Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias (EDOs)

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si $y = f(x)$

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente

La denominación de "ordinaria" se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Expresión implícita:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$$

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Orden: máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Grado: grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Lineal: la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

No Lineal: la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$$y' - \cos(\omega x) = 0$$

EDO lineal de 1er orden y 1er grado

$$y'' + k^2 y = 0$$

EDO lineal de 2do orden y 1er grado

$$(y'')^3 - xyy' + y = 0$$

EDO no lineal de 2do orden y 3er grado

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{n}\right) = 0$$

Diremos que una función $y\colon [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada n-ésima de y en todo punto del intervalo$[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

Introducción

Para encontrar *y(x)* (solución) es necesario efectuar *n* integraciones, lo cual implica que deben aparecer *n* constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g\left(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0 \;\; x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\begin{cases} y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}\right) \; x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Introducción

El problema de valores iniciales para una EDO de primer orden corresponde a:

$$\begin{cases} f\left(x, y, y'\right) = 0 \;\; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \end{cases}$$

Forma Implícita

$$\begin{cases} y' = f\left(x, y\right) \;\; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \end{cases}$$

Forma Explicita

Introducción

Las EDOs de orden *n* se pueden transformar en *n* EDOs de 1er orden mediante un cambio de variables:

$$y^n = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$$ EDO original

$$\left.\begin{array}{l} y \\ y' = y_1 \\ y'' = y_1' \to y_1' = y_2 \\ y''' = y_1'' = y_2' \to y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y^{n-1} = y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y^n = y'_{n-1} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} y'_{n-1} = f\left(x, y, y_1, y_2 \ldots, y_{n-1}\right) \\ y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \end{array}\right.$$

Sistema de *n* EDOs de 1er orden equivalente

Nos interesan los métodos para resolver EDOs de 1er orden

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \end{cases}$$

Sistema de EDOs

Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$$

Problema de Valores de Contorno:

- Deben establecerse condiciones en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio.
- En el espacio o dominio unidimensional hay dos puntos frontera, en $x=a$ y $x=b$ si el dominio es el intervalo cerrado $[a,b]$.
- El orden mínimo de una EDO para un problema de valores de frontera es $n=2$.

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

- Evaluación explícita de $f(x,y(x))$ y sus derivadas.
- Avance paso a paso en el tiempo sin utilizar procedimientos iterativos.
- Métodos más difundidos:
  - Euler
  - Runge – Kutta de 4to. orden

Método de Euler (explícito)

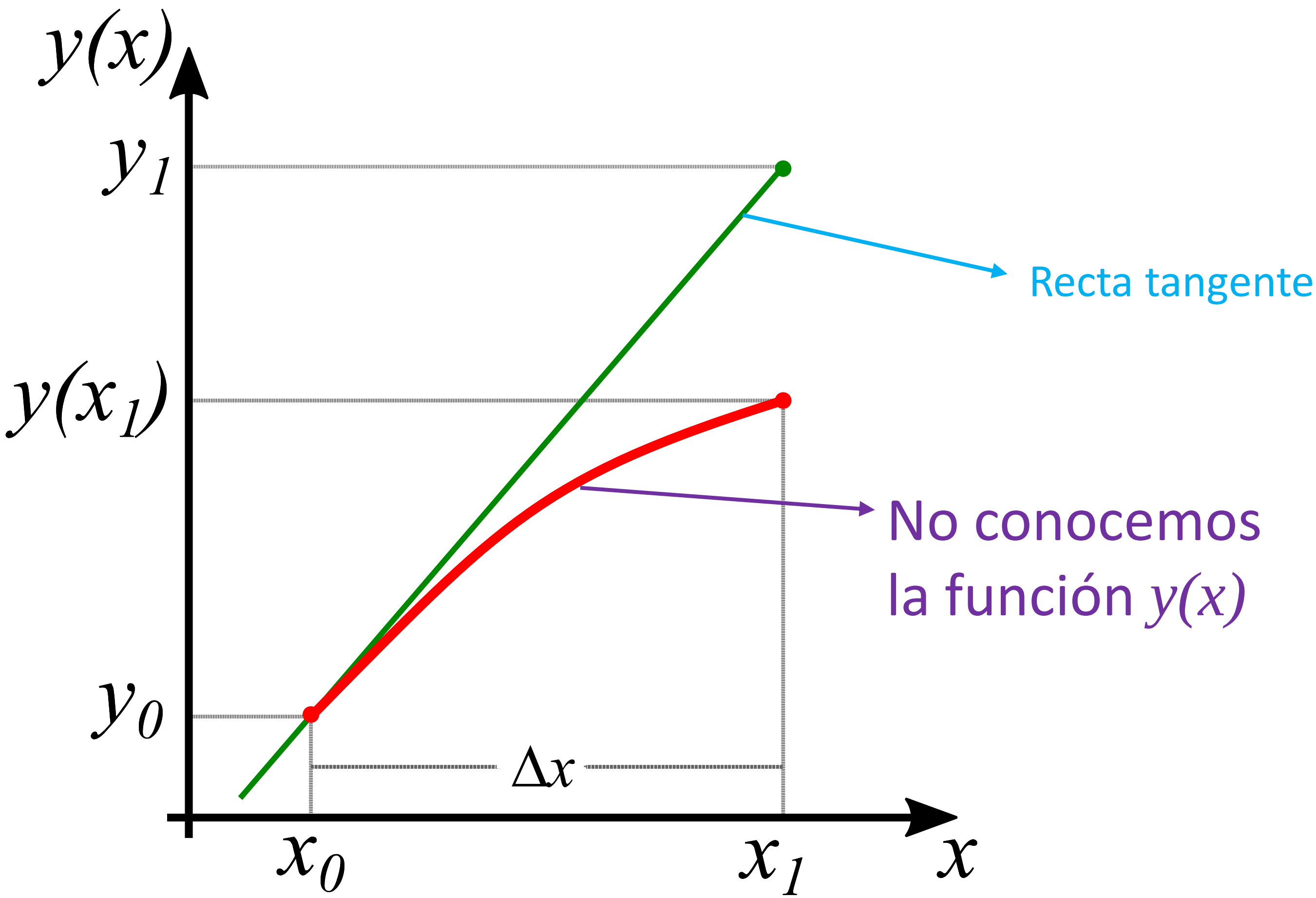
Ventajas

- Sencillo
- Programación rápida
- Bueno para h del orden < 0,1

Desventajas

- Dada su inexactitud suele tener limitaciones en algunos problemas prácticos.
- Inestabilidad para Δx grande

Método de Euler (explícito)

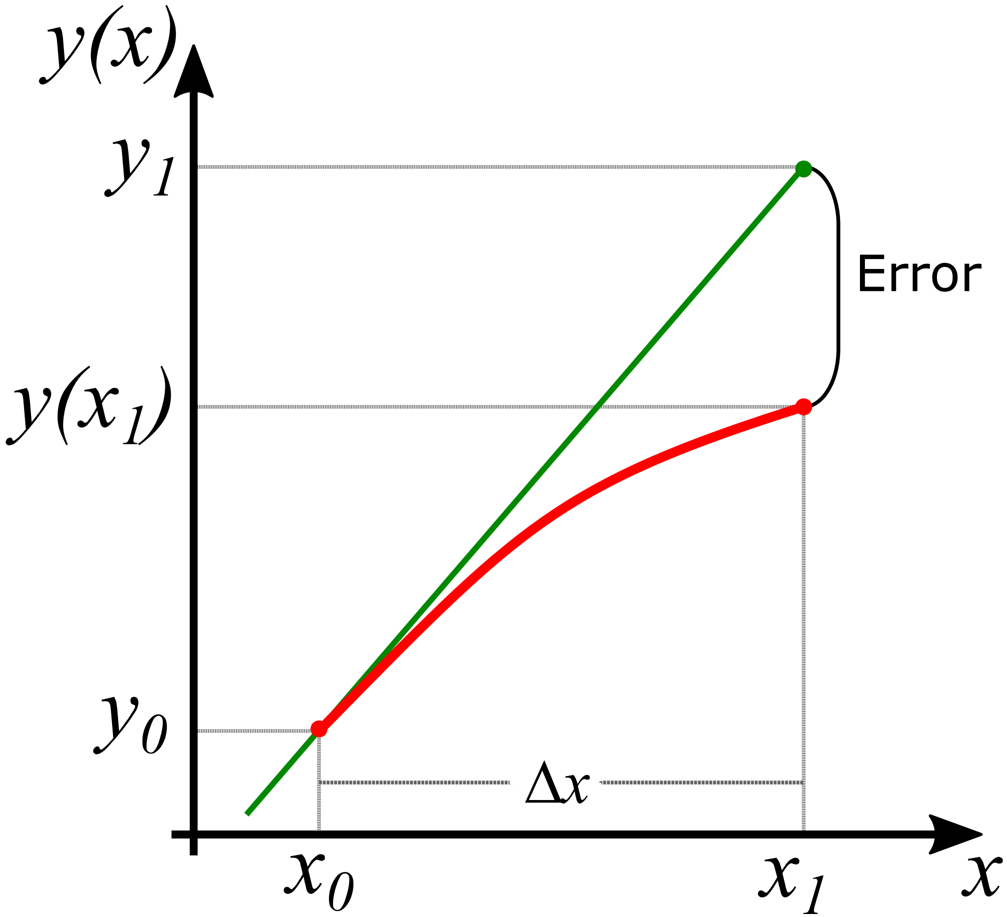


$$y' = f\left(x, y\right)$$

No se conoce la función y pero conocemos su derivada

¿Cómo se podemos estimar el valor de la función en x_1?

Método de Euler (explícito)



Algoritmo:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\Delta x$$

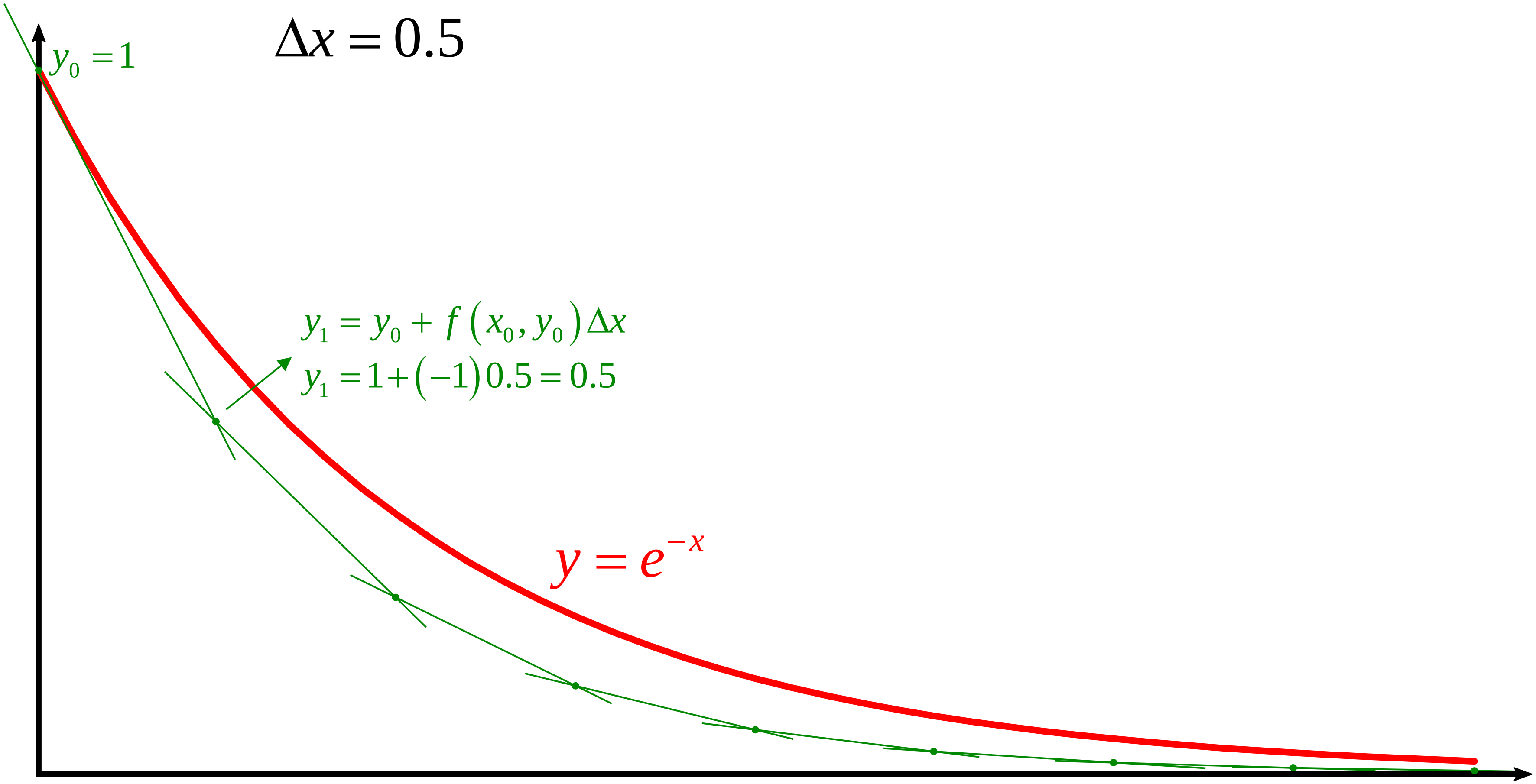
Método de Euler (explícito)

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\Delta x = 0.5$$

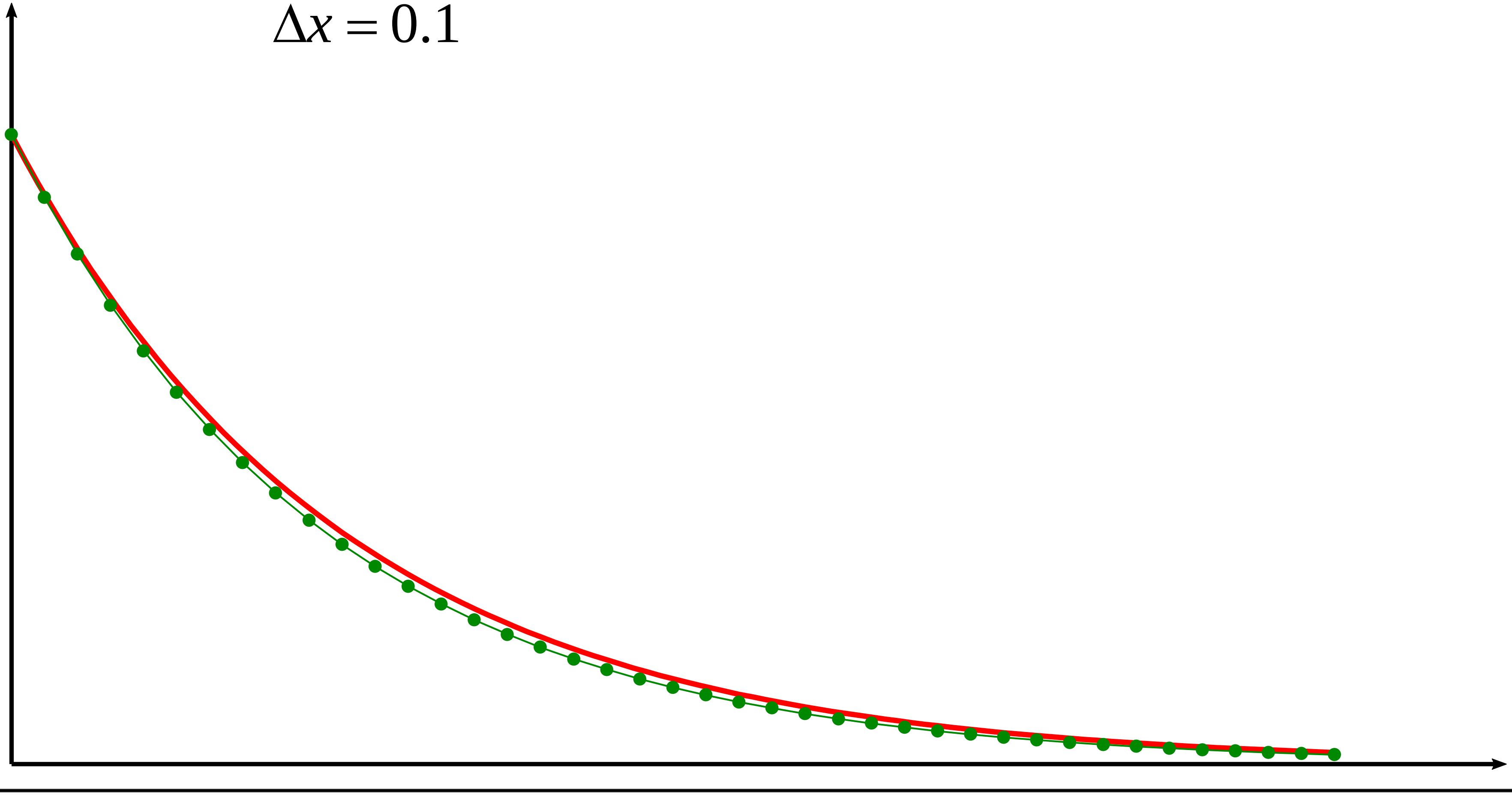


Método de Euler (explícito)

Ejemplo: $$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\Delta x = 0.1$$



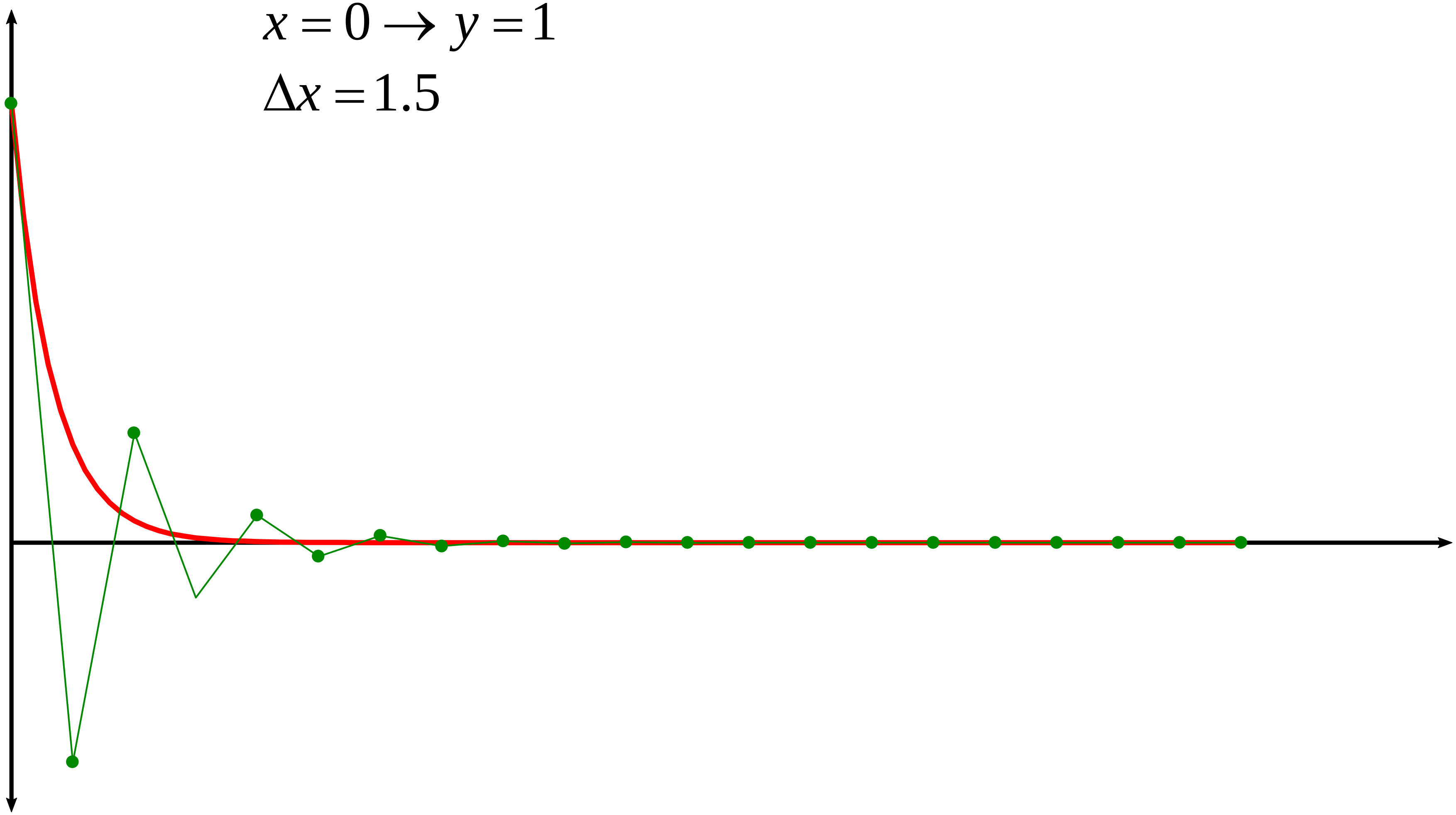
Método de Euler (explícito)

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \to y = 1$$

$$\Delta x = 1.5$$



- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \text{Flujo de masa que} \\ \text{ingresa al sistema} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Flujo de masa que} \\ \text{abandona el sistema} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{velocidad de variación} \\ \text{de la masa dentro del sistema} \end{bmatrix}$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{bmatrix}$$

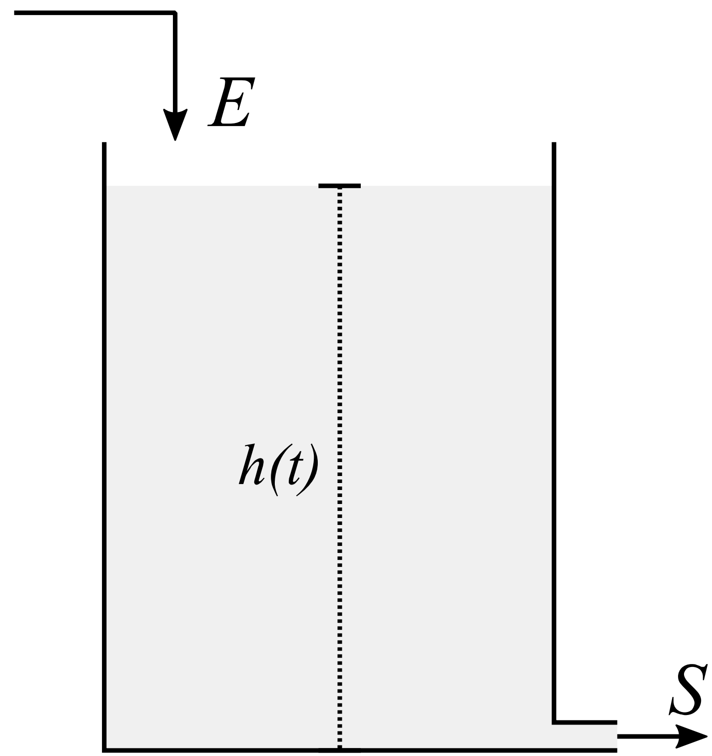
Las unidad de esta ecuación es moles/tiempo

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



- Balance de materia en el tanque: Acumulación = Entrada – Salida

HOLDUP de materia

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

$M \rightarrow$ Masa de fluido dentro del tanque

$m_e \rightarrow$ Flujo masico de entrada de fluido

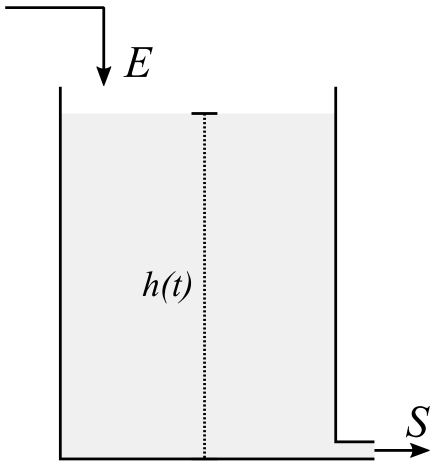
$m_s \rightarrow$ Flujo masico de salida de fluido

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$$m_e = \rho E$$ $E \rightarrow$ Caudal volumetrico de entrada

$$m_s = \rho S$$ $S \rightarrow$ Caudal volumetrico de salida

$$m_s = \rho A_s v_s$$

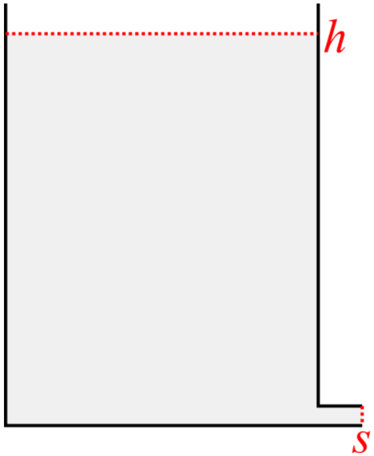
$A_s \rightarrow$ Area de salida del tanque

$v_s \rightarrow$ velocidad de salida del tanque

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{v_h{}^2 \rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho g h = \frac{v_s{}^2 \rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho g h_s}$$

$$v_h = 0 \qquad P_h = P_s \qquad h_s = 0$$



$$\rho g h = \frac{v_s{}^2 \rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Luego: $\rho A_T \dfrac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}}$$ EDO

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$t = 0 \rightarrow h = h_0$ (problema de valor inicial)

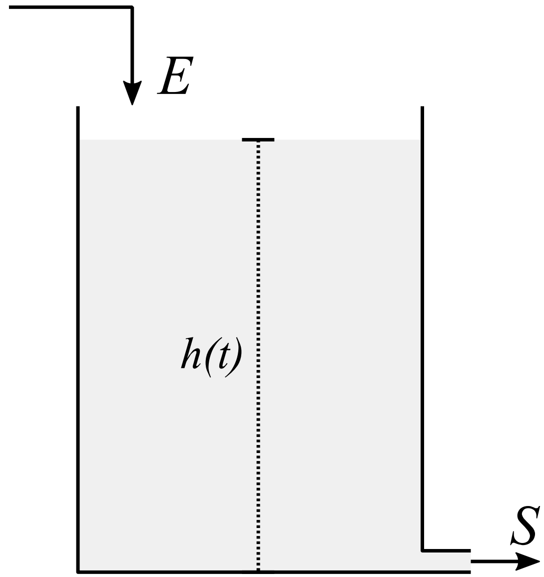
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

```
function f=EDO1(t, h, E, At, As)
    g=9.8; //m.seg-2
    f=E/At - As/At*sqrt(2*g*h);
endfunction
```

Ejemplo practico:

- Vaciado del tanque (E=0)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos



$$A_T = \frac{\pi D_T^{\,2}}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^{\,2}}{4} \quad \rightarrow A_T \frac{dh}{dt} = -A_s\sqrt{2gh} \rightarrow \frac{\pi D_T^{\,2}}{4}\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^{\,2}}{4}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^{\,2}}{D_T^{\,2}}\sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -2.5806\times 10^{-3}\sqrt{2gh}}$$

Solución Utilizando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\Delta x$$

$x \rightarrow$ Variable independiente

$y \rightarrow$ Variable dependiente

$\Delta x \rightarrow$ Incremento o salto

$$\frac{\overset{y}{dh}}{\underset{x}{dt}} = \underbrace{-2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh}}_{f(x,y)}$$

$$\boxed{h_{i+1} = h_i + f\left(t_i, h_i\right)\Delta t}$$

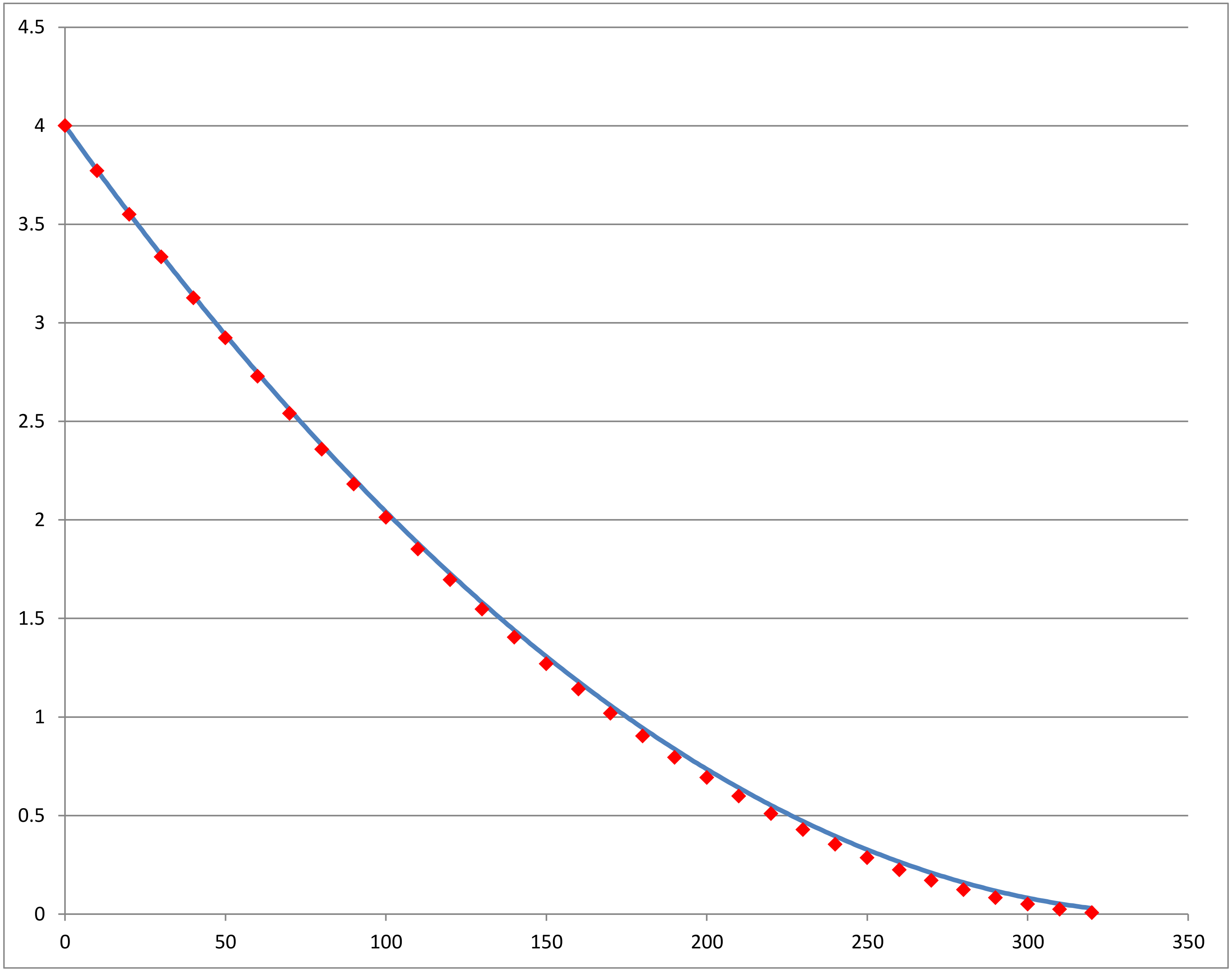
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando el método de Euler ($\Delta t = 10\ seg$):

i	t	h	f
0	0	4	

$$f(t,h) = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio


```
Dt= 1; //m
At=%pi*Dt*Dt/4; //m2
Ds= 0.0508; //m
As=%pi*Ds*Ds/4; //m2
E=0; //m3/seg
dt=10; //seg
tf= 320; //seg
t=0:dt:tf;
h_0=4; //m

h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
    h(i+1)=h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
end
```

- Una manera de reducir el error con el método de Euler sería incluir términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor para la solución. Por ejemplo, al incluir el término de segundo orden

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0)(x_1 - x_0)^2$$

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} y''(x_0)\Delta x^2$$

$y' = f(x, y)$ EDO

$$y(x_1) = y(x_0) + f(x_0, y_0)\Delta x + \frac{1}{2} f'(x_0, y_0)\Delta x^2$$

$$y\left(x_1\right) = y\left(x_0\right) + f\left(x_0, y_0\right)\Delta x + \frac{1}{2} f^{'}\left(x_0, y_0\right)\Delta x^2$$

- Aunque la incorporación de términos de orden superior es simple para implementarse en los polinomios, su inclusión no es tan trivial cuando la EDO es más complicada.

- Las EDOs que están en función tanto de la variable dependiente como de la independiente requieren de la derivación usando la regla de la cadena.

$$f^{'}\left(x, y\right) = \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$f^{''}\left(x, y\right) = \frac{\partial\left[\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]}{\partial x} + \frac{\partial\left[\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \qquad y(0) = 1$$

$$f(x, y) = x + y$$

$$f^{'}(x, y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$f(0,1) = 1 \qquad f^{'}(0,1) = 2$$

$$y(x_1) = y(x_0) + f(x_0, y_0)\Delta x + \frac{1}{2} f^{'}(x_0, y_0)\Delta x^2$$

$$y(x_1) = 1 + 1\Delta x + \frac{1}{2} 2\Delta x^2$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_i + y_i)\Delta x + \frac{1}{2}(1 + x_i + y_i)\Delta x^2$$

Método de Runge-Kutta

- Los métodos Runge-Kutta introducen varios parámetros a determinar, y hacen un promedio pesado de la función $f(x,y)$ evaluada en diferentes puntos.
- Son más precisos que los métodos de Euler.
- En general los métodos Runge – Kutta tienen algoritmos de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{\varnothing}_{\text{Incremento}} \Delta x$$

- Según se defina el incremento tenemos R-K de 2º, 3º o 4º orden.

Método de Runge-Kutta

- Dada la siguiente EDO: $y' = f(x, y)$
- Runge-Kutta de 2do orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

Donde:

$$\varnothing = k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5 \Delta x k_1)$$

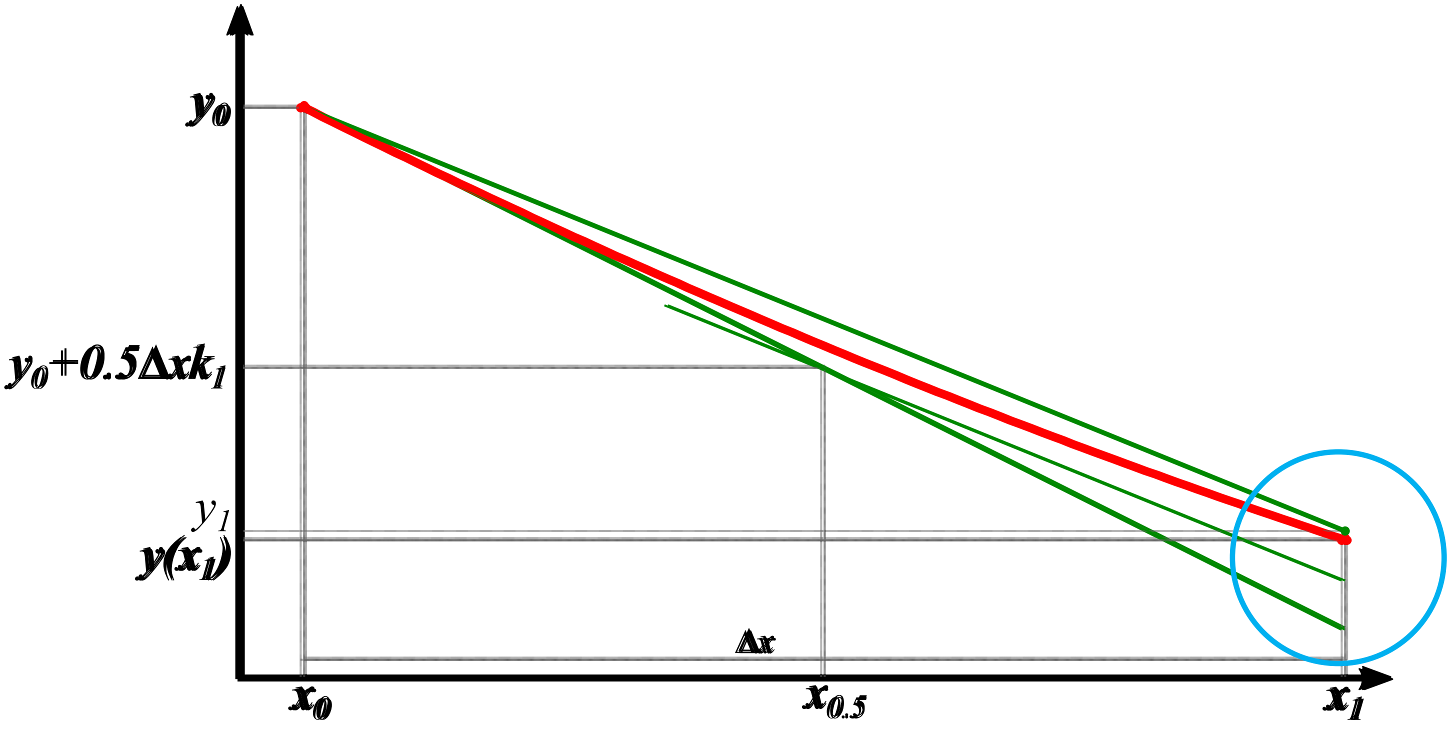
Método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

$$\varnothing = k_2$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$



Método de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de 3er orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

Donde: $\varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_{i+1}, y_i + 2\Delta x k_2 - \Delta x k_1\right)$$

Método de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de 4to orden (mas difundido) corresponde a:

$$\varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_{i+1}, y_i + \Delta x k_3\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando Runge-Kutta de 4er orden :

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh} \;\rightarrow\; f\left(t,h\right) = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \varnothing\Delta t \qquad \varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \qquad k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \qquad k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right)$$

i	t	h	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	4				
1	1					

$$\begin{cases} \varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ h_1 = h_0 + \varnothing \Delta t \end{cases}$$

Ejemplo para *t=0* (*i=0*):

$$f\left(t,h\right) = -2.5806 \times 10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \qquad \rightarrow k_1 = f\left(0,4\right)$$

$$k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right) \rightarrow k_2 = f\left(0.5, 4 + 0.5 \times 1 \times k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \rightarrow k_3 = f\left(0.5, 4 + 0.5 \times 1 \times k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right) \qquad \rightarrow k_4 = f\left(1, 4 + 1 \times k_3\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \quad k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \qquad k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right)$$

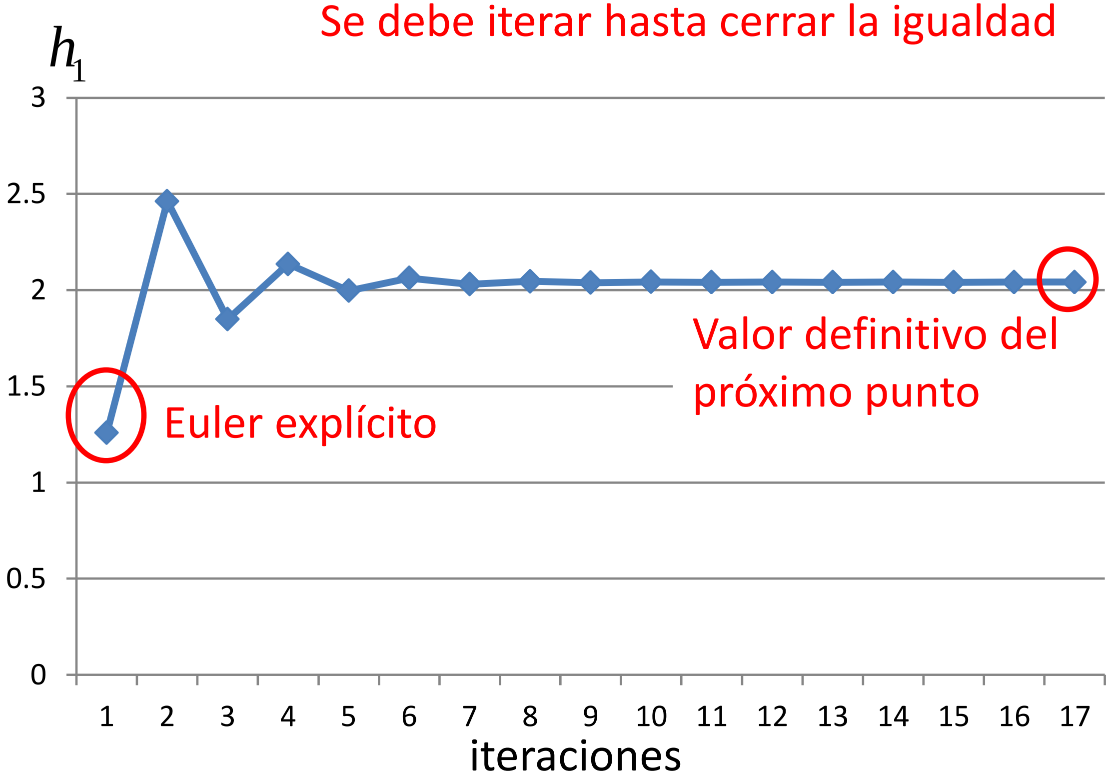
```
h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
   k1 = EDO1(t(i)           , h(i)                ,E,At,As);
   k2 = EDO1(t(i)+0.5*dt , h(i)+0.5*dt*k1 ,E,At,As);
   k3 = EDO1(t(i)+0.5*dt , h(i)+0.5*dt*k2 ,E,At,As);
   k4 = EDO1(t(i)+      dt , h(i)+      dt*k3 ,E,At,As);
   delta = (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
   h(i+1) = h(i) + dt*delta;
end
```

- El avance se realiza paso a paso en el tiempo pero se realiza un proceso iterativo para dar por finalizado el paso.
- Métodos más difundidos:
  - Euler implícito
  - Euler-Gauss

Método Implícito de Euler

Algoritmo: $y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\Delta x$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad



$$\frac{dh}{dt} = -2.5806 \times 10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + f_i\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\Delta t$$

$$h_0 = 4\,m$$

$$\Delta t = 120\ seg$$

$$h_{i+1} = h_i - 2.58064 \times 10^{-3}\sqrt{2gh_{i+1}}\,\Delta t$$

Método Implícito de Euler

$$h_{i+1} = h_i + f\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\Delta t$$

```
function h1=EULERIMP(h1)
  f1=EDO1(t1,h1,E,At,As)
  h1 = h0 + f1*dt;
endfunction
```

```
h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
  h(i+1) = h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
  t1 = t(i) + dt;
  h0 = h(i);
  h(i+1) = wegstein(EULERIMP,h(i+1),1e-6);
end
```

Algoritmo:

$$\underline{y_{i+1}} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, \underline{y_{i+1}}\right)\right]$$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

Análisis:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right]$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\boxed{y_i + f\left(x_i, y_i\right)}}_{\text{Euler explícito}} + \underbrace{\boxed{y_i + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)}}_{\text{Euler implícito}}\right]$$

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{2}\left(-2.58064\times10^{-3}\sqrt{2gh_i} - 2.58064\times10^{-3}\sqrt{2gh_{i+1}}\right)$$

Método Implícito de Euler-Gauss

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{2}\left[f\left(t_i, h_i\right) + f\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\right]$$

```
function h1=EULERGAUSS(h1)
   f1=EDO1(t1,h1,E,At,As)
   f0=EDO1(t0,h0,E,At,As)
   h1 = h0 + (f1 + f0)*dt/2;
endfunction
```

```
h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
   h(i+1) = h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
   t1 = t(i) + dt;
   h0 = h(i);
   t0 = t(i);
   h(i+1) = wegstein(EULERGAUSS,h(i+1),1e-5);
end
```

Ejemplo de clases

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^2 \ln y$$

- Identificar la variable independiente y dependiente.
- Resolver en el intervalo [0,1].
- ***Δt=0.1 e y(0)=1.1.***

22.16 A spherical tank has a circular orifice in its bottom through which the liquid flows out (Fig. P22.16). The flow rate through the hole can be estimated as

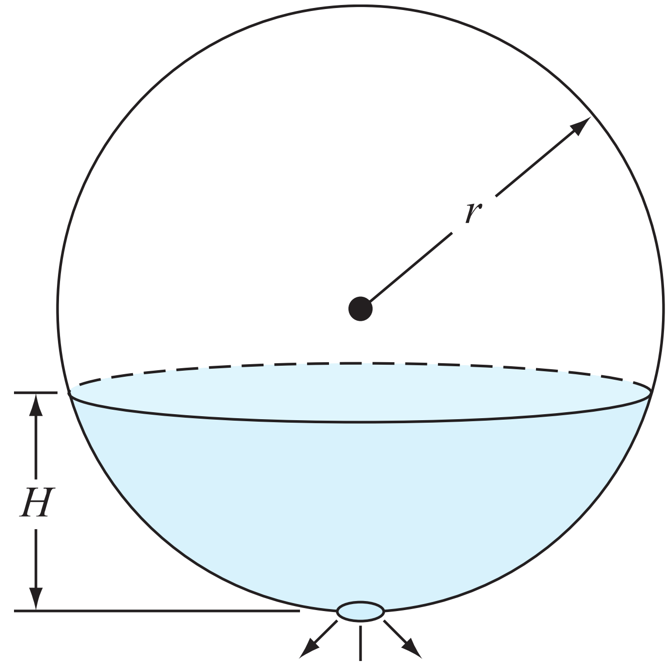
$$Q_{\text{out}} = CA\sqrt{2gh}$$

where Q_{out} = outflow (m^3/s), C = an empirically derived coefficient, A = the area of the orifice (m^2), g = the gravitational constant (= 9.81 m/s^2), and h = the depth of liquid in the tank. Use one of the numerical methods described in this chapter to determine how long it will take for the water to flow out of a 3-m diameter tank with an initial height of 2.75 m. Note that the orifice has a diameter of 3 cm and $C = 0.55$.

Chapra, S.; Canale, R. *Numerical Methods for Engineers, Sixth Edition*; McGraw-Hill, 2009.

Ejemplo Tanque Esférico

$$\frac{dM}{dt} = \cancel{m_{in}} - m_{out}$$



$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 3r - \rho \frac{1}{3} \pi H^3$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{1}{3} \pi 3r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \frac{1}{3} \pi 3H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$

Matemática Superior Aplicada

Ejemplo Tanque Esférico

UTN

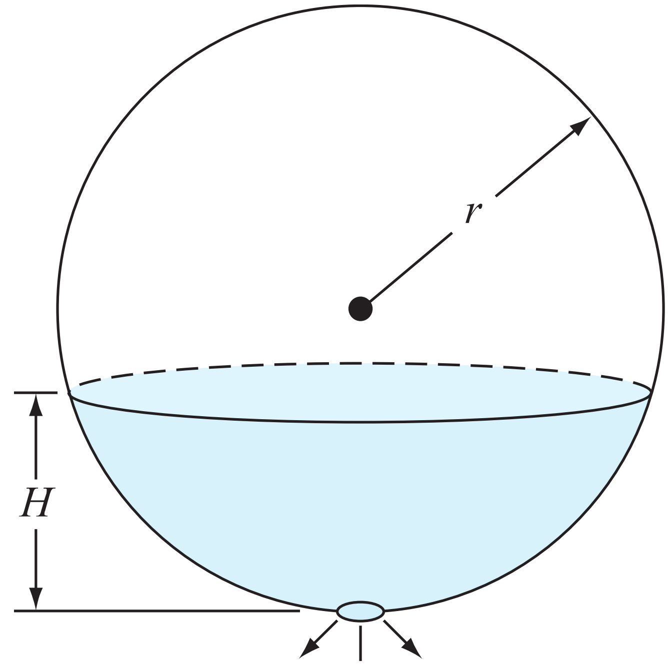
$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi \left(2rH - H^2\right) \frac{dH}{dt}$$

$$m_{out} = \rho Q_{out} = \rho C A \sqrt{2gH}$$

$$m_{out} = \rho C \pi \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

$$\rho \pi \left(2rH - H^2\right) \frac{dH}{dt} = -\rho C \pi \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

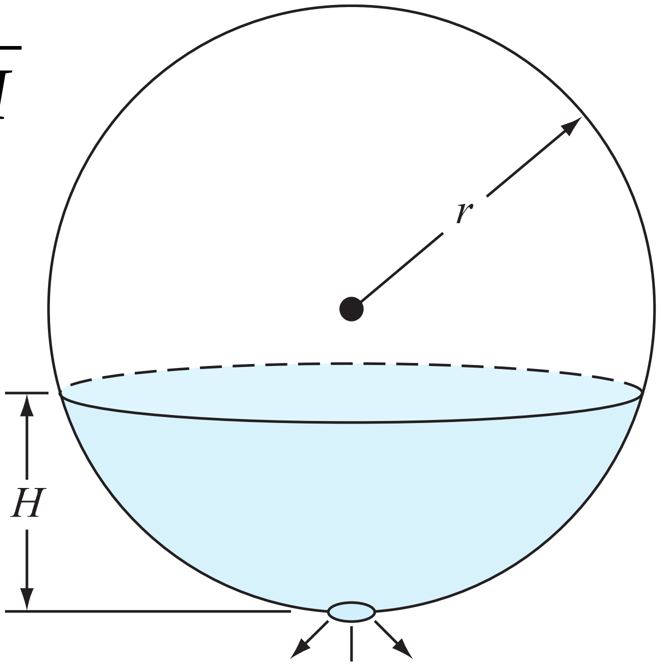


Ejemplo Tanque Esférico

$$\cancel{\rho}\cancel{\pi}\left(2rH - H^{2}\right)\frac{dH}{dt} = -\cancel{\rho}C\cancel{\pi}\frac{D_{o}^{2}}{4}\sqrt{2gH}$$

$$\left(2rH - H^{2}\right)\frac{dH}{dt} = -C\frac{D_{o}^{2}}{4}\sqrt{2gH}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{-C\frac{D_{o}^{2}}{4}\sqrt{2gH}}{\left(2rH - H^{2}\right)}}$$



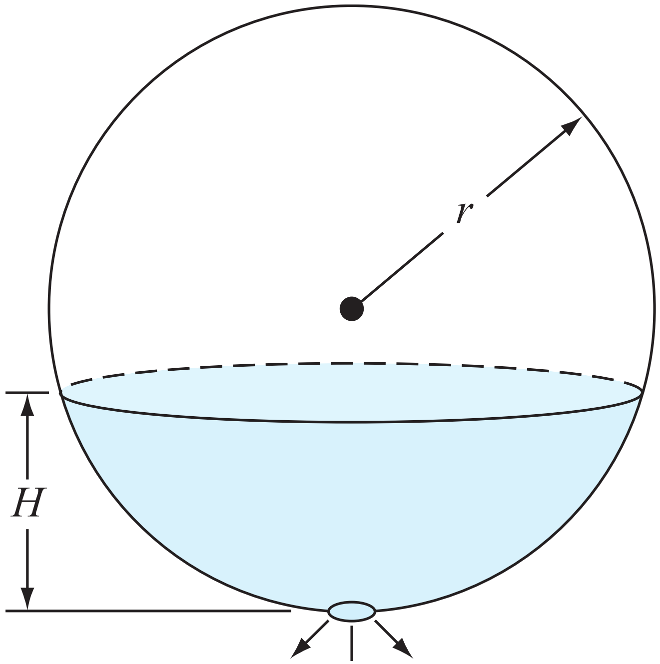
Ejemplo Tanque Esférico

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C\,\frac{D_o^{\,2}}{4}\sqrt{2gH}}{\left(2rH - H^2\right)}$$

$C : 0.55$

$D_o : 0.03\,\mathrm{m}$

$r : 1.5\,\mathrm{m}$



$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{-1.2375\times 10^{-4}\sqrt{19.6H}}{\left(3H - H^2\right)}}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando el método de Euler:

i	t	h_i	$f\left(t_i, H_i\right)$

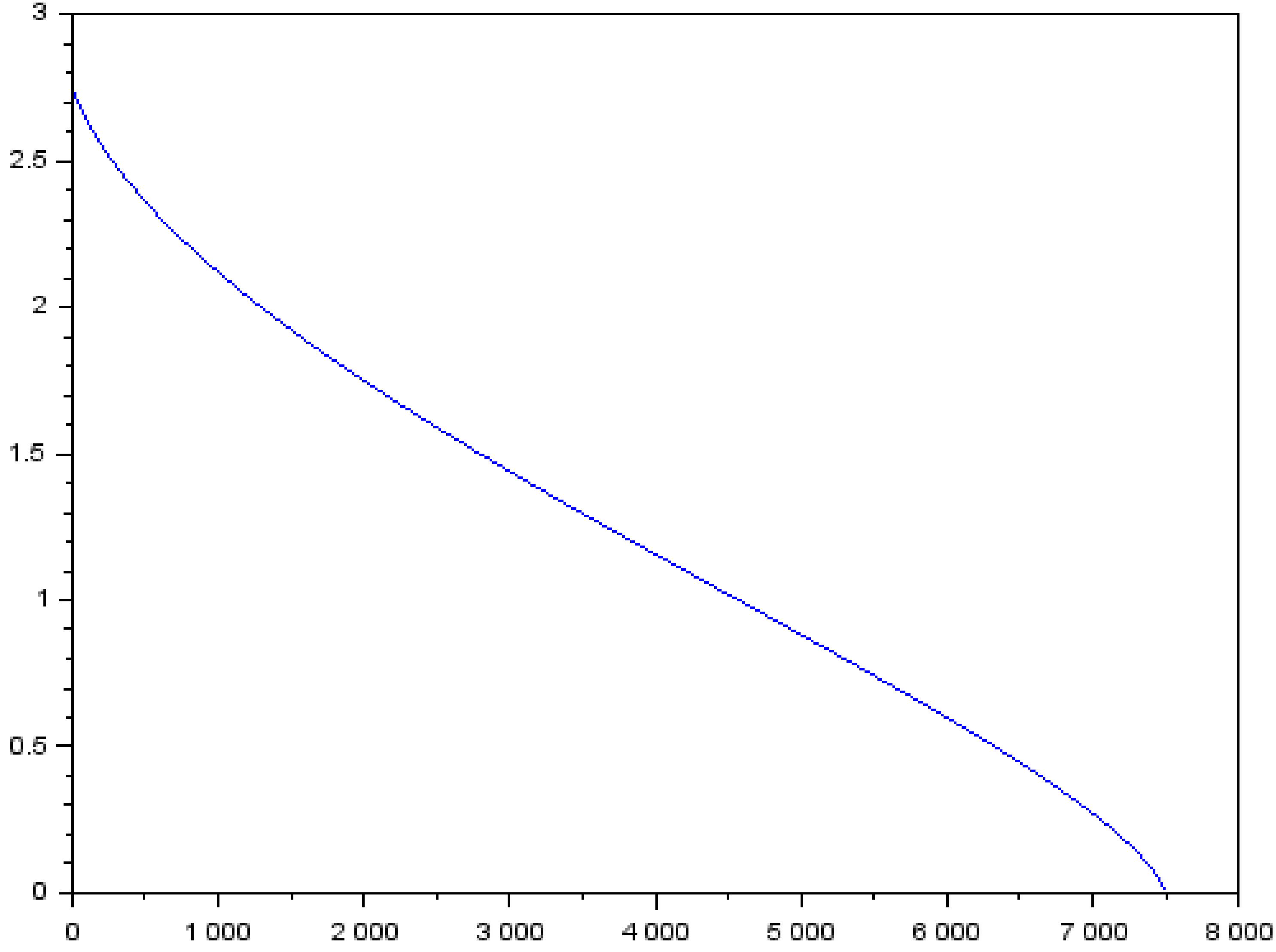
$$f\left(t,H\right)=\frac{-1.2375\times10^{-4}\sqrt{19.6H}}{\left(3H-H^{2}\right)}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

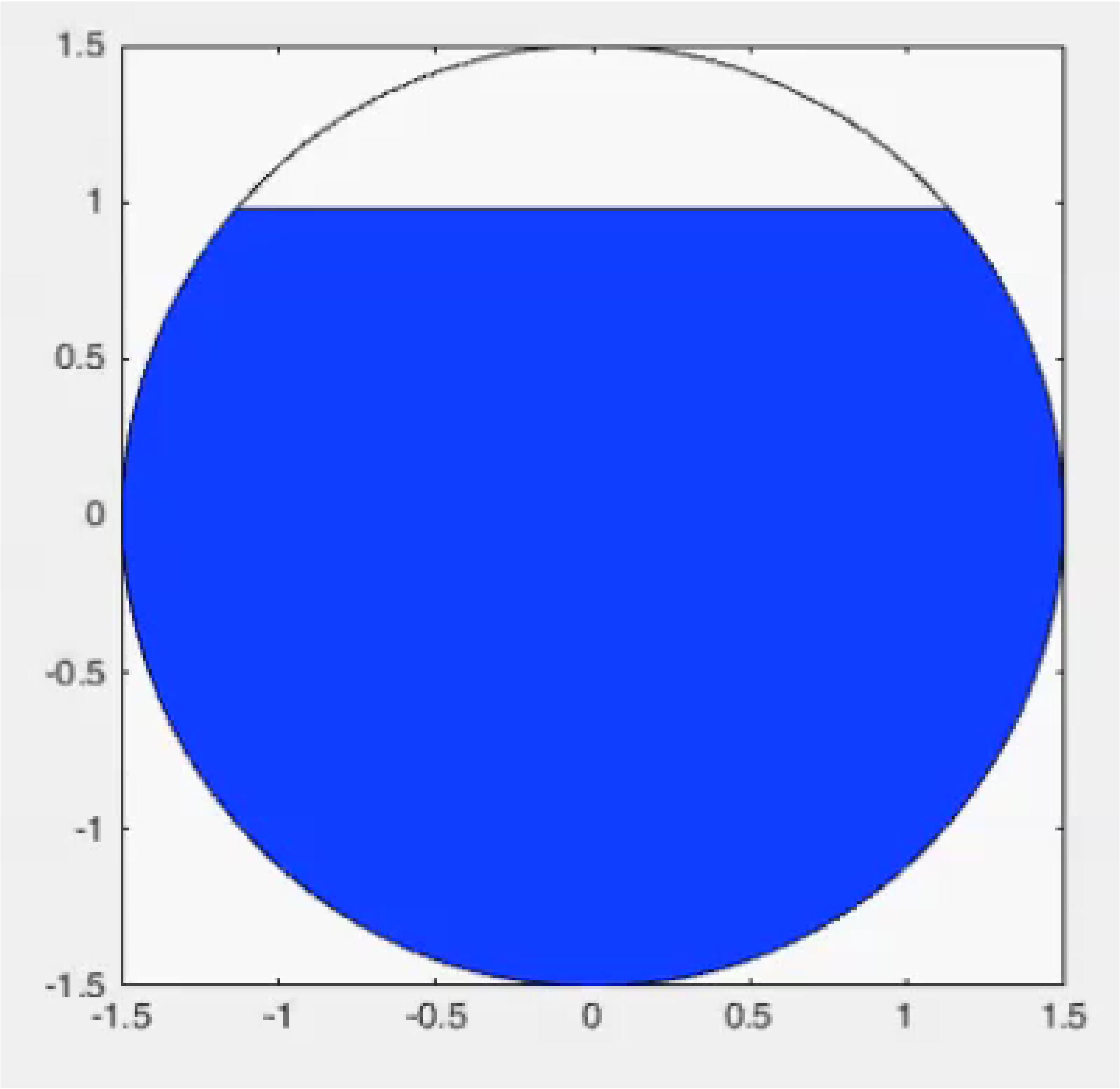
```
clear
clc
function y=f(H)
y=-1.2375e-4*sqrt(19.6*H)/(3*H-(H^2));
endfunction

H(1)=2.75;
t(1)=0;
dt=1;
i=1;
while H(i) > 0.01
H(i+1) = H(i) + f(H(i))*dt;
t(i+1) = t(i) + dt;
i=i+1;
end
plot(t,H)
tiempo=t(i)/3600
```

→ 2.08 horas

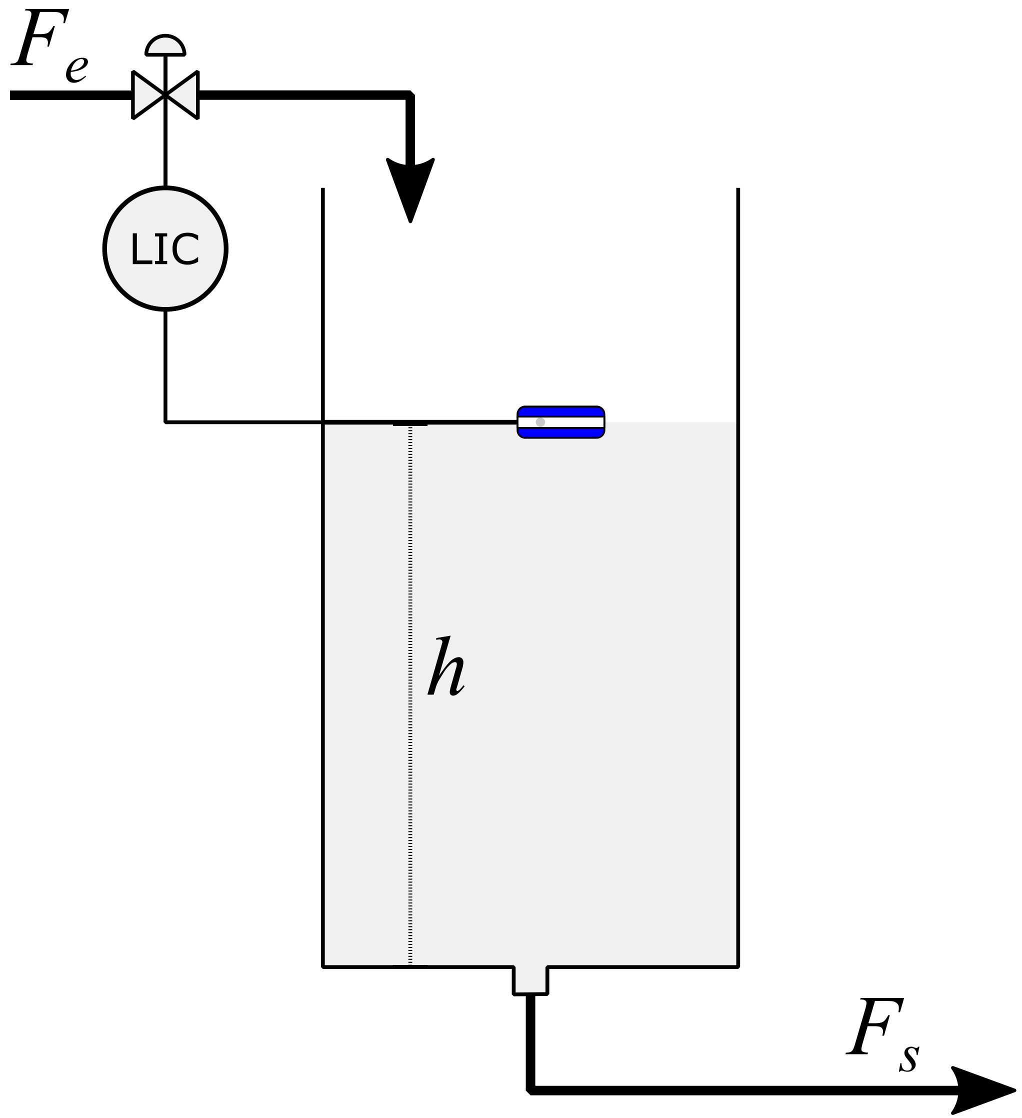
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



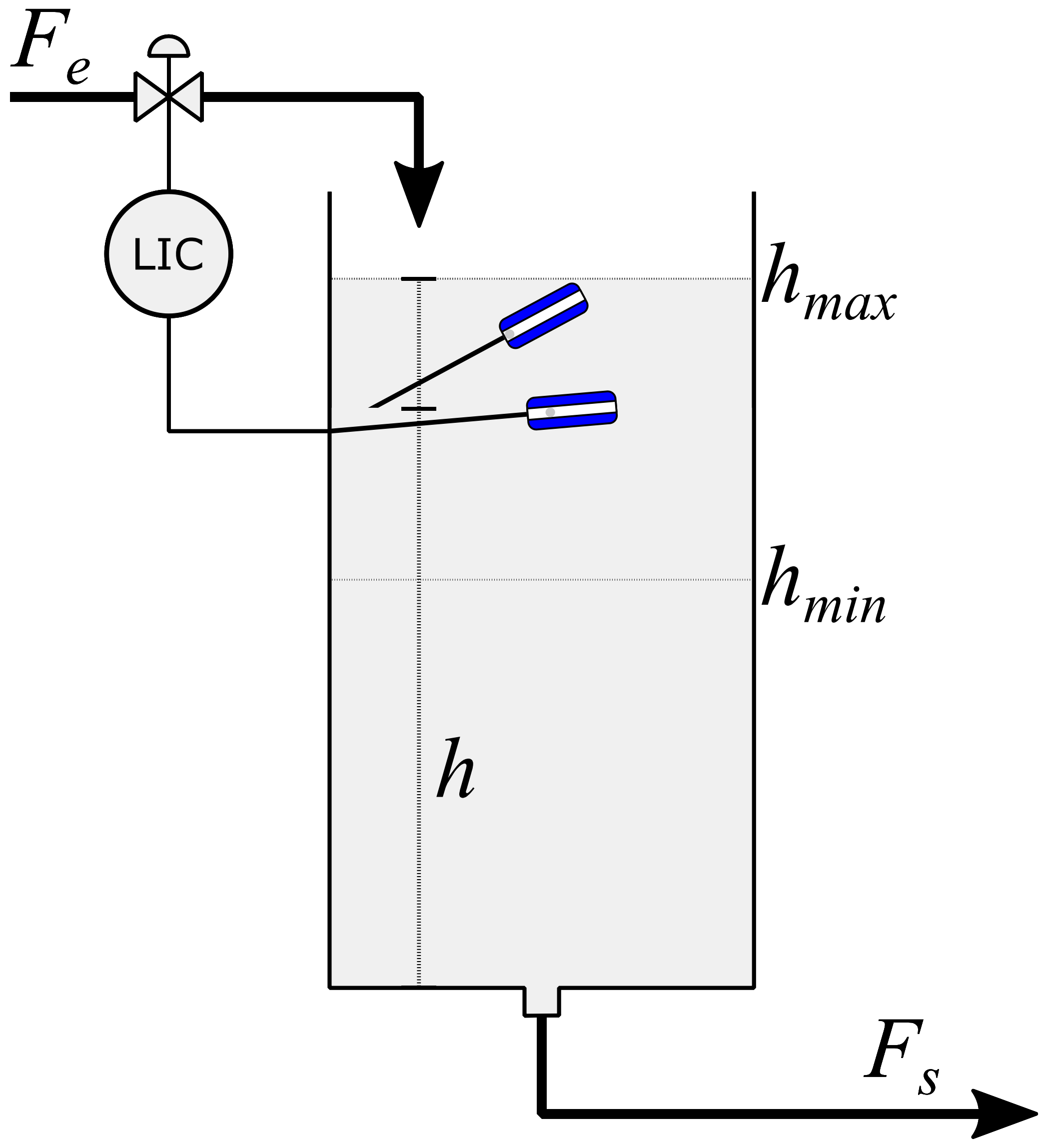
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Ejemplo: Control de nivel con un flotante



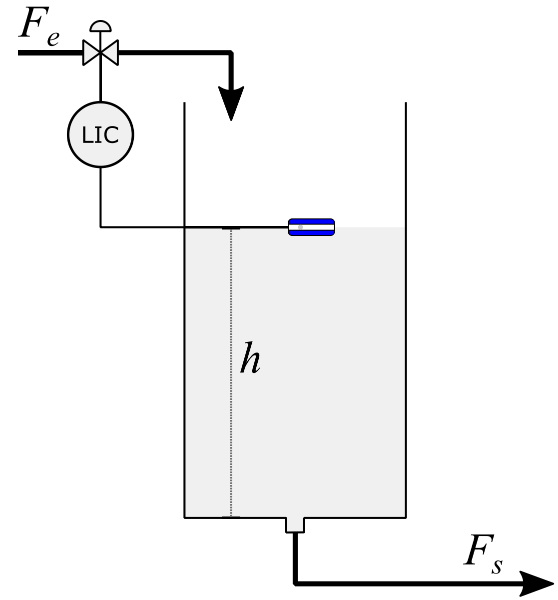
Ejemplo: Control de nivel con un flotante



Ejemplo: Control de nivel con un flotante

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Control on/off mediante un flotante

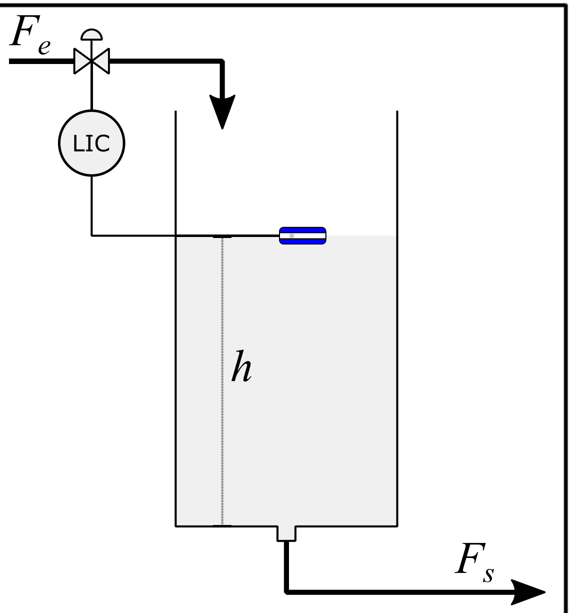


Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

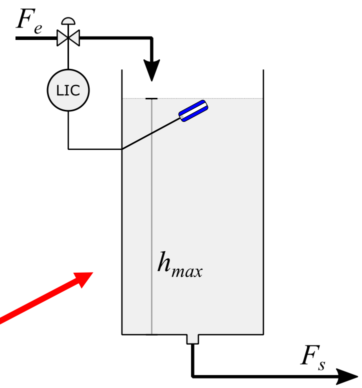
Similar al tanque abierto con salida gravitatoria

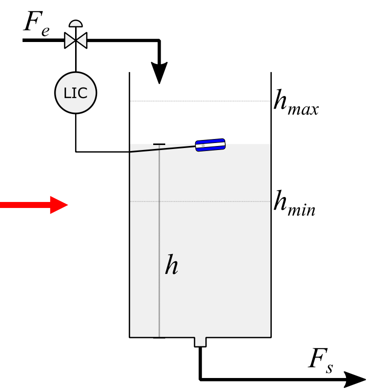


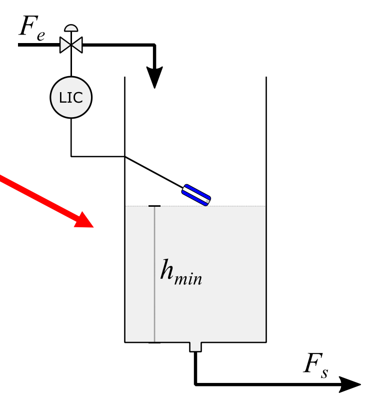
Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Caudal de entrada:

$$F_{e_i} \begin{cases} si \quad h_i \geq h_{\max} \\ si \quad h_{\min} < h_i < h_{\max} \\ si \quad h_i \leq h_{\min} \end{cases}$$

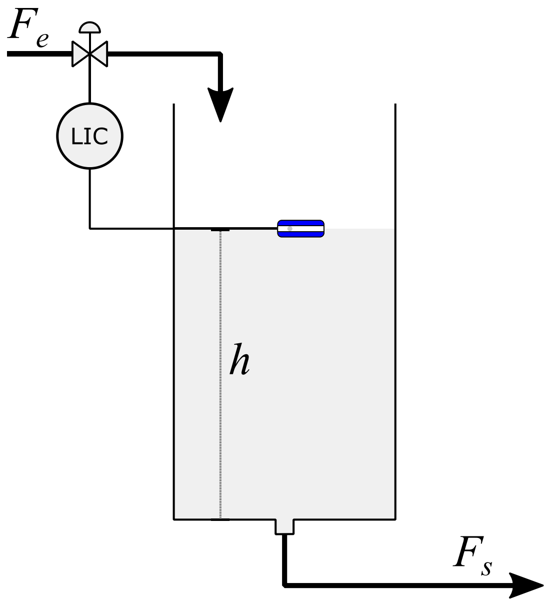




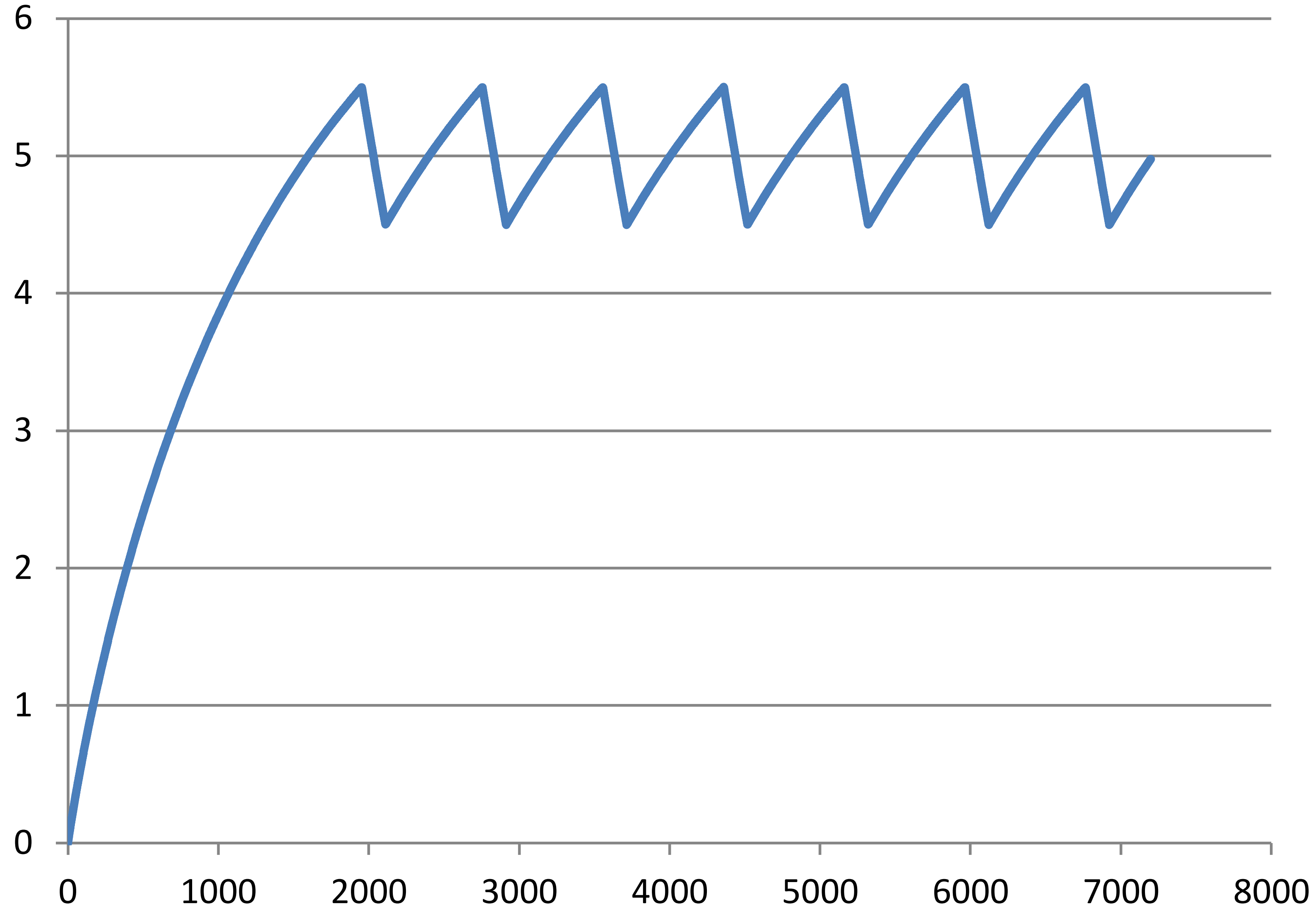


Ejemplo practico:

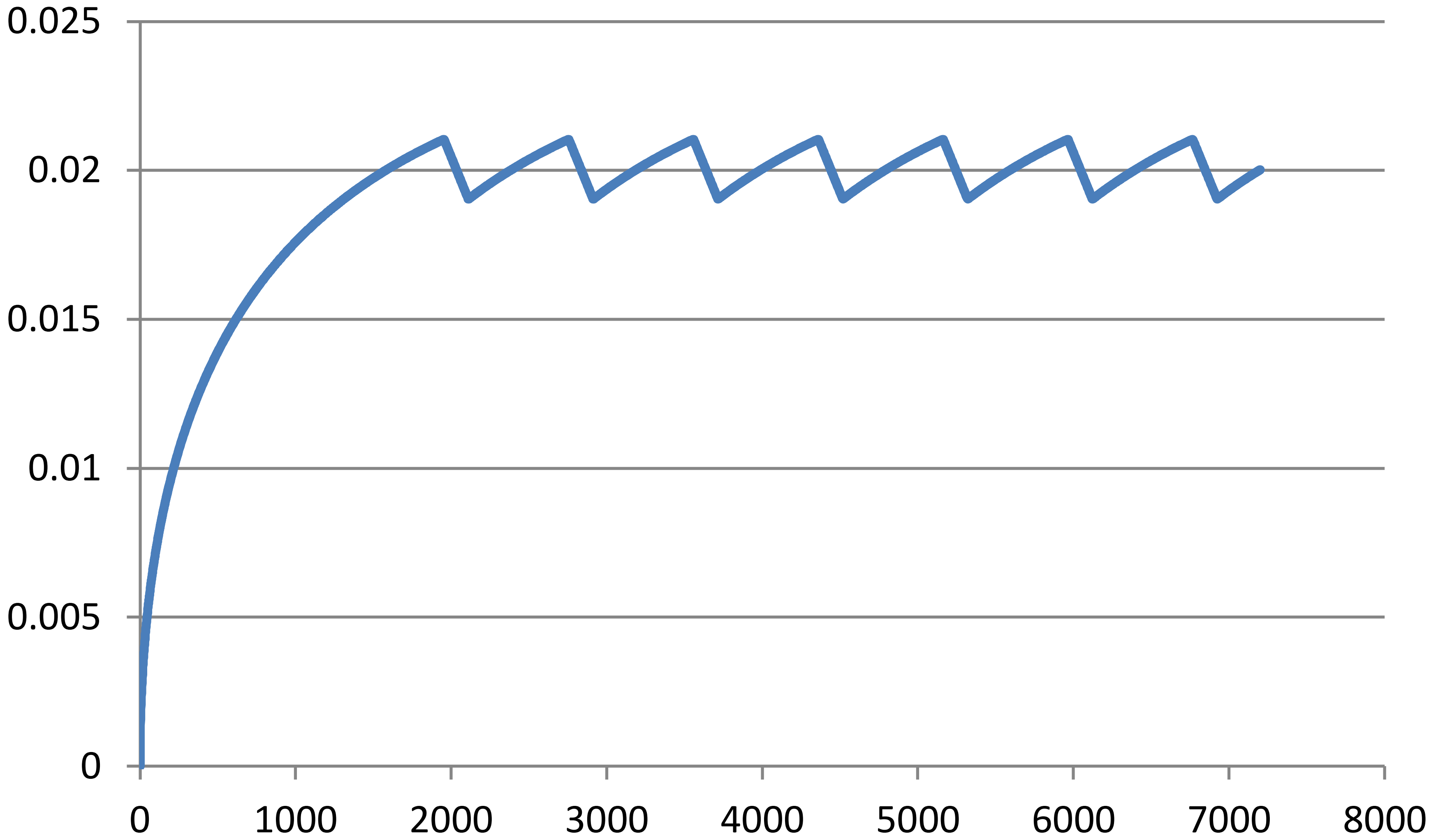
- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Diámetro del orificio de salida tanque: 0.0508 m
- Caudal de entrada al activarse la válvula: F=0.025 m^3/seg
- Rango del flotante: $h_{min} = 4.5\ m$ y $h_{max} = 5.5\ m$



Control de nivel con un flotante (altura vs tiempo)



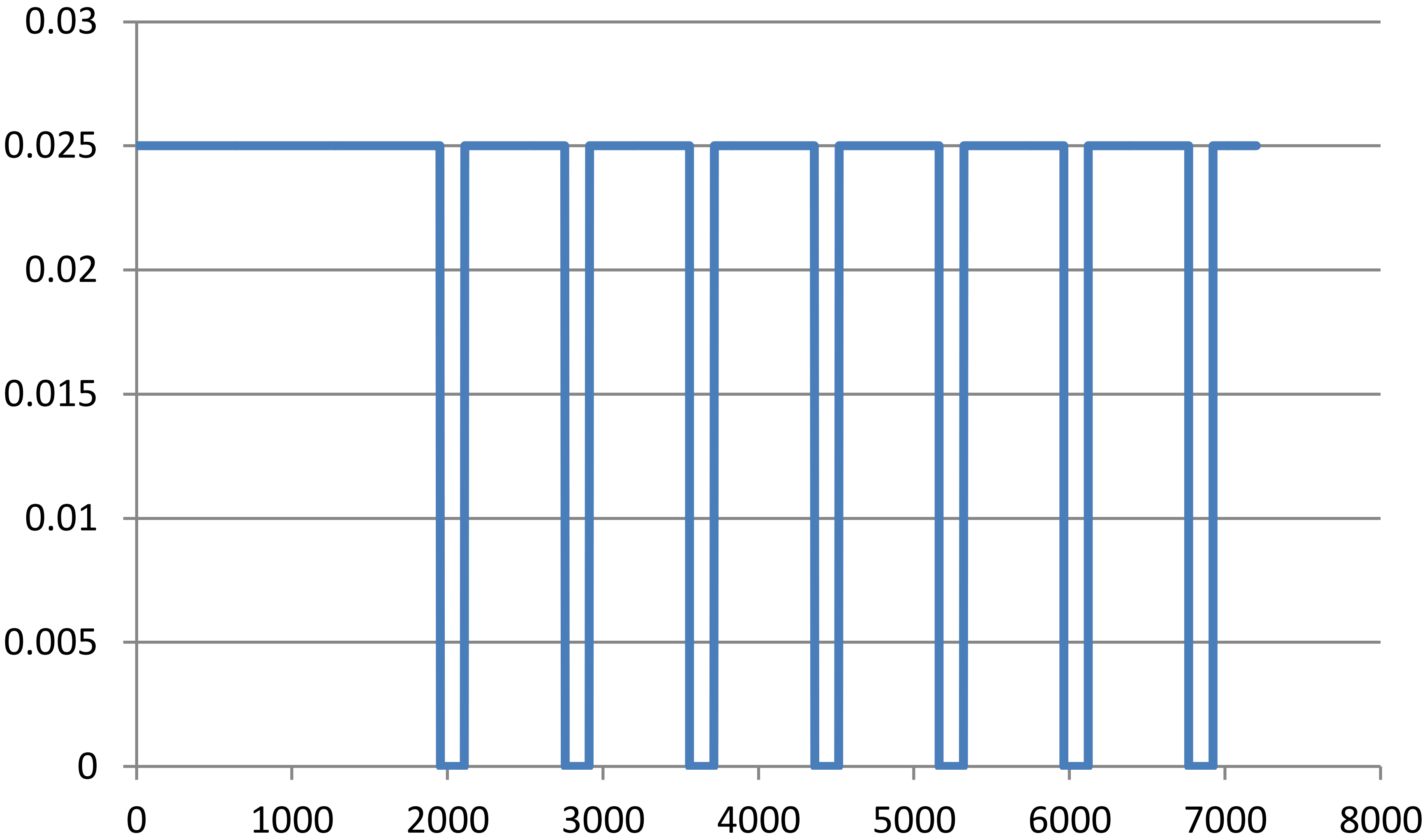
Control de nivel con un flotante (caudal de salida vs tiempo)



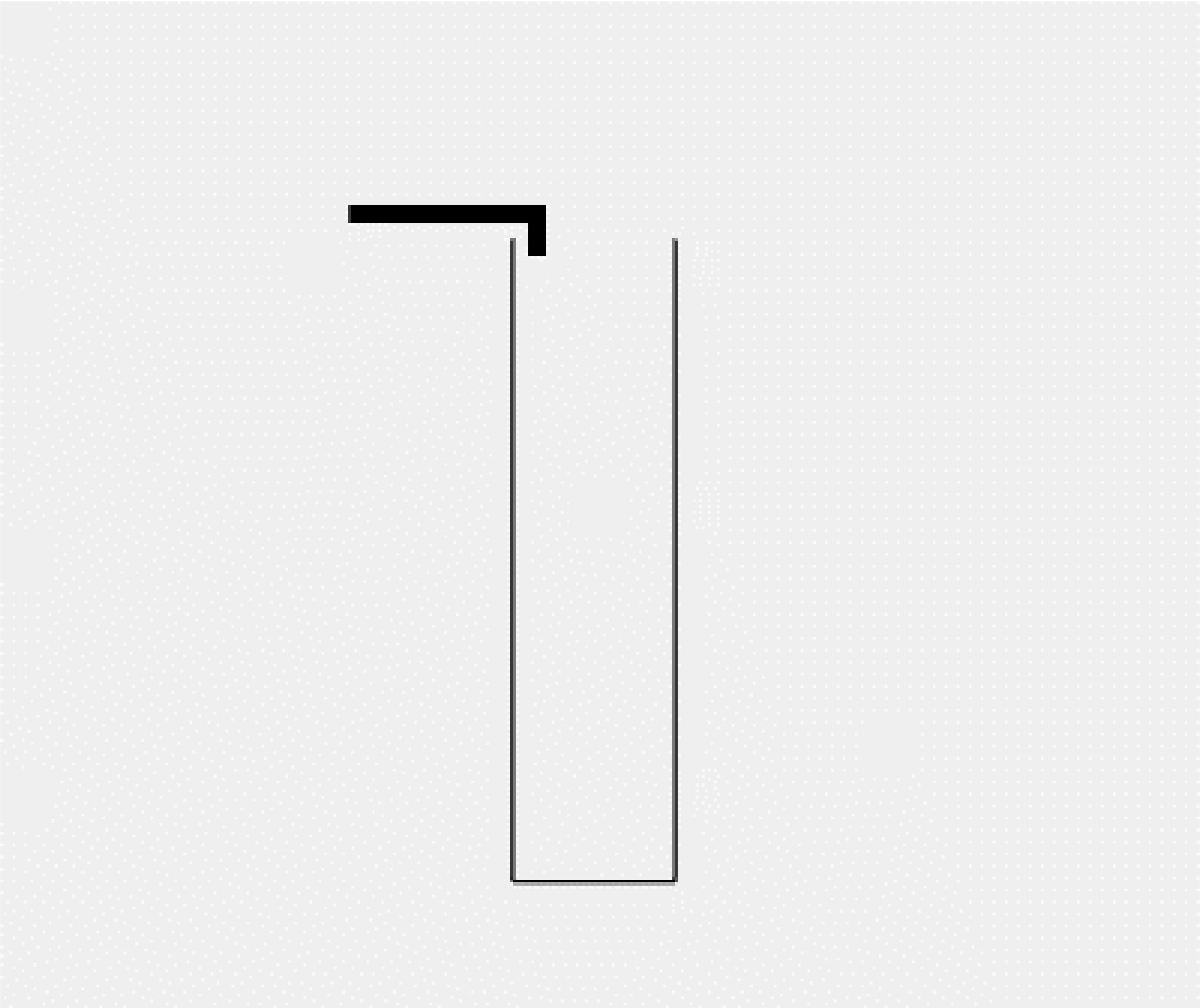
Matemática Superior Aplicada

Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)

UTN



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)



- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de energía}\\ \text{interna, cinética y/o potencial}\\ \text{que ingresa al sistema}\\ \text{por conveccion o difusion}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Flujo de energía}\\ \text{interna, cinética y/o potencial}\\ \text{que abandona el sistema}\\ \text{por conveccion o difusion}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{Calor que ingresa al sistema}\\ \text{por conduccion, radiacion y/o reacción}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Trabajo realizado por el sistema}\\ \text{sobre sus alrededores}\\ \text{(Trabajo de Eje o mecanico y PV)}\end{bmatrix}$$

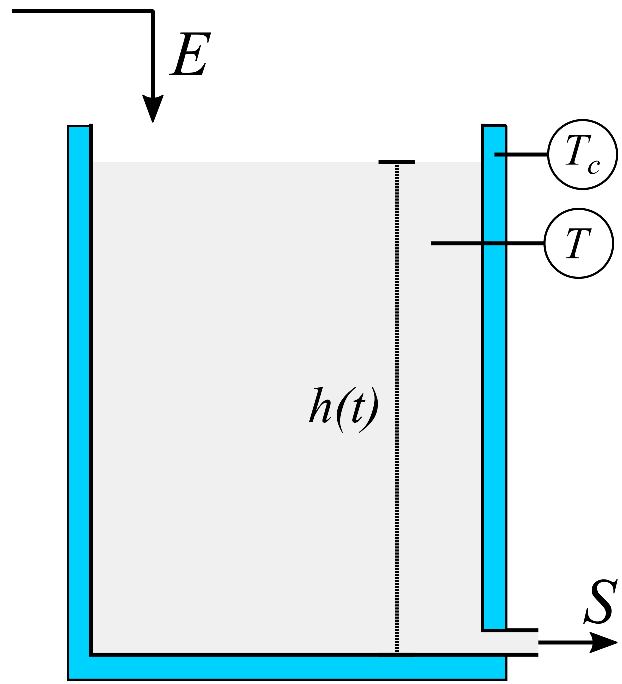
$$= \begin{bmatrix}\text{velocidad de variación de la energía}\\ \text{interna, cinética y/o potencial}\\ \text{dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

Las unidad de esta ecuación es energía/tiempo

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

Hipótesis asumida:

- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Altura inicial conocida
- Temperatura inicial conocida
- Líquido perfectamente mezclado
- Se supone constante la temperatura de la camisa de calentamiento
- Calor especifico del fluido constante



Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

HOLDUP materia del tanque

- Balance de materia en el tanque:

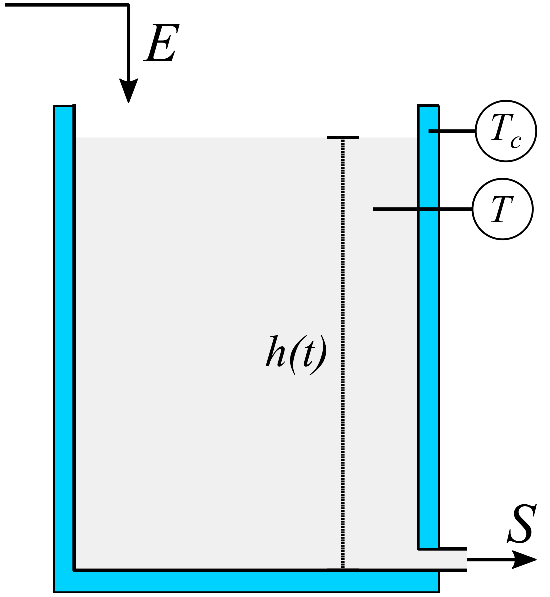
$$\frac{dM_T}{dt} = m_E - m_S$$

Flujo másico de cada corriente

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_E - m_S$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}}$$

EDO 1



- Balance de energía en el tanque:

HOLDUP de materia

Las propiedades de salida son idénticas a la del interior del tanque

$$\frac{dM\left(U+\cancel{K}+\cancel{\phi}\right)}{dt}=Q+m_E\left(U_E+\cancel{K}_E+\cancel{\phi}_E\right)-m_S\left(U+\cancel{K}+\cancel{\phi}\right)+m_E P_E v_E-m_S P_S v$$

$$\frac{dMU}{dt}=Q+m_E\left(U_E+P_E v_E\right)-m_S\left(U+P_s v\right)$$

$$\frac{dMU}{dt}=Q+m_E H_E-m_S H$$

Para líquidos el termino Pv es despreciable frene a U por lo que se sigue la evolución de la entalpía del sistema

$$\frac{dMH}{dt}=Q+m_E H_E-m_S H$$

HOLDUP de energía

$MH \rightarrow$ Entalpía total del fluido dentro del tanque

$m_e H_e \rightarrow$ Entalpía total de entrada de fluido

$m_s H_s \rightarrow$ Entalpia total de salida de fluido

$Q \rightarrow$ Calor que ingresa por la camisa

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\frac{dMH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$\frac{dM}{dt} H + M \frac{dH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$m_E = \rho F_E$$

$$m_S = \rho F_S = \rho A_s \sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_e - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}}$$

EDO 1

$$\boxed{\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh}\, H}$$

EDO 2

$$H = f\left(T\right)$$

$$Q = \text{Constante o ley funcional}$$

2 EDOS

2 Ecuaciones Algebraicas

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh}\, H$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh} \right) H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh}\, H$$

$$H = cp\left(T - T_0\right)$$

$$dH = cp\, dT$$

$cp \rightarrow$ Calor específico del fluido

$T_0 \rightarrow$ Temperatura inical tomada como referencia

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)H+\rho A_T h\frac{dH}{dt}=Q+\rho F_E H_E-\rho A_s\sqrt{2gh}\,H$$

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)cp\left(T-T_0\right)+\rho A_T h\,cp\frac{dT}{dt}=Q+\rho F_E cp\left(T_E-T_0\right)-\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp\left(T-T_0\right)$$

La temperatura de salida corresponde a la del fluido dentro del tanque

$$Q=UA_L\left(T_c-T\right)$$

$$A_L=A_T+\pi D_T h$$

$U \rightarrow$ Coeficiente de intercambio de calor

$T_c \rightarrow$ Temperatura de la camisa de calentamiento

$\mathrm{A_L} \rightarrow$ Área de contacto del liquido con la camisa

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)cp\left(T-T_0\right)+\rho A_T h\,cp\frac{dT}{dt}$$

$$=UA_T\left(T_c-T\right)+U\pi D_T h\left(T_c-T\right)+\rho F_E cp\left(T_E-T_0\right)-\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp\left(T-T_0\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)cp\left(T-T_0\right)+\rho A_T h\,cp\frac{dT}{dt}$$

$$=UA_T\left(T_c-T\right)+U\pi D_T h\left(T_c-T\right)+\rho F_E cp\left(T_E-T_0\right)-\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp\left(T-T_0\right)$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{UA_T}{\rho A_T h\,cp}\left(T_c-T\right)+\frac{U\pi D_T h}{\rho A_T h\,cp}\left(T_c-T\right)$$

$$+\frac{\rho F_E cp}{\rho A_T h\,cp}\left(T_E-T_0\right)-\frac{\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp}{\rho A_T h\,cp}\left(T-T_0\right)-\frac{\rho A_T cp}{\rho A_T h\,cp}\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T-T_0\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dT}{dt}&=\frac{U}{\rho h\,cp}\left(T_c-T\right)+\frac{4U}{\rho D_T\,cp}\left(T_c-T\right)\\&+\frac{F_E}{A_T h}\left(T_E-T_0\right)-\frac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}\left(T-T_0\right)-\frac{1}{h}\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T-T_0\right)\end{aligned}}$$

Sistema de EDOs obtenido:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

2 EDOS

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U}{\rho h\, cp}\left(T_c - T\right) + \frac{4U}{\rho D_T\, cp}\left(T_c - T\right) + \frac{F_E}{A_T h}\left(T_E - T_0\right) - \frac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}\left(T - T_0\right) - \frac{1}{h}\left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T - T_0\right)$$

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$T \rightarrow$ Variable dependiente (temperatura)

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

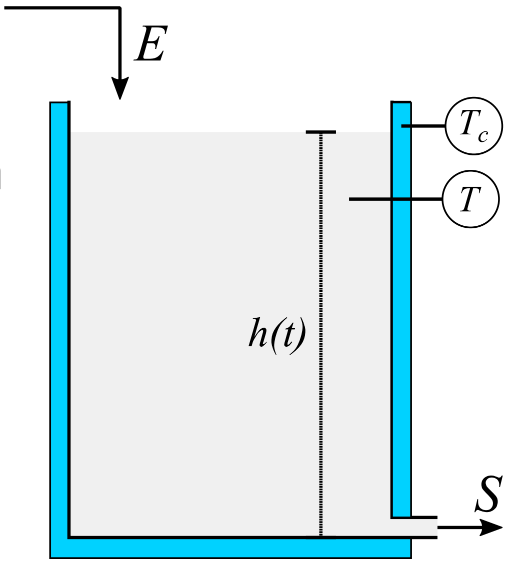
$$f_1(t,T,h) = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

$$f_2(t,T,h) = \frac{U}{\rho h\, cp}(T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T\, cp}(T_c - T)$$
$$+\frac{F_E}{A_T h}(T_E - T_0) - \frac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}(T - T_0) - \frac{1}{h}\left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)(T - T_0)$$

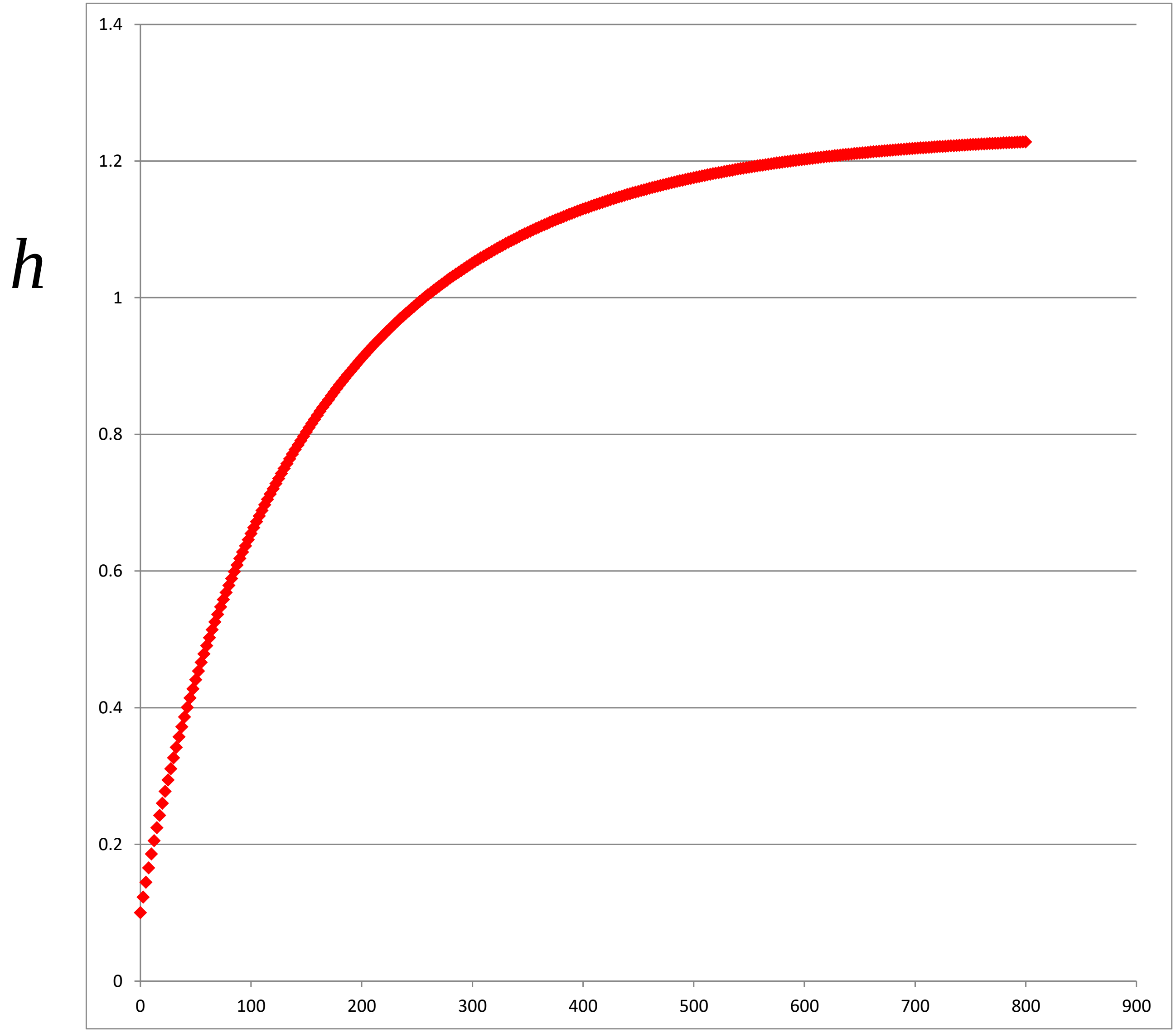
$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = f_1(t,T,h) \\ \dfrac{dT}{dt} = f_2(t,T,h) \end{cases}$$

Ejemplo práctico:

- Caudal constante de alimentación (F_E=0.01 m^3/h)
- Altura inicial del tanque: h_0=0.1 m
- Diámetro del tanque: D_T=1 m
- Diámetro de orificio de salida: D_S= 0.0508 m
- Tiempo final 800 segundos
- Densidad del fluido ρ=1000 kg/m^3
- Temperatura inicial T_0=283.15 K
- Temperatura de alimentación T_E=283.15 K
- Temperatura de la camisa T_c=373.15 K
- Calor especifico del fluido cp=4.2 kJ/(kg K)
- Coeficiente de intercambio de calor U=1 kW/(m^2 K)

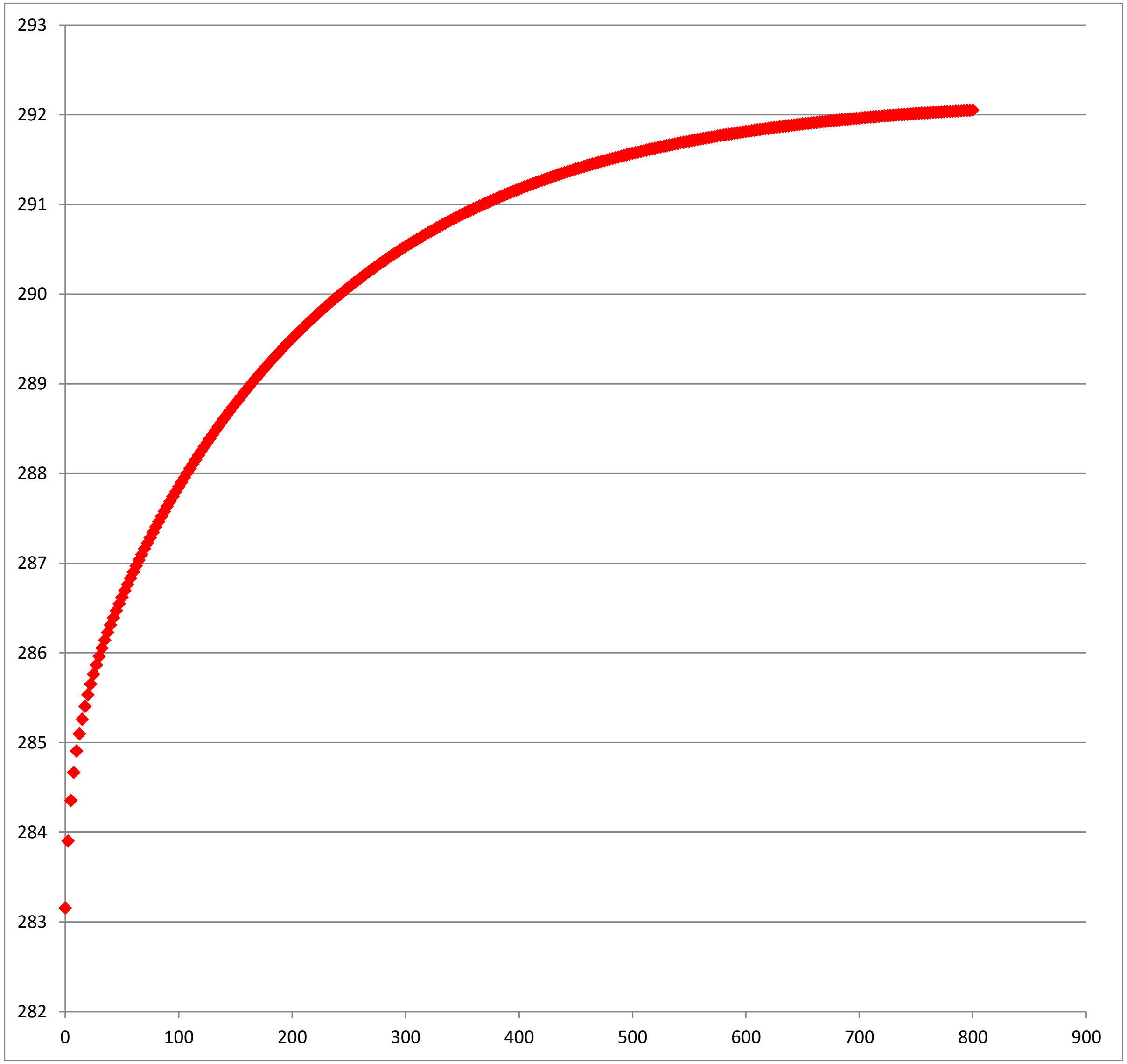


Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

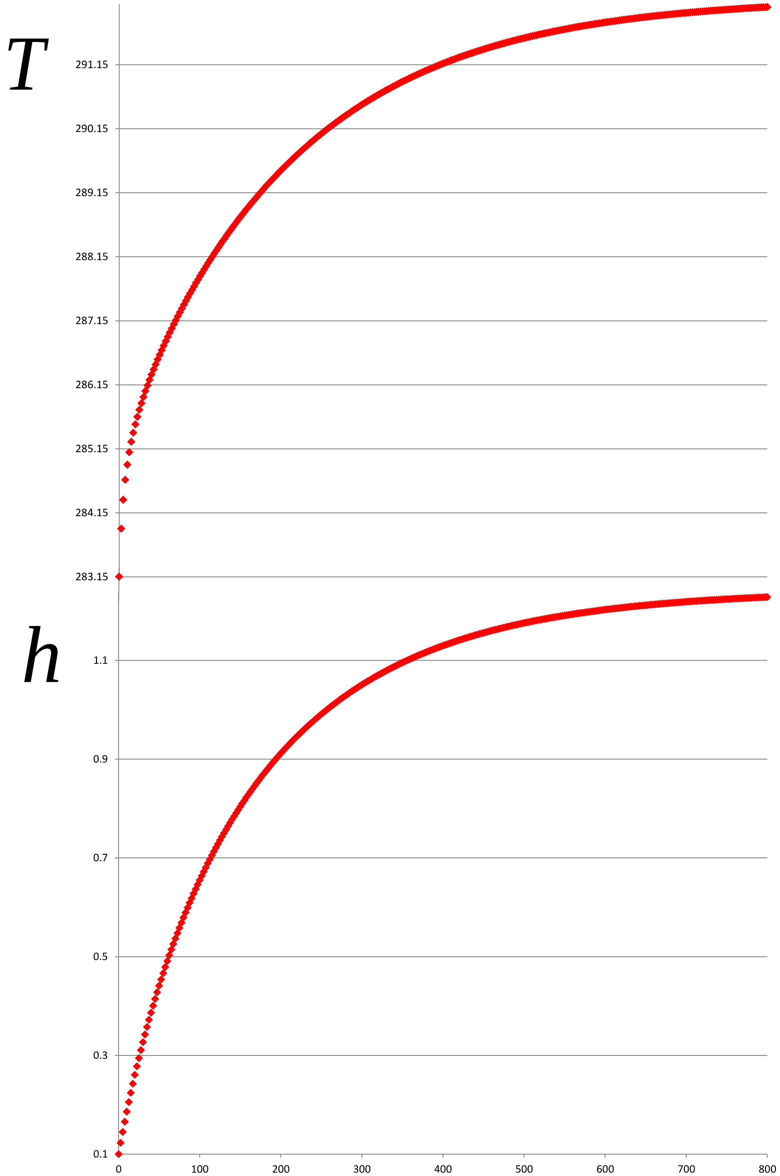


Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

T



Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento



Modelos simples de válvulas

- Las válvulas de control son conceptualmente orificios de área variable.
- Se las puede considerar simplemente como una restricción que cambia su tamaño de acuerdo a un pedido por parte del controlador u operador.
- Al pasar un fluido por una restricción , la fórmula (para líquidos) que vincula el caudal con la diferencia de presión entre la entrada y la salida es:

$$Q = k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula

$\rho \rightarrow$ Densidad del fluido

$k \rightarrow$ Constante del orificio

$$Q = k^{'}\sqrt{\frac{\Delta P^{*}}{G}}$$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido

- El predominio histórico de los fabricantes de válvulas en Estados Unidos ha llevado a que las características de las válvulas se den a menudo en unidades estadounidenses.
- Para gases suele utilizarse la misma ecuación pero utilizando la gravedad especifica referenciada al aire y el caudal expresado de forma estándar.

$$Q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula $[US\ gpm]$

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula $[psi]$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60°F}^{agua}$ $[adim]$

$C_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 ºF

$$Q = K_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula $[m^3/h]$

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula $[bar]$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60°F}^{agua}$ $[adim]$

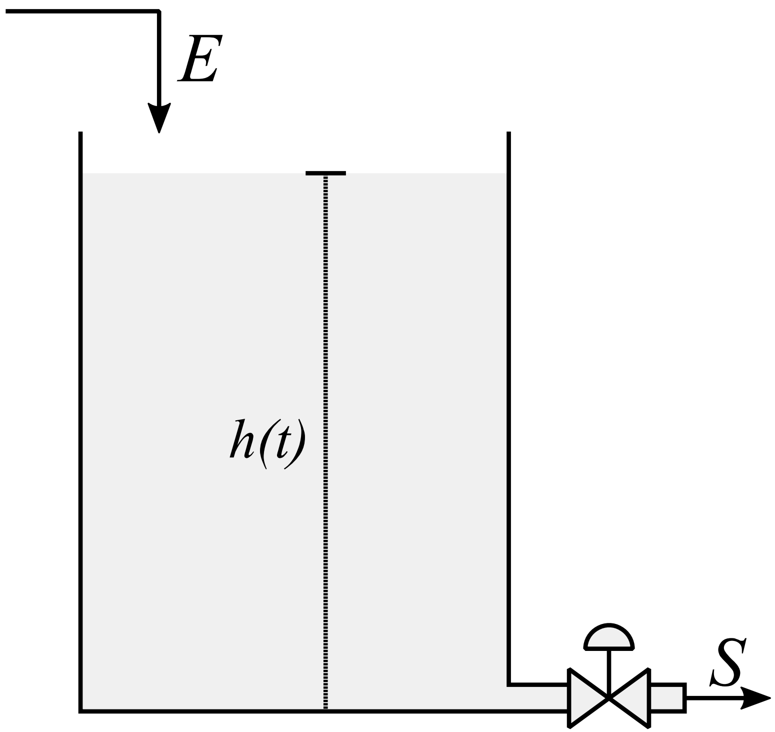
$K_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 ºF

$$C_V = 1.15 K_V$$

Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s \qquad M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

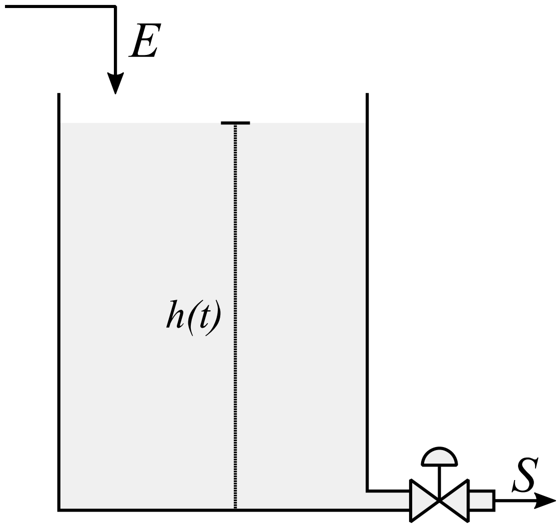
ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho S$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$



Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

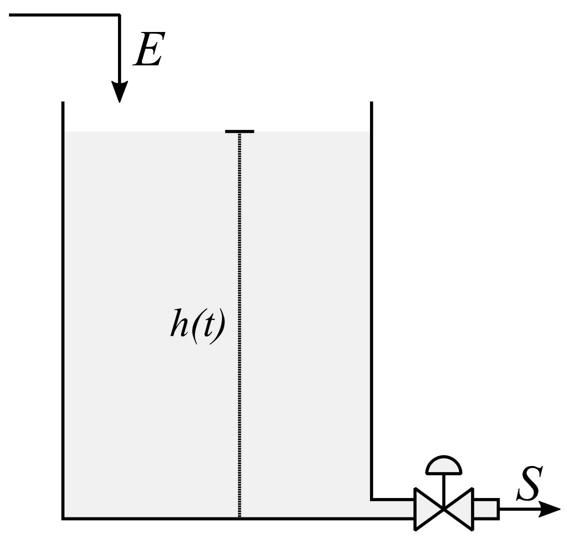
$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

$$S = C_v \sqrt{\Delta P_s / \rho} \rightarrow S = C_v \sqrt{\left(P_f - P_s\right) / \rho}$$

$$P_0 = P_s$$

$$S = C_v \sqrt{\left(\cancel{P_0} + \cancel{\rho} gh - \cancel{P_s}\right)_s / \cancel{\rho}}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T}\sqrt{gh}}$$



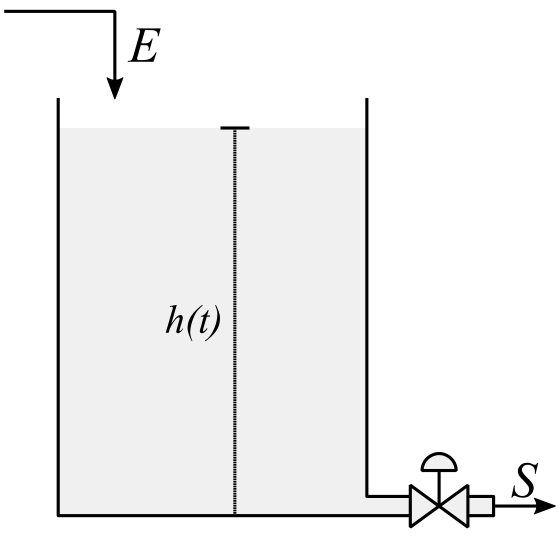
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Ejemplo práctico:

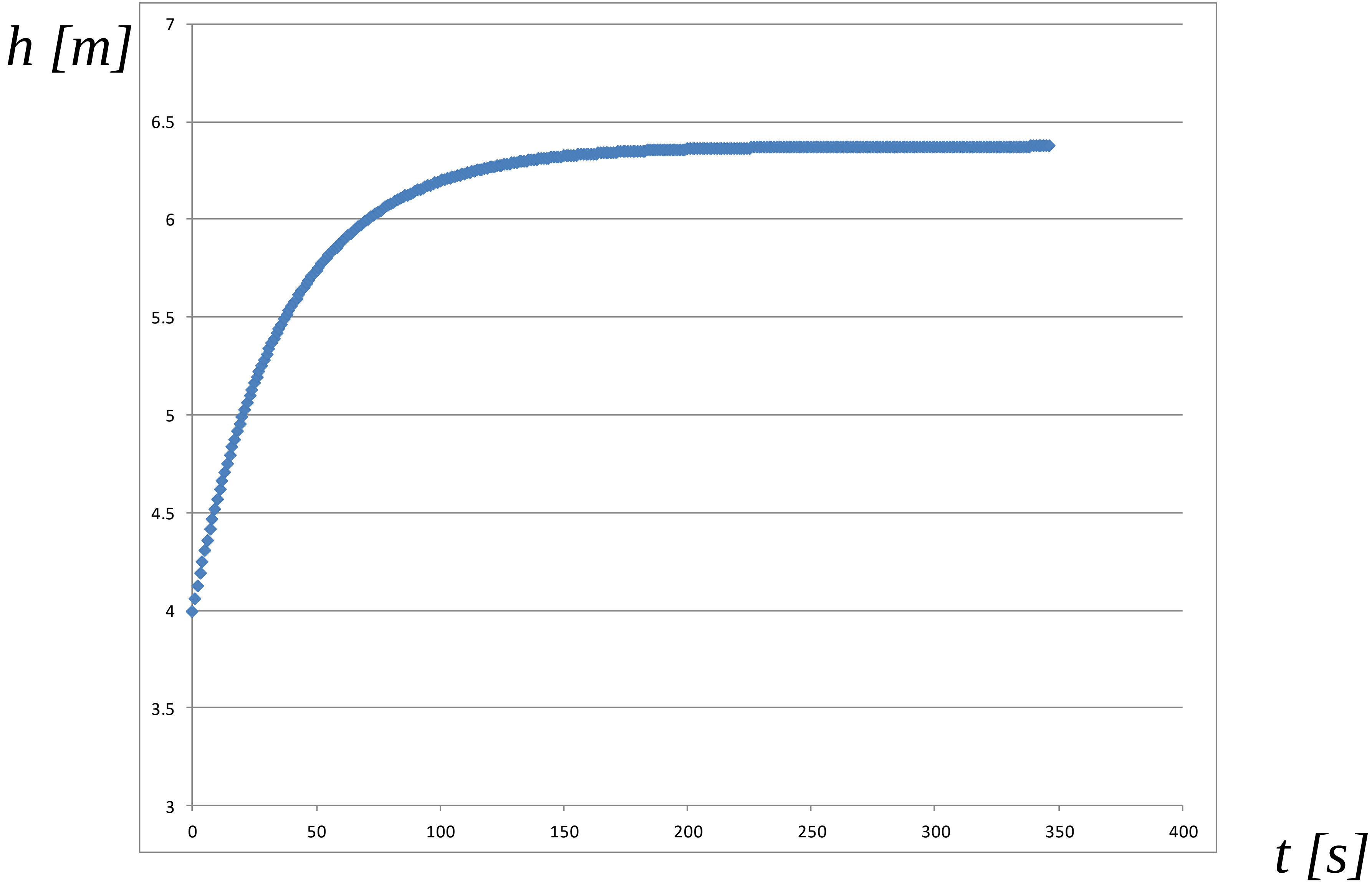
- Caudal de entrada (E=0.25 m^3/seg)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Cv de la válvula de descarga: 0.0316 m^2

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T}\sqrt{gh}$$

$$t = 0 \rightarrow h = 4\ m$$



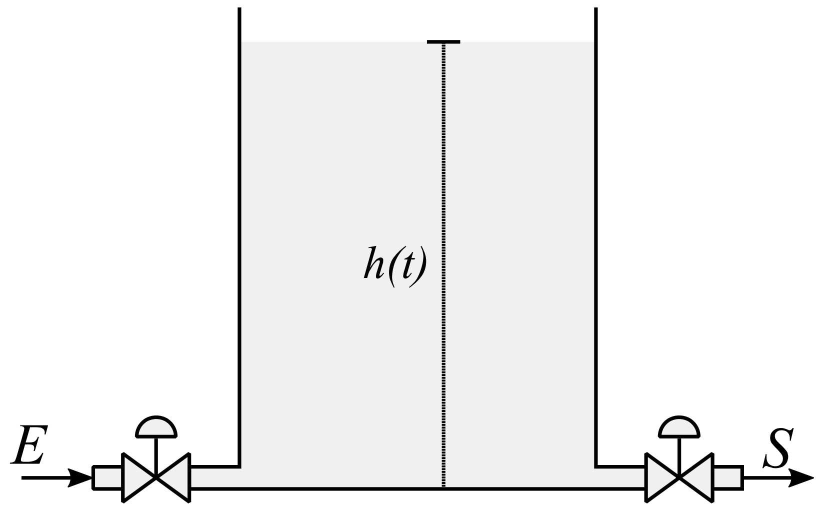
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

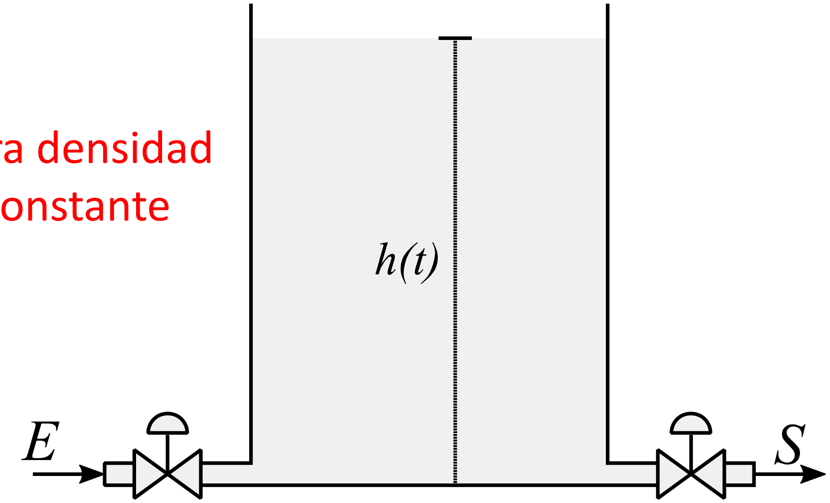
Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

- Balance de materia en el tanque:



¡Cuidado!: Solo para densidad y área transversal constante

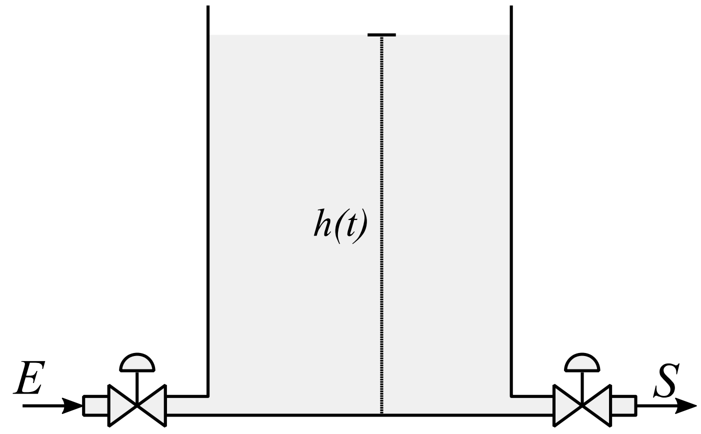
$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

$$E = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_f\right)/\rho} \qquad S = C_{v2}\sqrt{\left(P_f - P_s\right)/\rho}$$

$$E = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} \qquad S = C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$\boxed{A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}}$$

Ejemplo practico:

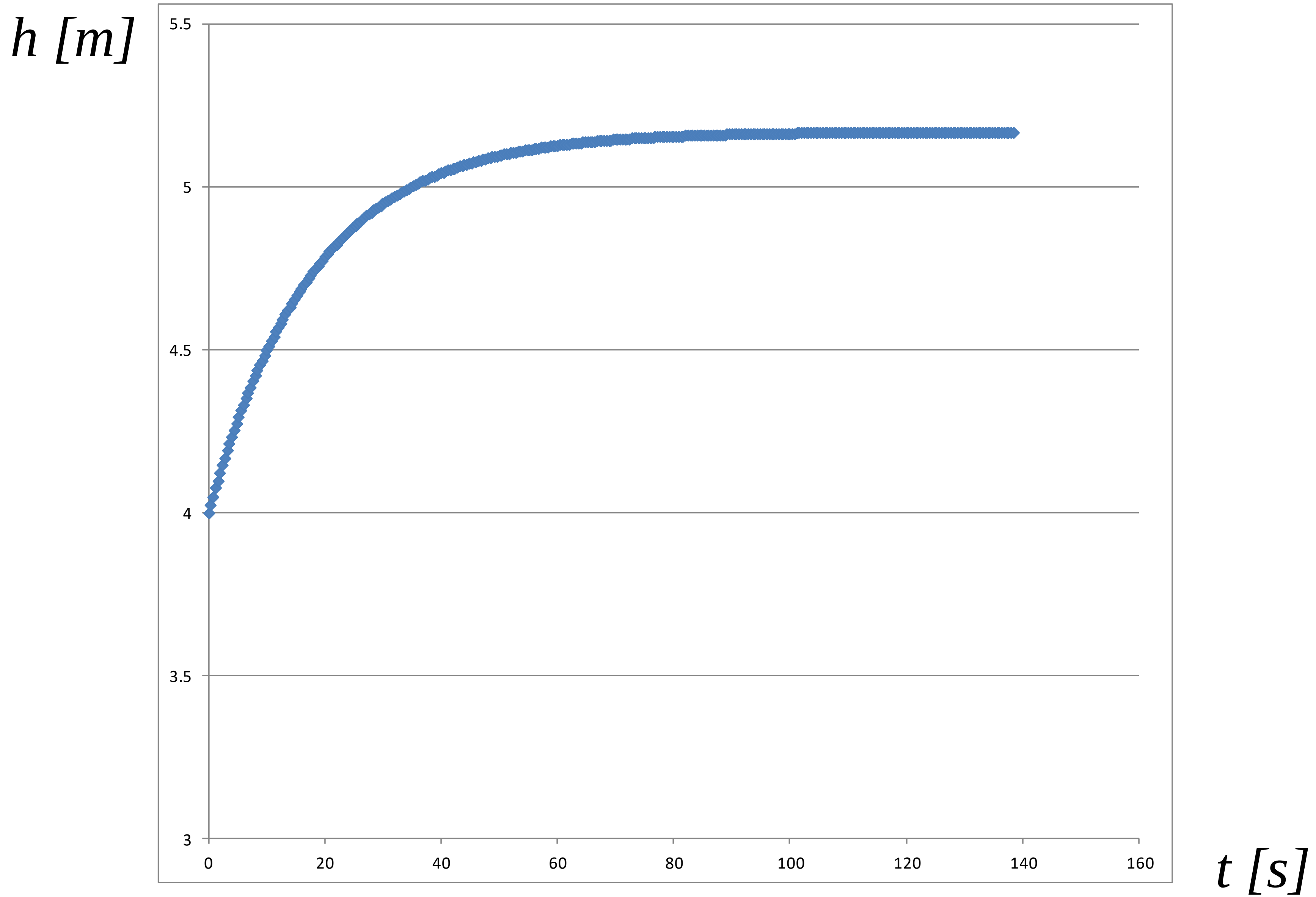


- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión en la superficie del liquido $P_0=101325\ Pa$
- Presión de descarga igual a la superior del tanque ($P_s=P_0$)
- Presión de entrada: $P_E=202650\ Pa$

$$A_T\frac{dh}{dt}=C_{v1}\sqrt{\left(P_E-P_0-\rho gh\right)/\rho}-C_{v2}\sqrt{\left(P_0+\rho gh-P_s\right)/\rho}$$

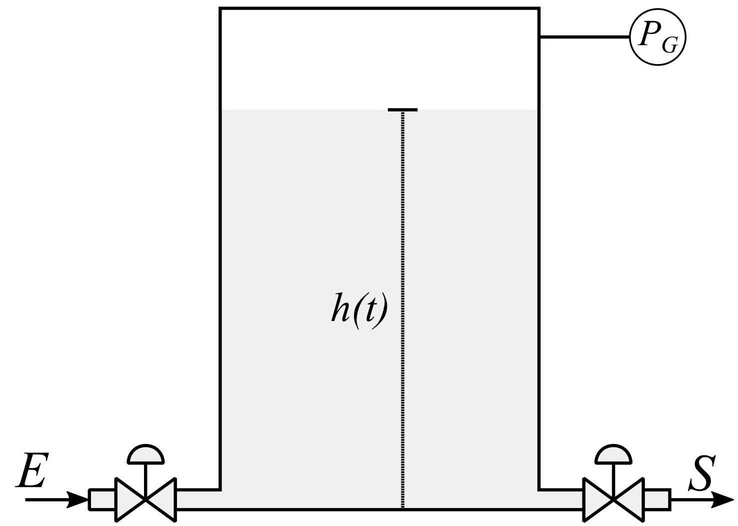
$$t=0\rightarrow h=4\,m$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- <u>El tanque tiene una atmosfera de gas inerte</u>



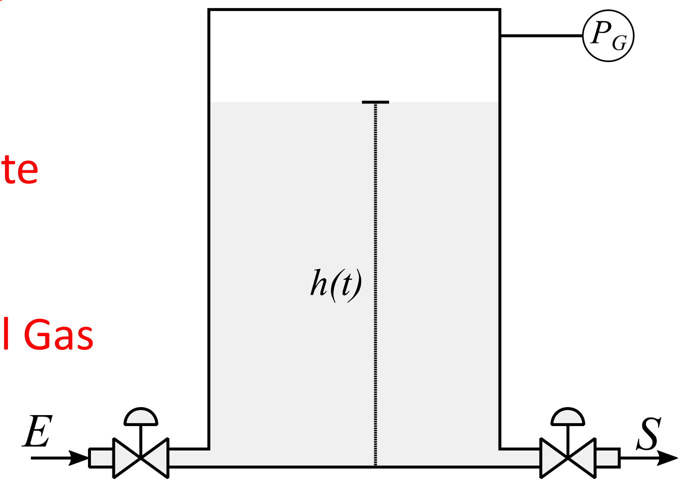
Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Matemática Superior Aplicada

UTN

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{P_E - \boxed{P_G} + \rho g h / \rho} - C_{v2}\sqrt{\boxed{P_G} + \rho g h - P_s / \rho}$$

¡Varía con la altura!



$$M_G = \rho_G V_G$$ Gas inerte en la superficie constante

$$\rho_G = \frac{P_G}{R^{'}T}$$ Asumiendo comportamiento ideal del Gas

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{R^{'} T_G^0} = \frac{P_G V_G}{R^{'} T_G}$$

$$V_G = V_T - A_T h$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{T_G^0} = \frac{P_G V_G}{T_G}$$

Se desprecia la variación de temperatura

$$P_G = \frac{P_G^0 \left(V_T - A_T h^0\right)}{\left(V_T - A_T h\right)}$$

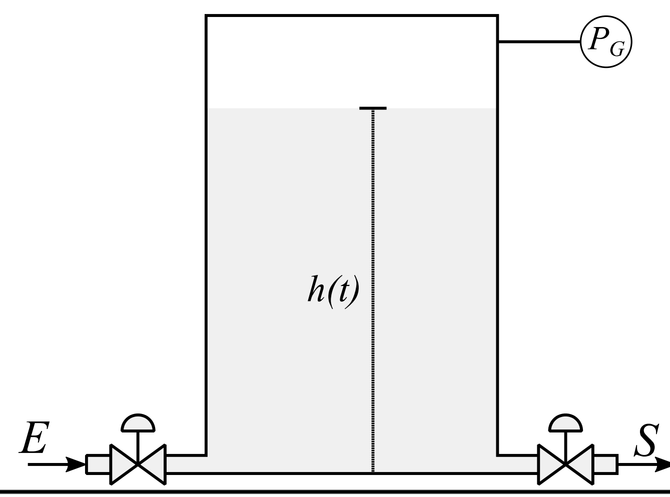
Matemática Superior Aplicada

Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

UTN

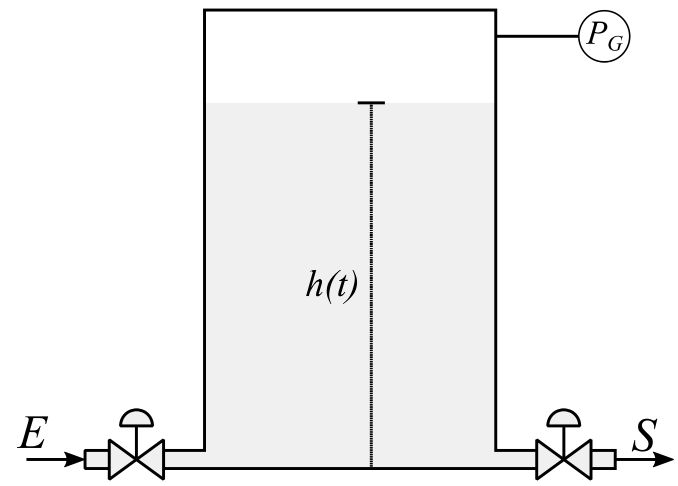
$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_G - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_G + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$P_G = \frac{P_G^0\left(V_T - A_T h^0\right)}{\left(V_T - A_T h\right)}$$



Ejemplo practico:

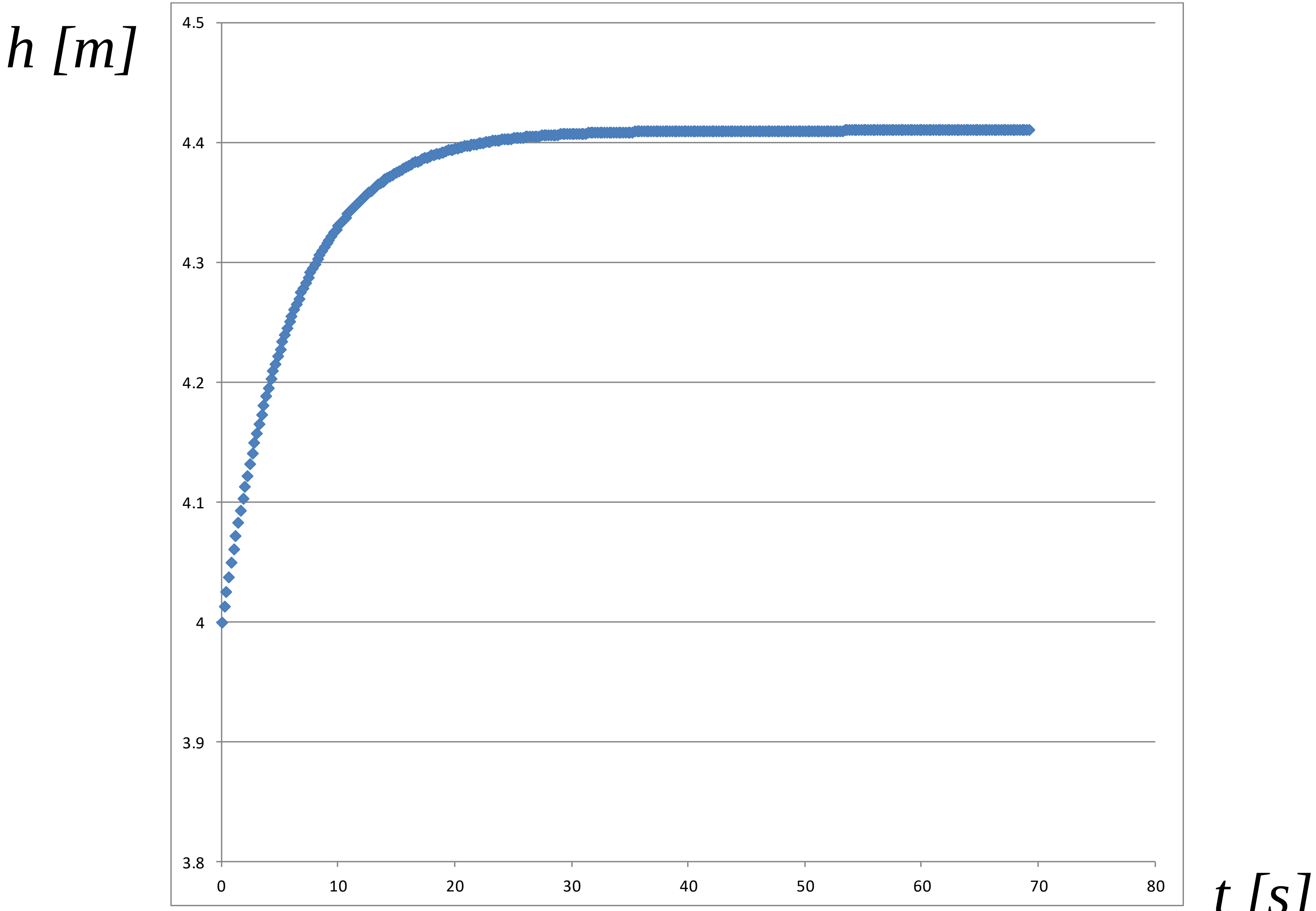
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Altura del tanque: 10 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión de descarga : P_s=101325 Pa
- Presión de entrada: P_E=202650 Pa
- Presión inicial del gas: P_G^0= 101325 Pa



$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_G - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_G + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$P_G = P_G^0 \left(V_T - A_T h^0\right) \Big/ \left(V_T - A_T h\right)$$

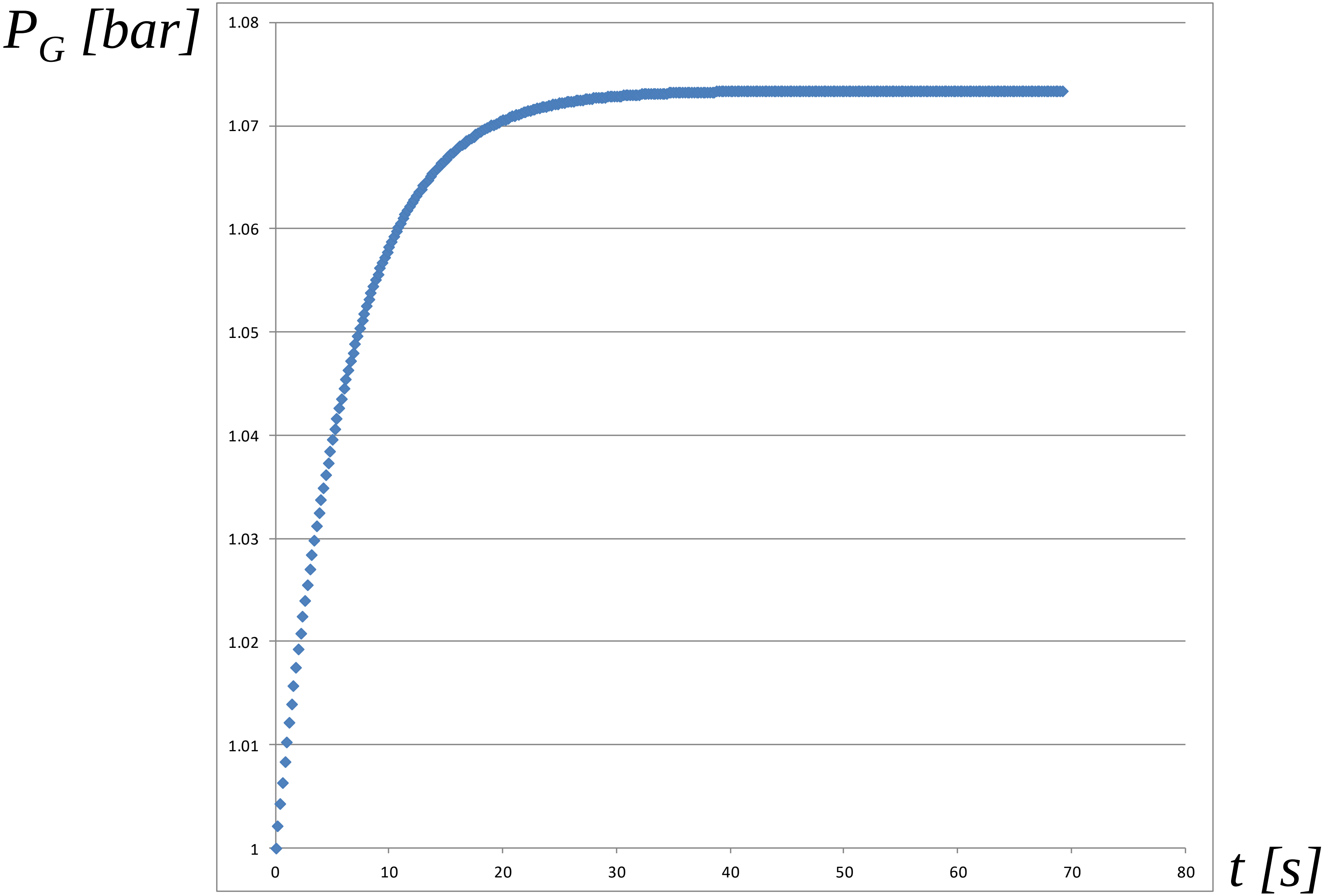
Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



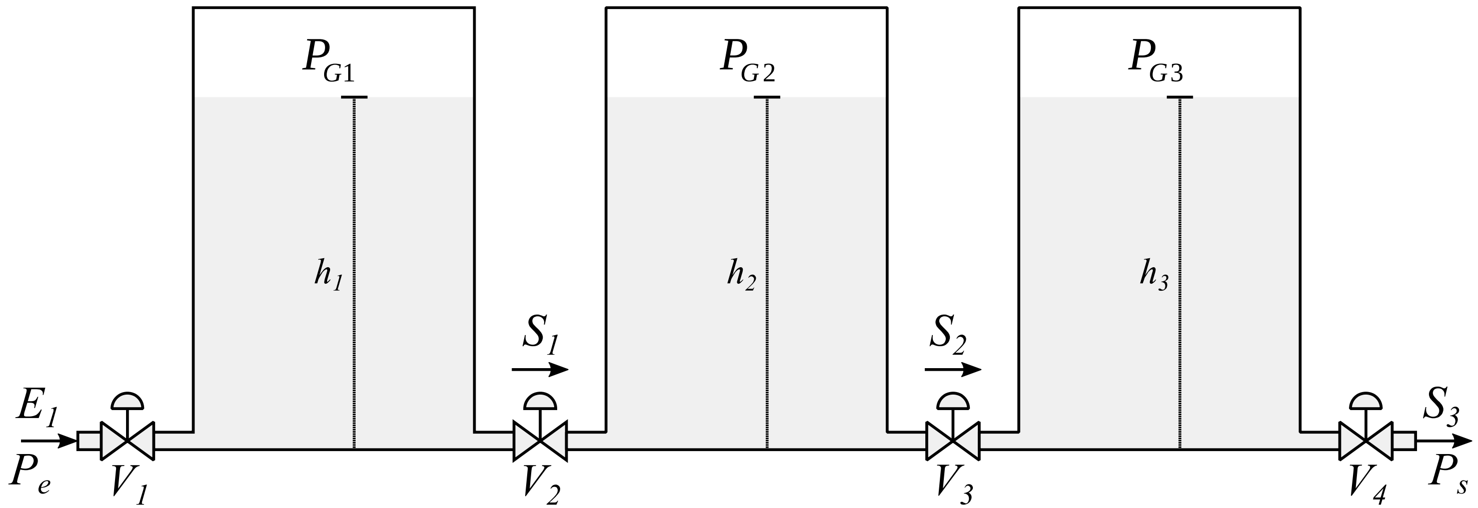
Matemática Superior Aplicada

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

UTN



Propuesta



Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \end{cases}$$

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = F_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m\right) \\ y'_2 = F_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m\right) \\ \vdots \\ y'_m = F_m\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m\right) \end{cases}$$

Sistema de EDOs. Ejemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -0.5y \\ \dfrac{dz}{dx} = 4 - 0.3z - 0.1y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

$$f_1(x, y, z) = -0.5y$$

$$f_2(x, y, z) = 4 - 0.3z - 0.1y$$

$$y(0) = 4$$

$$z(0) = 6$$

$$\Delta x = 0.5$$

Euler explícito:

$$y_{i+1} = y_i + f_1(x_i, y_i, z_i)\Delta x$$

$$z_{i+1} = z_i + f_2(x_i, y_i, z_i)\Delta x$$

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

Sistema de EDOs. Ejemplo

RK2:

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing_1 \Delta x$$

$$z_{i+1} = z_i + \varnothing_2 \Delta x$$

$$\varnothing = k_2$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$

1 EDO

$$k_{11} = f_1\left(x_i, y_i, z_i\right)$$

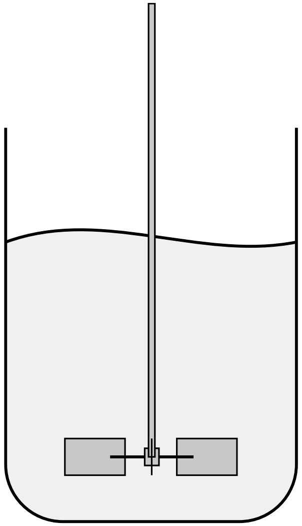
$$k_{12} = f_2\left(x_i, y_i, z_i\right)$$

$$k_{21} = f_1\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_{11}, z_i + 0.5\Delta x k_{12}\right)$$

$$k_{22} = f_2\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_{11}, z_i + 0.5\Delta x k_{12}\right)$$

$$\varnothing_1 = k_{21}$$

$$\varnothing_2 = k_{22}$$



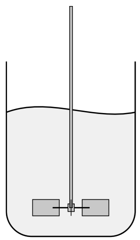
Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Volumen constante
- Dos reacciones químicas en serie:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$\begin{bmatrix} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{bmatrix}}$$

Reactor Batch



$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

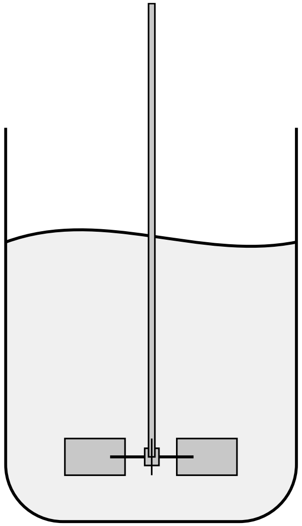
$r_j \left[\dfrac{1}{volumen \times tiempo}\right]$ Velocidad de avance de la reacción “j”. Siempre > 0

$r_{ij} \left[\dfrac{moles\, de\, i}{volumen \times tiempo}\right]$ Generación de la especie “i” por unidad de volumen y unidad de tiempo, causada exclusivamente por el avance de la reacción “j”

$r_i \left[\dfrac{moles\, de\, i}{volumen \times tiempo}\right]$ Generación neta de la especie “i” por unidad de volumen y unidad de tiempo, causada por el conjunto de N reacciones

$$r_{ij} = \upsilon_{ij} \times r_j \qquad r_i = \sum_{j=R1}^{RN} r_{ij} = \sum_{j=R1}^{RN} \upsilon_{ij} \times r_j$$

Reactor Batch



Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Volumen constante
- Dos reacciones químicas en serie:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$r_1 = k_1$$

$$r_2 = k_2 C_B$$

Para este ejemplo

$$r_{A1} = -k_1$$

$$r_{A2} = 0$$

$$r_{B1} = k_1$$

$$r_{B2} = -k_2 C_B$$

$$r_{C1} = 0$$

$$r_{C2} = k_2 C_B$$

$$\begin{cases} r_A = -k_1 \\ r_B = k_1 - k_2 C_B \\ r_C = k_2 C_B \end{cases}$$

- Balance de materia de los reactivos en el reactor:

$$\begin{bmatrix} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{bmatrix}$$

Acumulación = ~~Entrada~~ – ~~Salida~~ + Generación

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$\frac{dM_A}{dt} = r_A V \qquad r_A = -k_1$$

$$V\frac{dC_A}{dt} = -k_1 V \qquad \boxed{\frac{dC_A}{dt} = -k_1}$$

Reacción de 1er. Orden en un Reactor Batch

- Balance de materia de los reactivos en el reactor:

Acumulación = ~~Entrada~~ – ~~Salida~~ + Generación

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$\frac{dM_B}{dt} = r_B V \qquad r_B = k_1 - k_2 C_B$$

$$V \frac{dC_B}{dt} = k_1 V - k_2 C_B V$$

$$\boxed{\frac{dC_B}{dt} = k_1 - k_2 C_B}$$

- Balance de materia de los reactivos en el reactor:

Acumulación = ~~Entrada~~ – ~~Salida~~ + Generación $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$

$$\frac{dM_C}{dt} = r_C V \qquad r_C = k_2 C_B$$

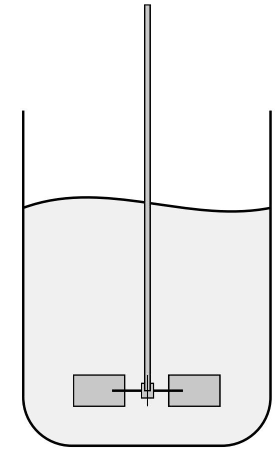
$$V\frac{dC_C}{dt} = k_2 C_B V$$

$$\boxed{\frac{dC_C}{dt} = k_2 C_B}$$

Reacción de 1er. Orden en un Reactor Batch

Ejemplo practico:

- $k_1 = 0.5$ *mol/(litro min)*
- $k_2 = 0.3\ min^{-1}$
- La concentración inicial es de A es $C_{A0} = 2$ *mol/litro*



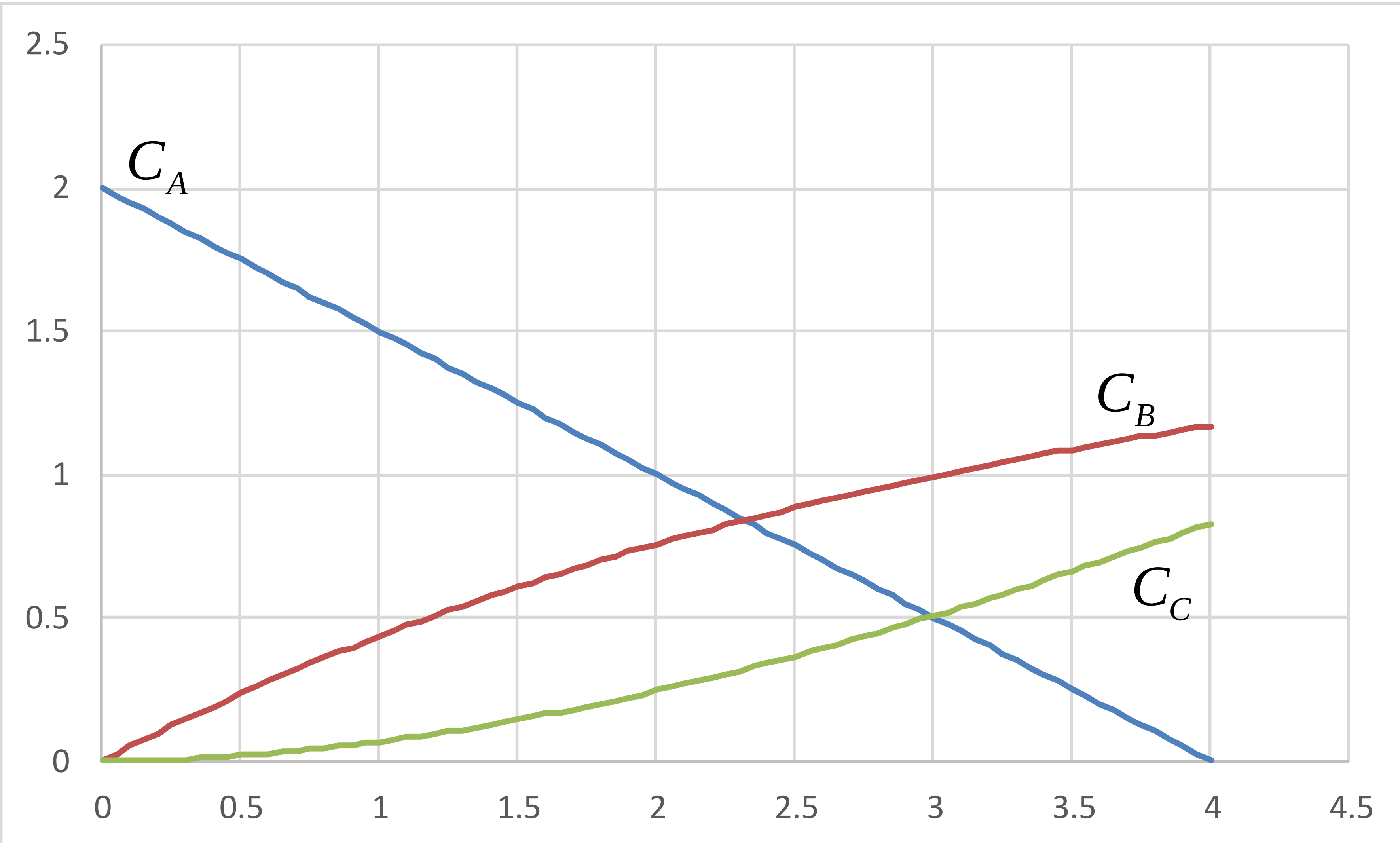
$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= -0.5 \\ \frac{dC_B}{dt} &= 0.5 - 0.3C_B \\ \frac{dC_C}{dt} &= 0.3C_B \end{aligned}}$$

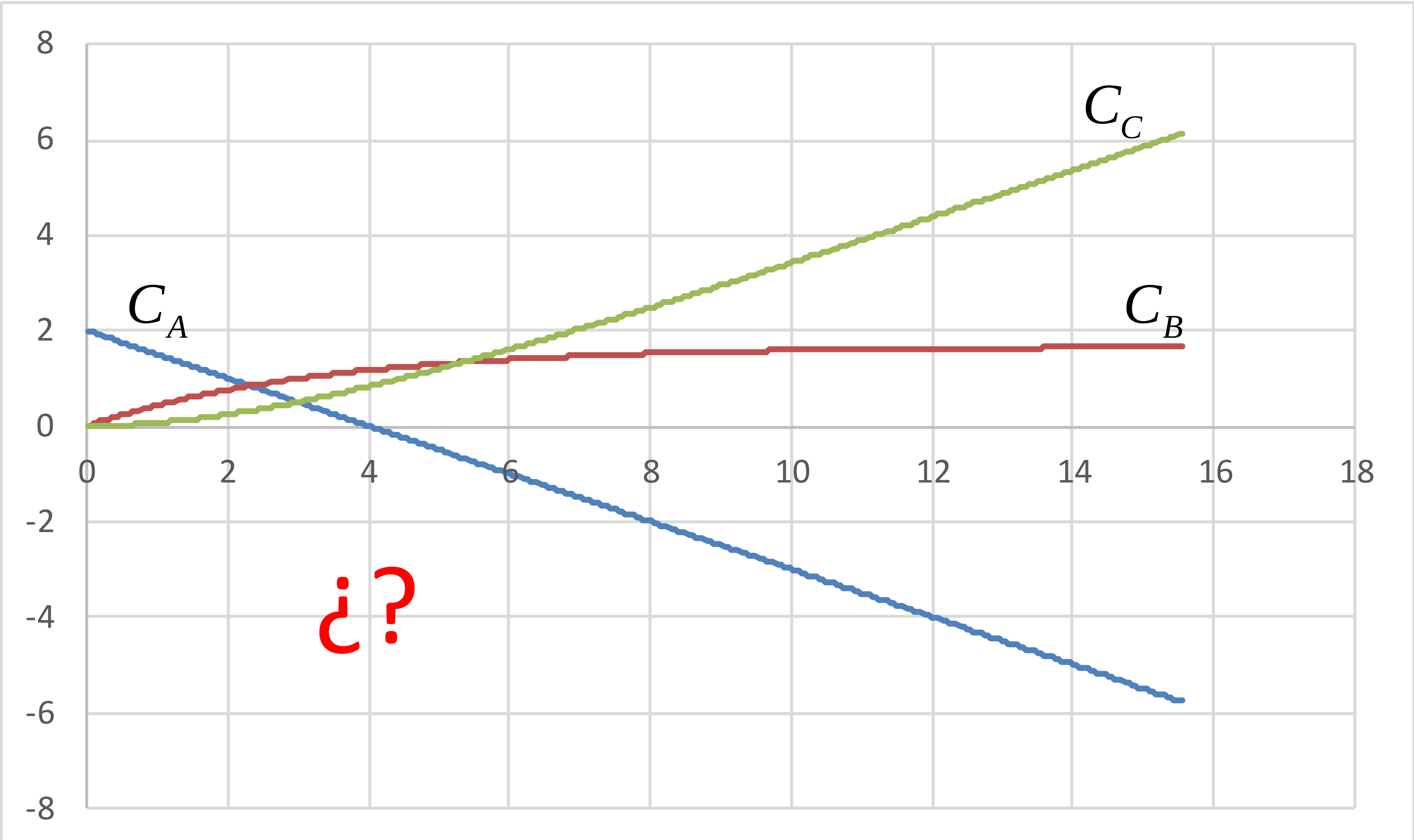
$$t = 0$$

$$C_A = 2; C_B = 0; C_C = 0$$

Ejemplo Reactor Batch

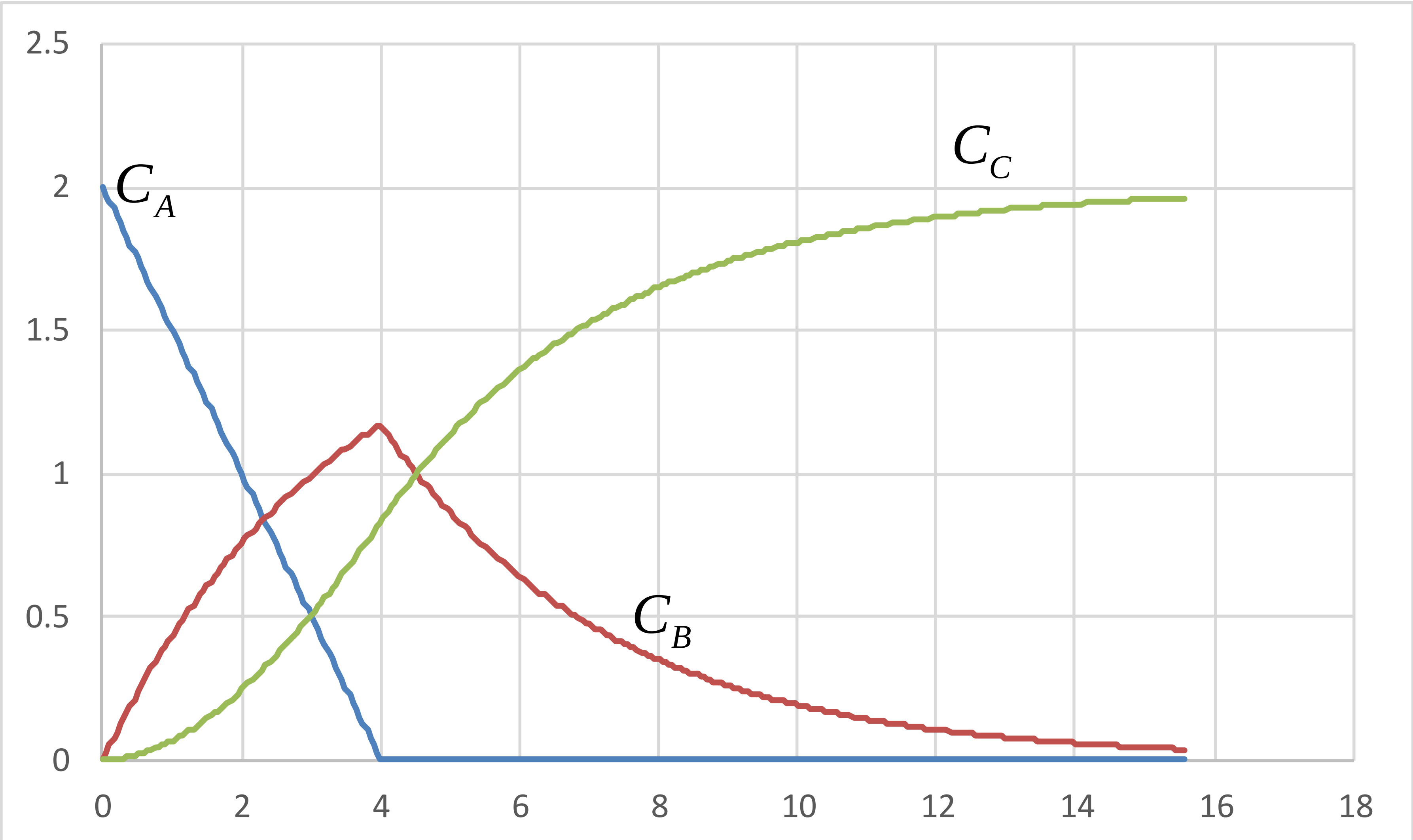


Ejemplo Reactor Batch

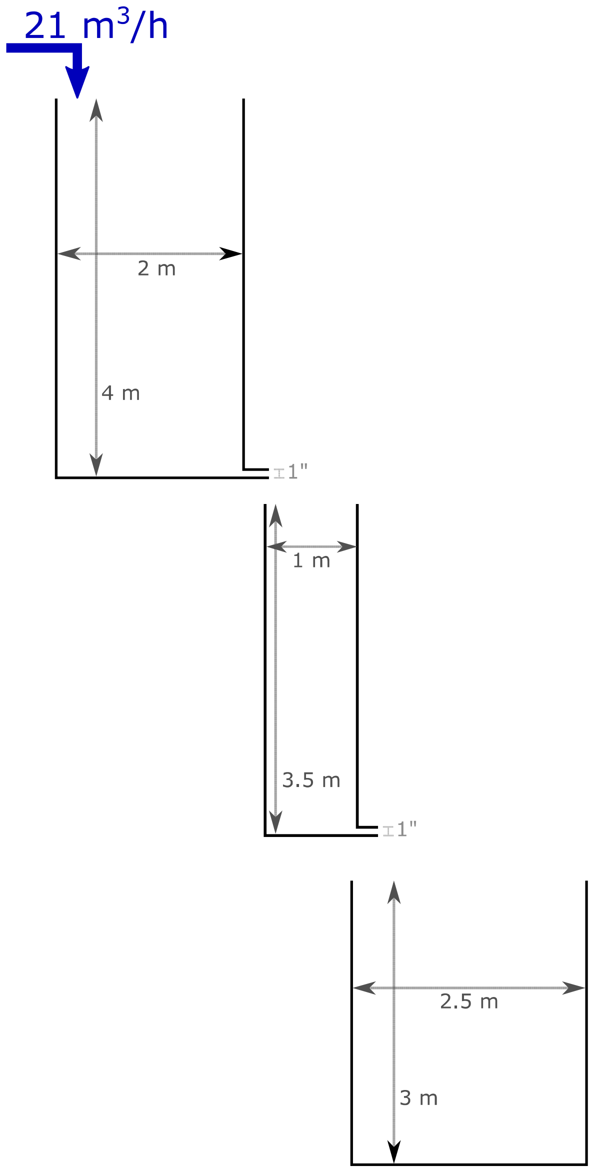


Matemática Superior Aplicada

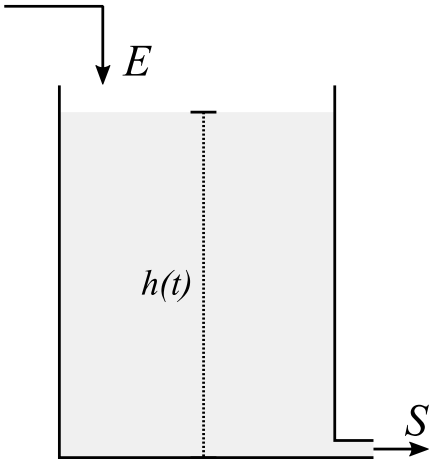
Ejemplo Reactor Batch



Ejemplo: Tres tanques interconectados



Ejemplo: Tres tanques interconectados



Tanque cilíndrico y densidad constante

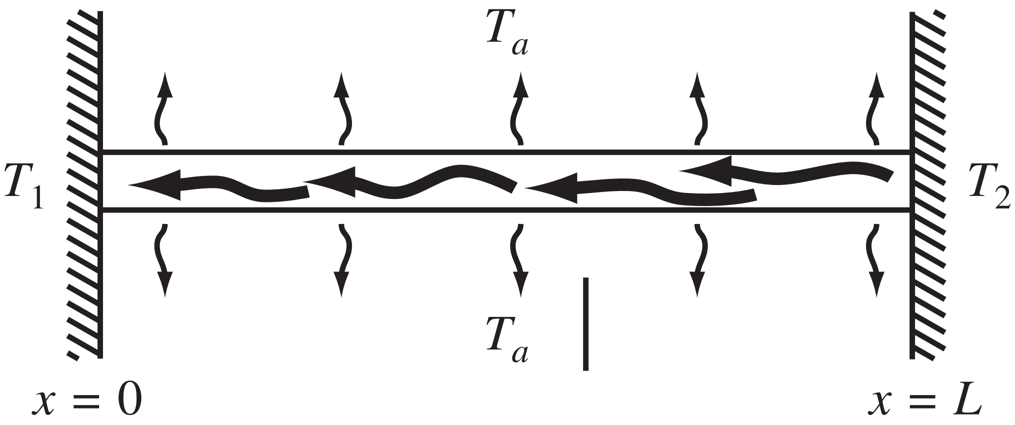
$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_E - Q_S}{A_T}$$

$$Q_S = A_s \sqrt{2gh}$$

Q_E: Caudal volumétrico de entrada.
Q_S: caudal volumétrico de salida.
A_T: Área transversal del tanque.
A_S: Área del orificio de salida.

Realizar el modelo para tres tanques

Shooting Method



Barra delgada entre dos fuentes a temperatura constante

$T_a = 20\,^{o}C$

$T_1 = 40\,^{o}C$

$T_2 = 200\,^{o}C$

$h' = 0.01$

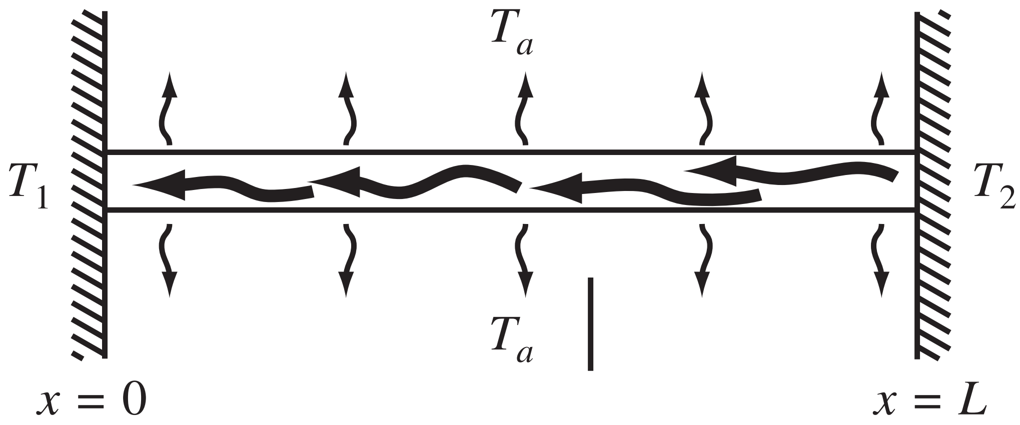
$L = 10$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} + h'(T_a - T) = 0$$

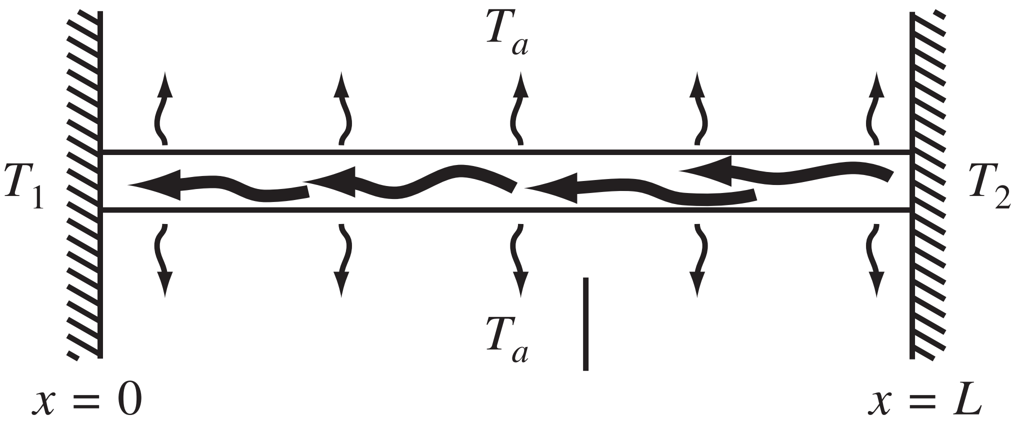
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = h'(T - T_a) \\ \dfrac{dT}{dx} = z \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = h'\left(T - T_a\right) \\ \dfrac{dT}{dx} = z \end{cases}$$

Para que sea un problema de valores iniciales debo conocer z(0) y T(0)

Shooting Method

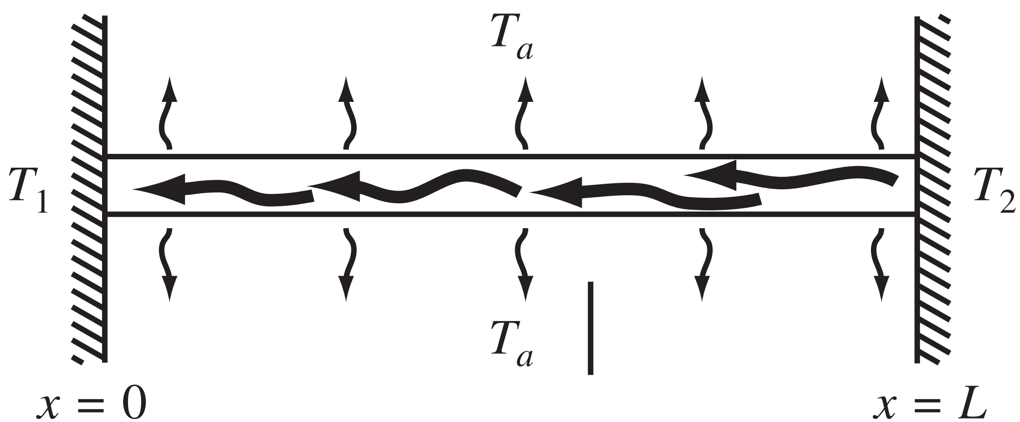


$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = h'\left(T - T_a\right) \\ \dfrac{dT}{dx} = z \end{cases}$$

- Este problema corresponde a uno de frontera.
- Conozco el valor de la variable independiente en diferentes puntos.
- ¡Conozco T(0) y T(L)!

El método de disparo se basa en convertir el problema de valor en la frontera en un problema de valor inicial equivalente. Posteriormente se aplica un procedimiento de prueba y error para resolver la versión del valor inicial.

Shooting Method



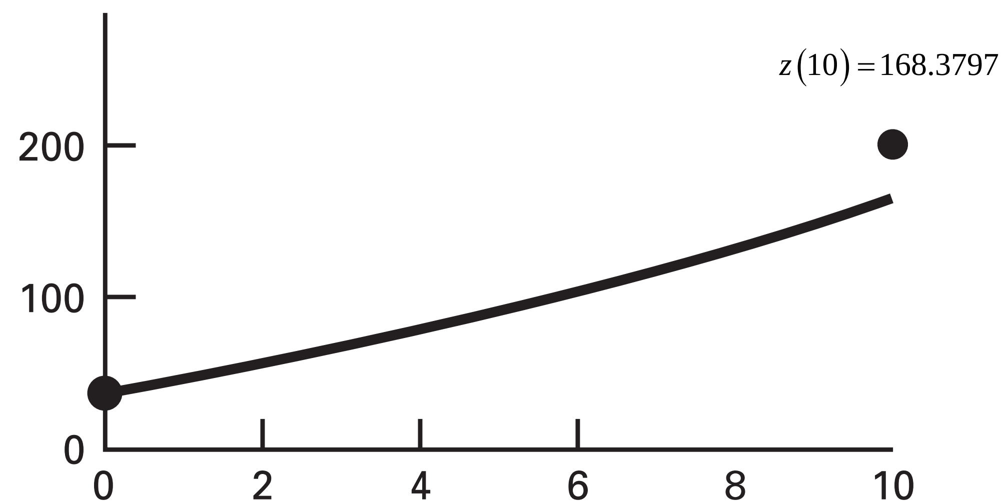
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = h'\left(T - T_a\right) \\ \dfrac{dT}{dx} = z \end{cases}$$

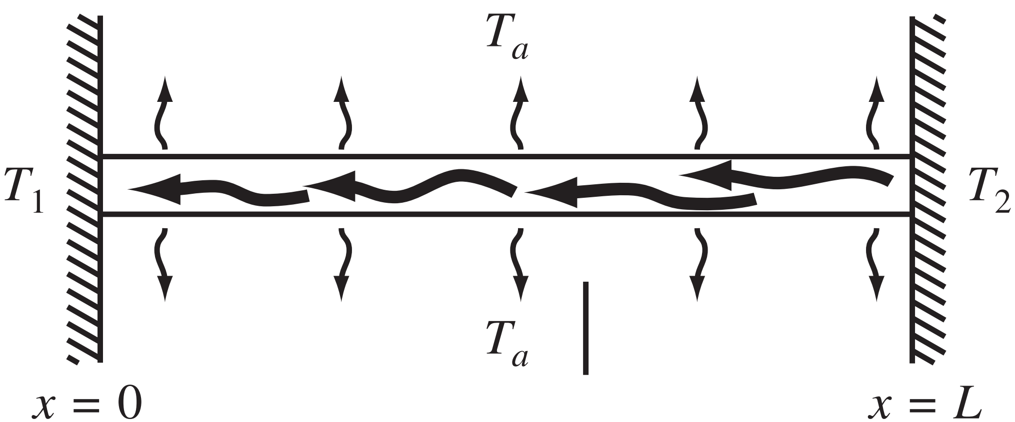
$z(0) = 10$

$T(0) = 40$

$RK4$

$\Delta x = 2$





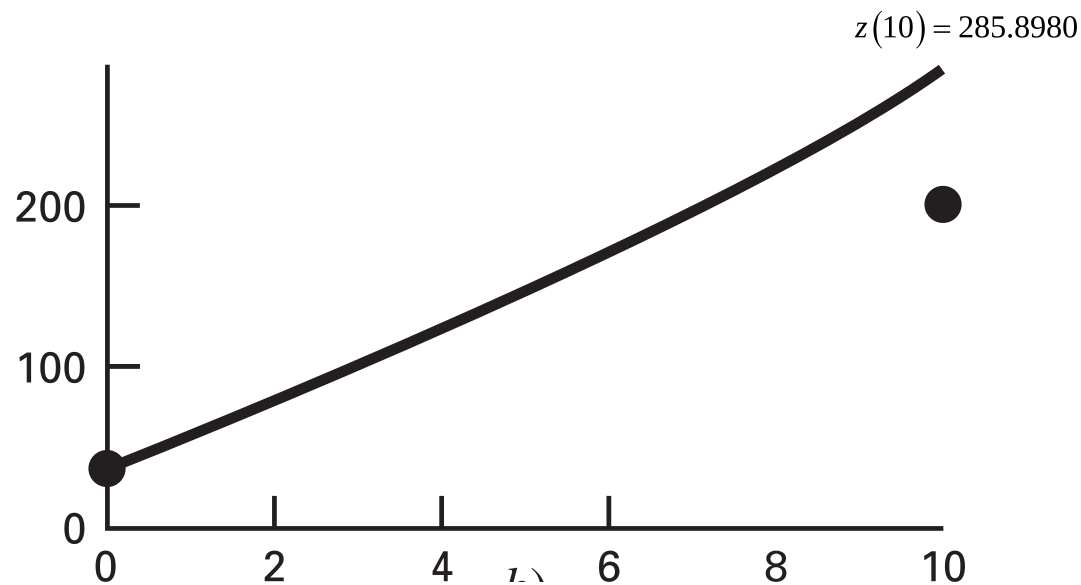
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = h'\left(T - T_a\right) \\ \dfrac{dT}{dx} = z \end{cases}$$

$z(0) = 20$

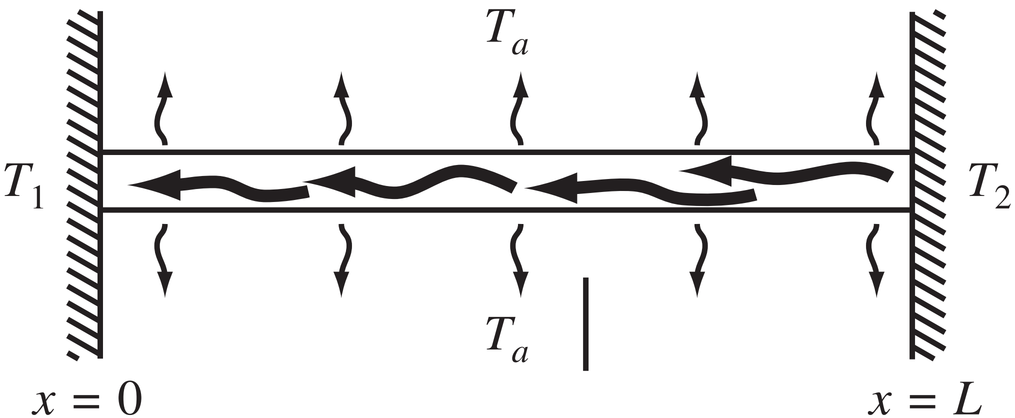
$T(0) = 40$

$RK4$

$\Delta x = 2$



Shooting Method



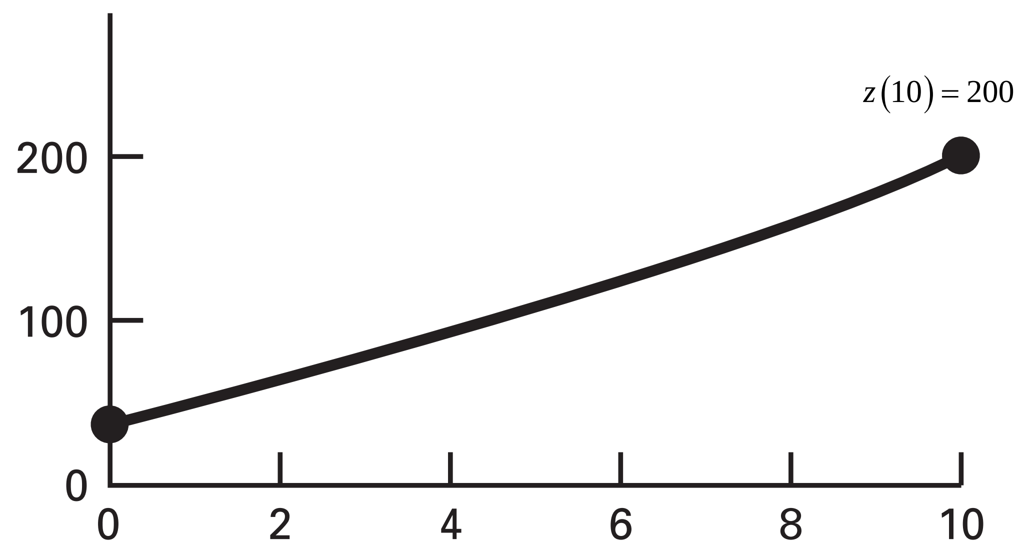
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = h'(T - T_a) \\ \dfrac{dT}{dx} = z \end{cases}$$

$\boxed{z(0) = 12.6907}$ secante

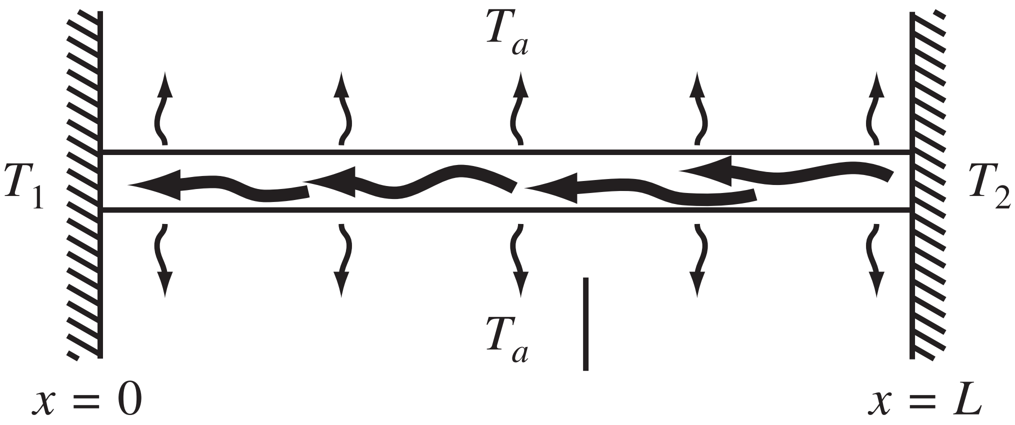
$T(0) = 40$

$RK4$

$\Delta x = 2$



Shooting Method



$T_a = 20\,^{\circ}C$

$T_1 = 40\,^{\circ}C$

$T_2 = 200\,^{\circ}C$

$h'' = 5 \times 10^{-8}$

$L = 10$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h''\left(T_a - T\right)^4 = 0$$

Radiación

Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y + 4e^{-x} \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{yz^2}{3} \end{cases}$$

- Resuelva el sistema utilizando el método de Euler explícito, suponiendo que en x = 0, y = 2 y z = 4. Integre hasta x = 1 con un tamaño de paso igual a 0.2.
- Plantear como se resolvería con Euler implícito