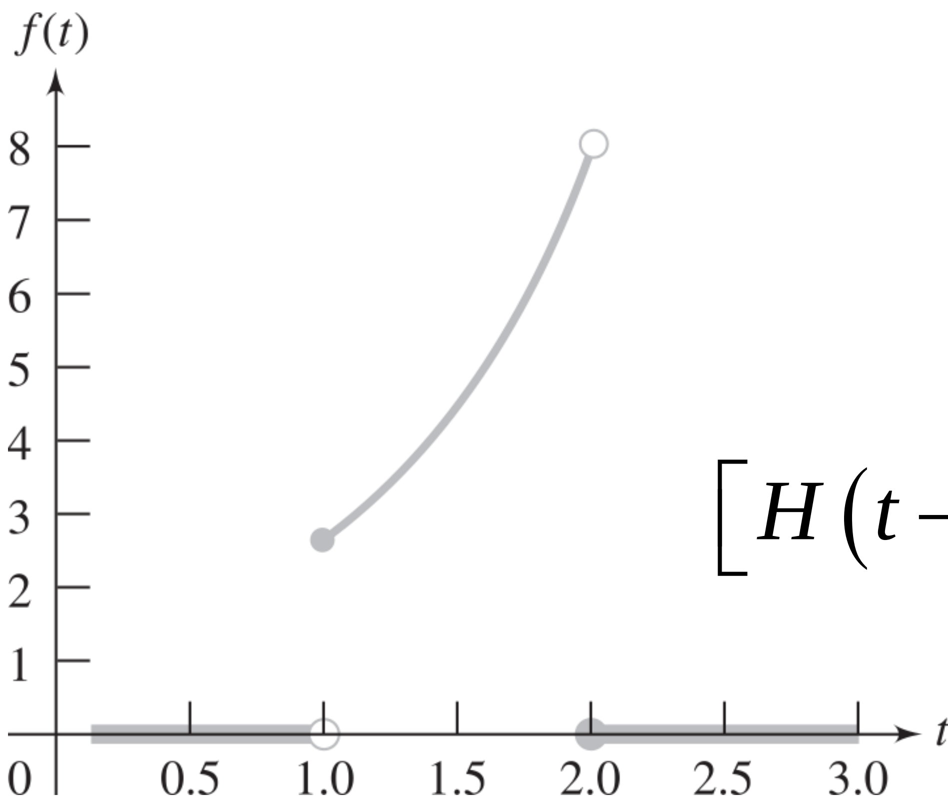
$$k\left[H\left(t-a\right)-H\left(t-b\right)\right]$$

en donde $a < b$ y k es un número real distinto de cero



La función de Heaviside también sirve para describir un pulso de una función:

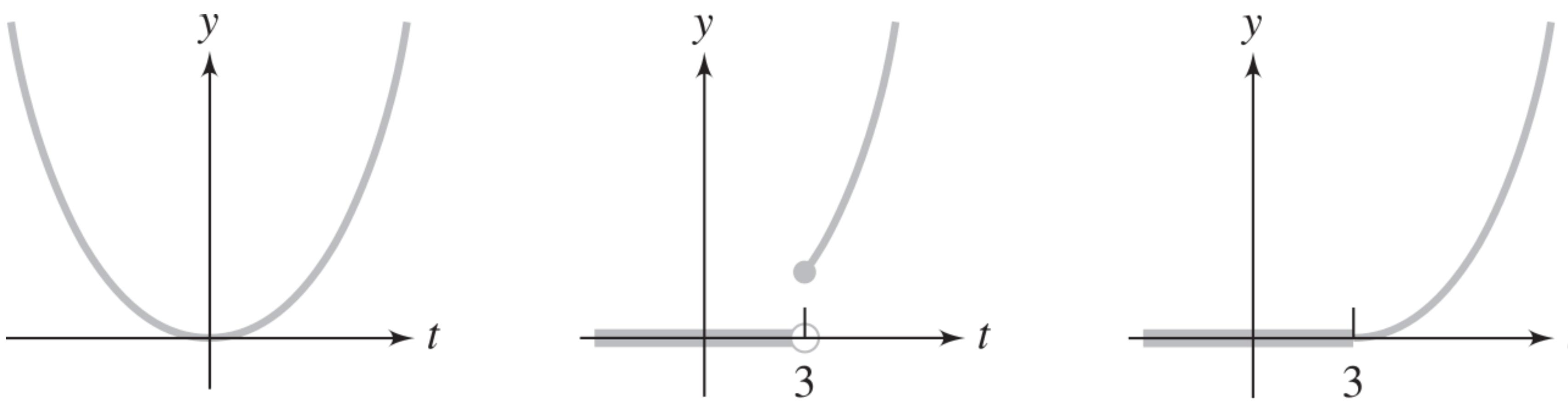
$$\left[H\left(t-a\right)-H\left(t-b\right)\right]f\left(t\right)$$



$$\left[H\left(t-1\right)-H\left(t-2\right)\right]e^{t}$$

También se puede usar $H(t-a)$ para lograr el efecto de correr una función g hasta el tiempo $t = a$.

$$H(t-a)\,g(t-a)=\begin{cases} 0 \;\; si \;\; t<a \\ g(t-a) \;\; si \;\; t\geq a \end{cases}$$



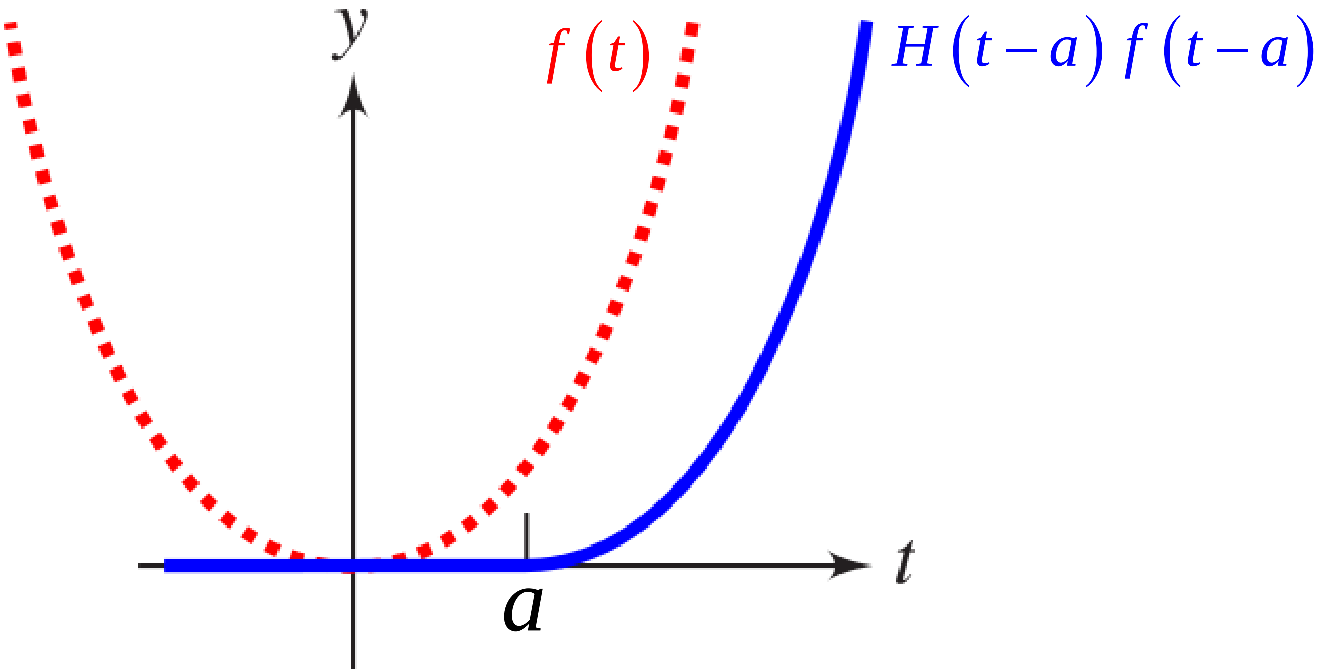
Comparación de $y = t^2$, $y = t^2H(t-3)$, *y* $y = (t-3)^2H(t-3)$.

Segundo teorema de corrimiento

Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > b$. Entonces,

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)\,f(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$$

para $s>b$



Demostración:

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)\,f(t-a)\right]=\int_0^{\infty} H(t-a)\,f(t-a)e^{-st}dt$$

$$=\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt \xrightarrow{w=t-a} =\int_0^{\infty} f(w)e^{-s(w+a)}dw$$

$$=\int_0^{\infty} f(w)e^{-ws}e^{-as}dw \;=e^{-as}\int_0^{\infty} f(w)e^{-ws}dw$$

$$\mathcal{L}\left[H(t-a)\,f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

Transformada de una derivada

La relación entre la transformada de Laplace de una función y la de su derivada corresponde a:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

La transformada de Laplace de la derivada de f es s veces la transformada de Laplace de f en s, menos f en cero

Demostración

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty f\, e^{-st}dt \;\rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)=\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

Vamos a resolver por partes la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt=\lim_{k\rightarrow\infty}\int_0^k \frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

$$\begin{cases} v= f \\ u=e^{-st}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{df}{dt} \\ \dfrac{du}{dt}=-se^{-st}\end{cases} \rightarrow \frac{df}{dt}e^{-st}=\frac{dv}{dt}u=\frac{dvu}{dt}-v\frac{du}{dt}$$

$$\int_0^k\left(\frac{dvu}{dt}-v\frac{du}{dt}\right)dt \;=\int_0^k\frac{dvu}{dt}dt-\int_0^k\left(v\frac{du}{dt}\right)dt \quad =vu\Big|_0^k-\int_0^k\left(v\frac{du}{dt}\right)dt$$

Demostración

$$\int_0^k \left(\frac{dvu}{dt} - v\frac{du}{dt} \right) dt \quad = vu\Big|_0^k - \int_0^k \left(v\frac{du}{dt} \right) dt \quad = f\, e^{-st}\Big|_0^k - \int_0^k f\left(-se^{-st} \right) dt$$

$$= \left[f(k)e^{-sk} - f(0) \right] + s\int_0^k f\, e^{-st} dt$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{k\to\infty} \left(\left[f(k)e^{-sk} - f(0) \right] + s\int_0^k f\, e^{-st} dt \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(f(k)e^{-sk} \right) - f(0) + s\int_0^\infty f\, e^{-st} dt$$

Finalmente:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)=\underbrace{\cancel{\lim_{k\to\infty}\left(f(k)e^{-sk}\right)}}_{=0}-f(0)+s\int_0^\infty f\,e^{-st}dt$$

suponemos que para $k\to\infty$ y $s>0$ se cumple que $f(k)e^{-sk}\to 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)=-f(0)+s\int_0^\infty f\,e^{-st}dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)=sF(s)-f(0)}$$

Generalización

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0) \qquad n = 1$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \qquad n = 2$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^3 f}{dt^3}\right) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \qquad n = 3$$

Transformada de una Integral

La relación entre la transformada de Laplace de una función y la de su integral corresponde a:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

La demostración de esta propiedad también puede realizarse integrando por partes la definición de la transformada de Laplace.

- La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver cierto tipo de problemas con valores iniciales.
- La técnica se basa en la propiedad de la transformada de Laplace de una derivada.

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$\frac{dy}{dt}-4y=1 \qquad y(0)=1$$

Es un problema de valor inicial

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}-4y\right)=\mathcal{L}(1)\rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right)-4\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(1)$$

$$\boxed{sY(s)-y(0)}-4\boxed{Y(s)}=\boxed{\frac{1}{s}}$$

Y ahora...

$$Y(s)(s-4)-1=\frac{1}{s}$$

$$\boxed{Y(s)=\frac{1}{s(s-4)}+\frac{1}{(s-4)}}$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$\boxed{Y(s)=\frac{1}{s(s-4)}+\frac{1}{(s-4)}}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right)+\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)}$$

$a = 4$

5.	e^{at}	$\boxed{\dfrac{1}{s-a}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)=e^{4t}$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$\boxed{Y(s)=\frac{1}{s(s-4)}+\frac{1}{(s-4)}}$$

$$y(t)=\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right)}+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)}\right)$$

$a=0$

$b=4$

8.	$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\boxed{\frac{1}{(s-a)(s-b)}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right)=\frac{1}{0-4}\left(e^{0t}-e^{4t}\right)=-\frac{1}{4}\left(1-e^{4t}\right)$$

Ejemplo de resolución de una EDO

$$\boxed{Y(s)=\frac{1}{s(s-4)}+\frac{1}{(s-4)}}$$

Solución en el dominio de Laplace

$$y(t)=-\frac{1}{4}\left(1-e^{4t}\right)+e^{4t}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{5}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}}$$

Solución en el dominio temporal

- La transformada de Laplace puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones que involucren derivadas e integrales.
- Ejemplo: $x''-2x'+3y'+2y=4$

$$2y'-x'+3y=0$$

$$x(0)=x'(0)=y(0)=0$$

$$s^2X-s\,x(0)-x'(0)-2\big(sX-x(0)\big)+3\big(sY-y(0)\big)+2Y=\frac{4}{s}$$

$$2\big(sY-y(0)\big)-\big(sX-x(0)\big)+3Y=0$$

$$s^2 X - s\,x(0) - x'(0) - 2\big(sX - x(0)\big) + 3\big(sY - y(0)\big) + 2Y = \frac{4}{s}$$

$$2\big(sY - y(0)\big) - \big(sX - x(0)\big) + 3Y = 0$$

$$s^2 X - 2sX + 3sY + 2Y = \frac{4}{s} \quad \rightarrow s(s-2)X + (3s+2)Y = \frac{4}{s}$$

$$2sY - sX + 3Y = 0 \quad \rightarrow Y = \frac{s}{(2s+3)}X$$

$$s(s-2)X + \frac{s(3s+2)}{(2s+3)}X = \frac{4}{s}$$

$$\left((s-2) + \frac{(3s+2)}{(2s+3)}\right)sX = \frac{4}{s}$$

$$\left(\left(s-2\right)+\frac{\left(3s+2\right)}{\left(2s+3\right)}\right)sX=\frac{4}{s}$$

$$\frac{\left(2s+3\right)\left(s-2\right)+\left(3s+2\right)}{\left(2s+3\right)}sX=\frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^{2}-4s+3s-6+3s+2}{\left(2s+3\right)}sX=\frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^{2}+2s-4}{\left(2s+3\right)}sX=\frac{4}{s}$$

$$\frac{2s^2+2s-4}{(2s+3)}sX=\frac{4}{s}\rightarrow X=\frac{4(2s+3)}{s^2(2s^2+2s-4)}$$

$$X=\frac{4(2s+3)}{s^2 2(s^2+s-2)}$$

$$Y=\frac{s(4s+6)}{s^2(s^2+s-2)(2s+3)}$$

$$X=\frac{4s+6}{s^2(s^2+s-2)}$$

$$Y=\frac{2s}{s^2(s^2+s-2)}$$

$$X = \frac{4s+6}{s^2\left(s^2+s-2\right)}$$

Para utilizar la tabla hay que descomponer en fracciones parciales o simples

Wiki: El método de descomposición en fracciones simples consiste en **descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado**.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad gr\left[P(x)\right] < gr\left[Q(x)\right]$$

El **grado** del polinomio del numerador tiene que ser estrictamente menor que el del denominador.

Para reducir la expresión a fracciones parciales se debe expresar el denominador como el producto de factores **lineales** o **cuadráticos**.

Caso 1: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)$$

Hay que calcularlas

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Descomponer: $$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}\rightarrow\frac{7x+3}{(x+4)(x-1)}$$

<u>Caso 2</u>: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x+b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

Hay que calcularlas

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$$

Descomponer: $\dfrac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$

<u>Caso 3</u>: El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, ninguno de los cuales se repite.
Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde, $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Hay que calcularlas

Descomponer: $$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6} \rightarrow \frac{4x^2-8x+1}{(x+2)\left(x^2-2x+3\right)}$$

<u>Caso 4</u>: El denominador $Q(x)$ contiene un factor irreductible repetido.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

Hay que calcularlas

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \ldots + \frac{A_k x + B_k}{\left(ax^2 + bx + c\right)^k}$$

Descomponer: $$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$$\boxed{X=\frac{4s+6}{s^2\left(s^2+s-2\right)}}$$

Para utilizar la tabla hay que descomponer en fracciones parciales o simples

raíces $\begin{cases}\alpha_1=-2\\ \alpha_2=1\end{cases}$

$$X=\frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)}$$

Un factor cuadrático y dos lineales distintos

$$X=\frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)}=\frac{A_1s+B_1}{s^2}+\frac{A_2}{(s+2)}+\frac{A_3}{(s-1)}$$

$$\frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)}s^2(s+2)(s-1)=\left(\frac{A_1s+B_1}{s^2}+\frac{A_2}{(s+2)}+\frac{A_3}{(s-1)}\right)s^2(s+2)(s-1)$$

Multiplicamos miembro a miembro por el denominador común

$$\frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)}s^2(s+2)(s-1)=\left(\frac{A_1s+B_1}{s^2}+\frac{A_2}{(s+2)}+\frac{A_3}{(s-1)}\right)s^2(s+2)(s-1)$$

$$4s+6=(A_1s+B_1)(s+2)(s-1)+A_2s^2(s-1)+A_3s^2(s+2)$$

$$4s+6=(A_1s+B_1)(s+2)(s-1)+A_2s^2(s-1)+A_3s^2(s+2)$$

$$4s+6=(A_1s+B_1)\left(s^2+s-2\right)+A_2s^3-A_2s^2+A_3s^3+2A_3s^2$$

$$4s+6=A_1s^3+A_1s^2-2A_1s+B_1s^2+B_1s-B_12+A_2s^3-A_2s^2+A_3s^3+2A_3s^2$$

$$4s+6=(A_1+A_2+A_3)s^3+(A_1+B_1-A_2+2A_3)s^2+(-2A_1+B_1)s-B_12$$

$$4s+6=\left(A_1+A_2+A_3\right)s^3+\left(A_1+B_1-A_2+2A_3\right)s^2+\left(-2A_1+B_1\right)s-B_1 2$$

$$\begin{cases} -B_1 2=6 \\ -2A_1+B_1=4 \\ A_1+B_1-A_2+2A_3=0 \\ A_1+A_2+A_3=0 \end{cases}$$

$$B_1=-3$$

$$A_1=-3.5$$

$$\begin{cases} -3.5-3-A_2+2A_3=0 \\ -3.5+A_2+A_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_2+2A_3=6.5 \\ A_2+A_3=3.5 \end{cases}$$

$$A_2=\frac{1}{6}$$

$$A_3=\frac{10}{3}$$

$$B_1 = -3$$

$$A_1 = -3.5$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \frac{10}{3}$$

$$X = \frac{A_1 s + B_1}{s^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s-1)}$$

$$X = \frac{-3.5s - 3}{s^2} + \frac{1/6}{(s+2)} + \frac{10/3}{(s-1)}$$

$$\boxed{X = -3.5\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+2)} + \frac{10}{3}\frac{1}{(s-1)}}$$

$$Y=\frac{2s}{s^2\left(s^2+s-2\right)}$$

$$\boxed{Y=-\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(s+2\right)}+\frac{2}{3}\frac{1}{\left(s-1\right)}}$$

$$X = -3.5\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+2)} + \frac{10}{3}\frac{1}{(s-1)}$$

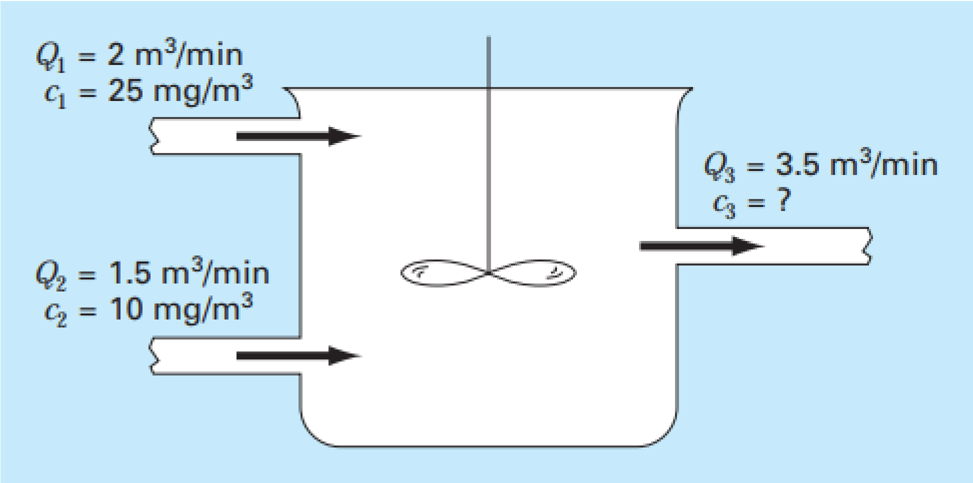
$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s+2)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s-1)}$$

Pasar a dominio temporal

$$x(t) = -3.5 - 3t + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{t}$$

$$y(t) = -1 + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)



Balance Masa

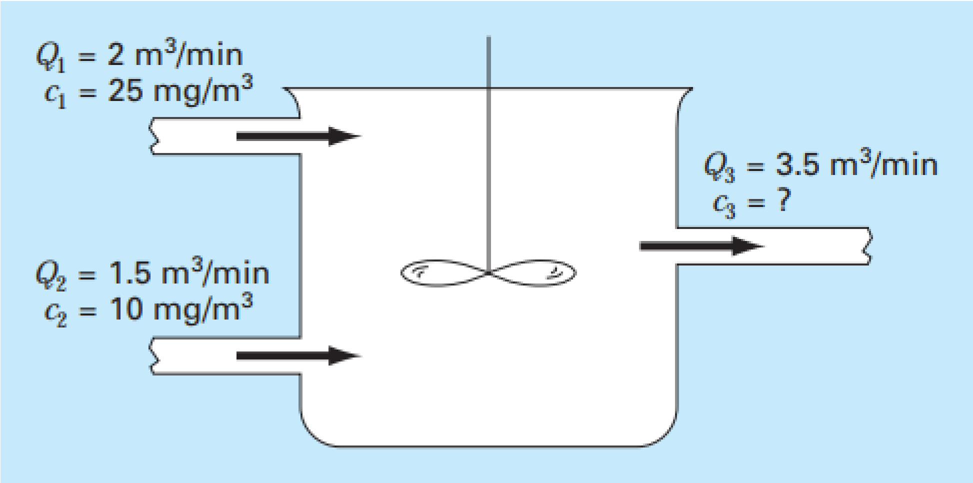
$$\frac{dM}{dt} = m_1 + m_2 - m_3$$

$$\rho \frac{dV_{liq}}{dt} = \rho Q_1 + \rho Q_2 - \rho Q_3$$

$$\rho \frac{dV_{liq}}{dt} = \rho Q_1 + \rho Q_2 - \rho Q_3$$

$$\frac{dV_{liq}}{dt} = 0 \rightarrow V_{liq} = \text{constante}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)



Balance Masa por Componente

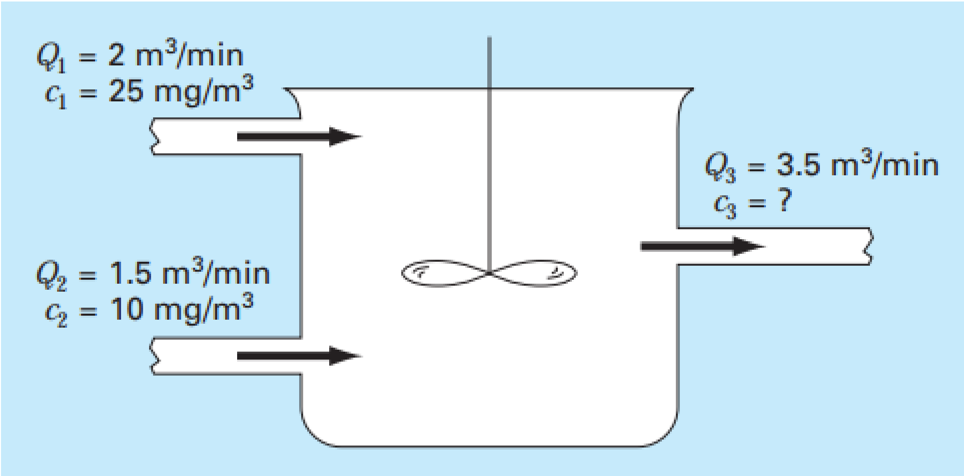
$$\frac{dM_c}{dt} = m_{c,1} + m_{c,2} - m_{c,3}$$

$$M_c = c_3 V_{liq} \rightarrow \frac{dM_c}{dt} = V_{liq}\frac{dc_3}{dt} \qquad m_{c,k} = Q_k c_k$$

$$V_{liq}\frac{dc_3}{dt} = Q_1 c_1 + Q_2 c_2 - Q_3 c_3$$

$$q = \frac{Q}{V_{liq}} \rightarrow \frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)



$$\frac{dc_3}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3$$

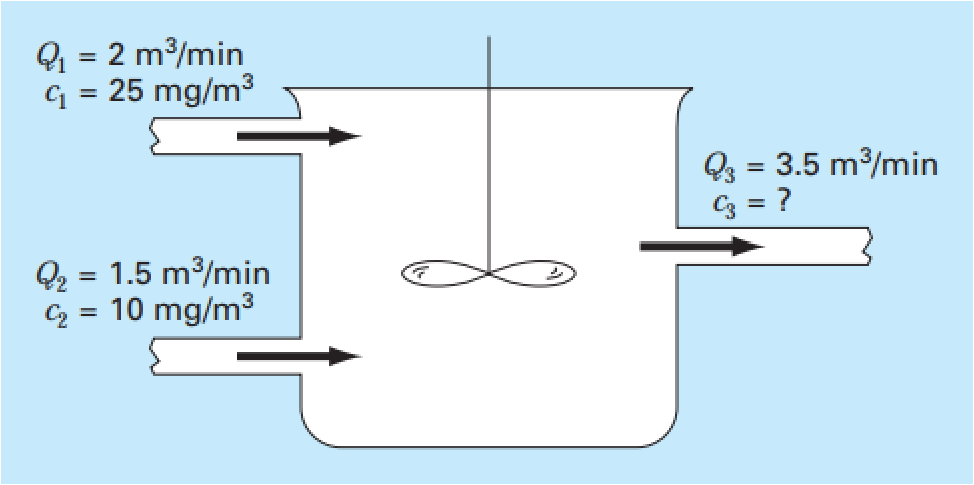
Para analizar el sistema suponemos que $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$

$$sC_3(s) - c_3(0) = q_1 C_1(s) + q_2 C_2(s) - q_3 C_3(s)$$

$$C_3(s)(s + q_3) = q_1 C_1(s) + q_2 C_2(s) + c_3(0)$$

$$\boxed{C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)



$$V_{liq} = 200 m^3$$

$$q_1 = 0.01 \quad q_2 = 0.0075 \quad q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

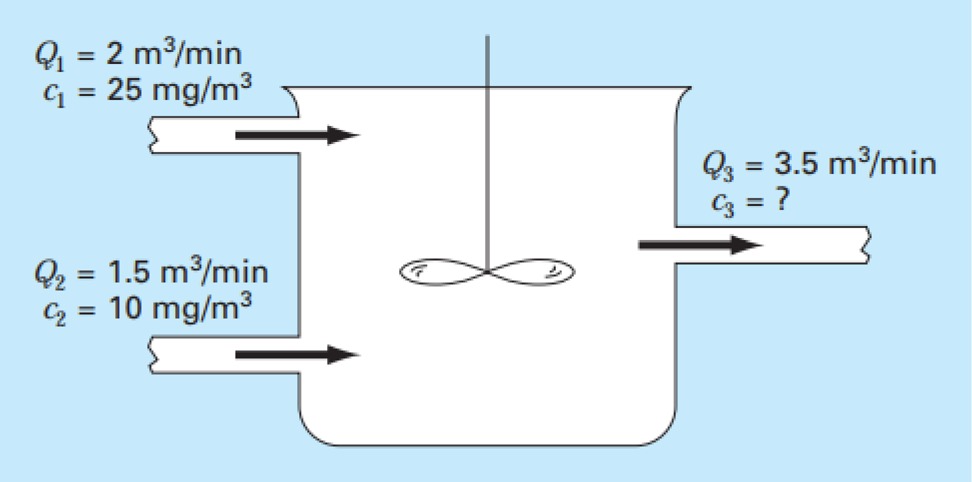
Caso 1:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% (c_2 permanece constante)

$$c_1(t) = 25 + 0.5 H(t)$$

$$C_1(s) = \frac{25}{s} + \frac{0.5}{s} = \frac{25.5}{s} \qquad c_2(t) = 10 \rightarrow C_2(s) = \frac{10}{s}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \; q_2 = 0.0075 \;\; q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)

$$C_3(s)=\frac{q_1 25.5+q_2 10}{s(s+q_3)}+\frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$V_{liq}=200m^3$

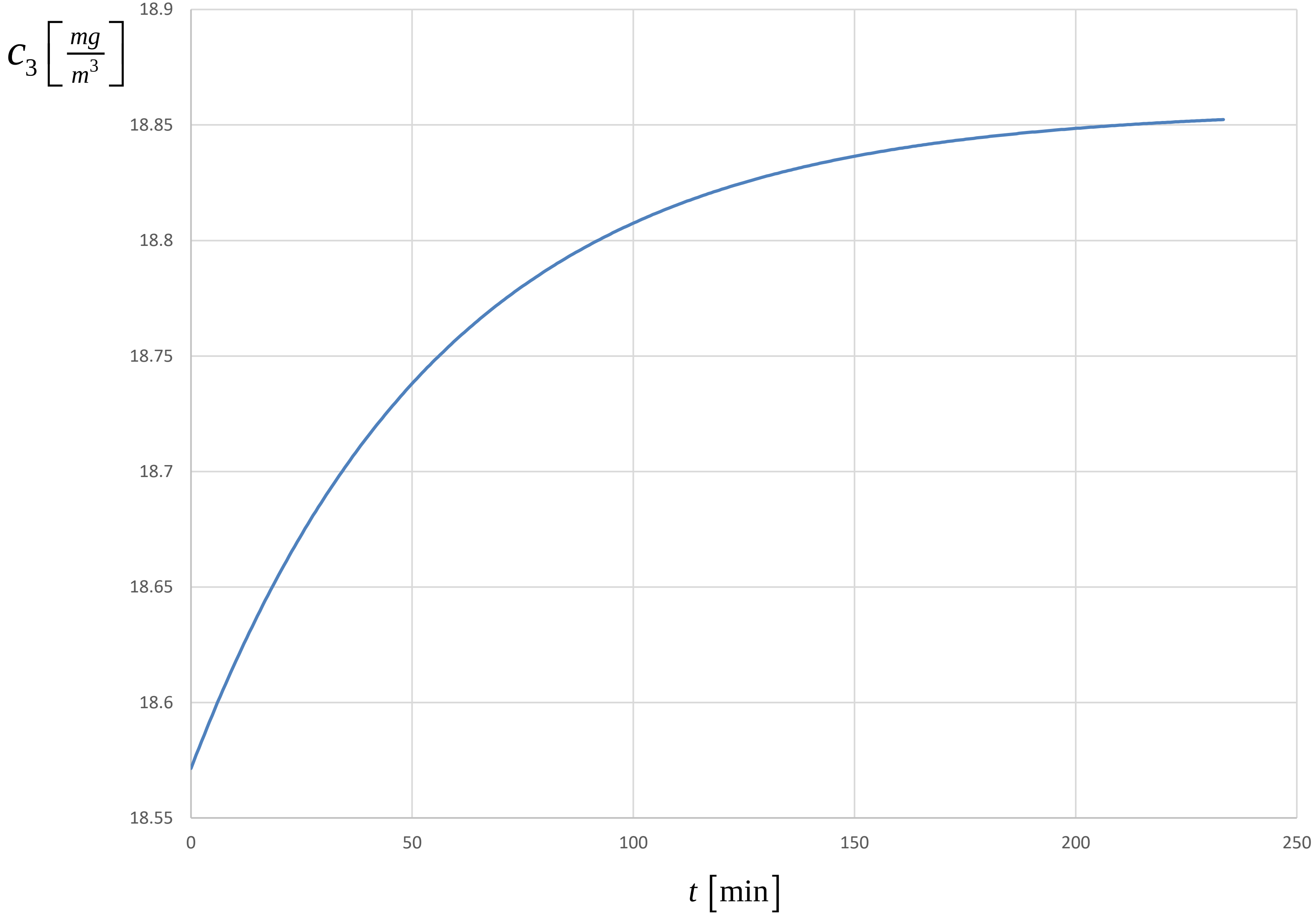
$q_1=0.01\; q_2=0.0075\;\; q_3=0.0175$

$c_3(0)=18.571429$

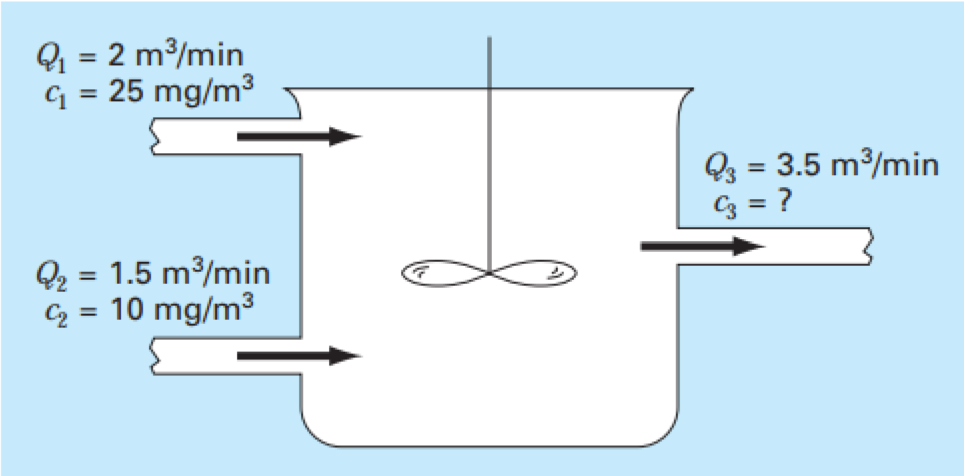
$$C_3(s)=\frac{0.33}{s(s+0.0175)}+\frac{18.571429}{(s+0.0175)}$$

$$c_3(t)=18.857143\left(1-e^{-0.0175t}\right)+18.571429e^{-0.0175t}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)



Ejemplo de resolución de una EDO (III)



$$V_{liq} = 200m^3$$

$$q_1 = 0.01 \; q_2 = 0.0075 \;\; q_3 = 0.0175$$

Suponemos comienzo en EE

$$c_3(0) = {}^{65}\!/_{3.5}$$

<u>Caso 2</u>:

A tiempo cero la concentración c_1 aumenta un 2% y luego de 20 minutos vuelve a su estado normal (c_2 permanece constante).

$$c_1(t) = 25 + 0.5H(t) - 0.5H(t-20)$$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} - e^{-20s}\frac{0.5}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)

$$C_3(s) = \frac{q_1 C_1(s)}{(s+q_3)} + \frac{q_2 C_2(s)}{(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)}$$

$V_{liq} = 200m^3$

$q_1 = 0.01 \; q_2 = 0.0075 \;\; q_3 = 0.0175$

$c_3(0) = 18.571429$

$$C_1(s) = \frac{25.5}{s} - e^{-20s}\frac{0.5}{s} \qquad C_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$C_3(s) = \frac{q_1 25.5 + q_2 10}{s(s+q_3)} + \frac{c_3(0)}{(s+q_3)} - e^{-20s}\frac{0.5q_1}{s(s+q_3)}$$

$$C_3(s) = \frac{0.33}{s(s+0.0175)} + \frac{18.571429}{(s+0.0175)} - e^{-20s}\frac{0.005}{s(s+0.0175)}$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)

$$C_3\left(s\right)=\frac{0.33}{s\left(s+0.0175\right)}+\frac{18.571429}{\left(s+0.0175\right)}-e^{-20s}\,\frac{0.005}{s\left(s+0.0175\right)}$$

$$c_3\left(t\right)=18.857143\left(1-e^{-0.0175t}\right)+18.571429e^{-0.0175t}\ldots$$

$$\ldots-0.285714\left(1-e^{-0.0175\left(t-20\right)}\right)H\left(t-20\right)$$

Ejemplo de resolución de una EDO (III)