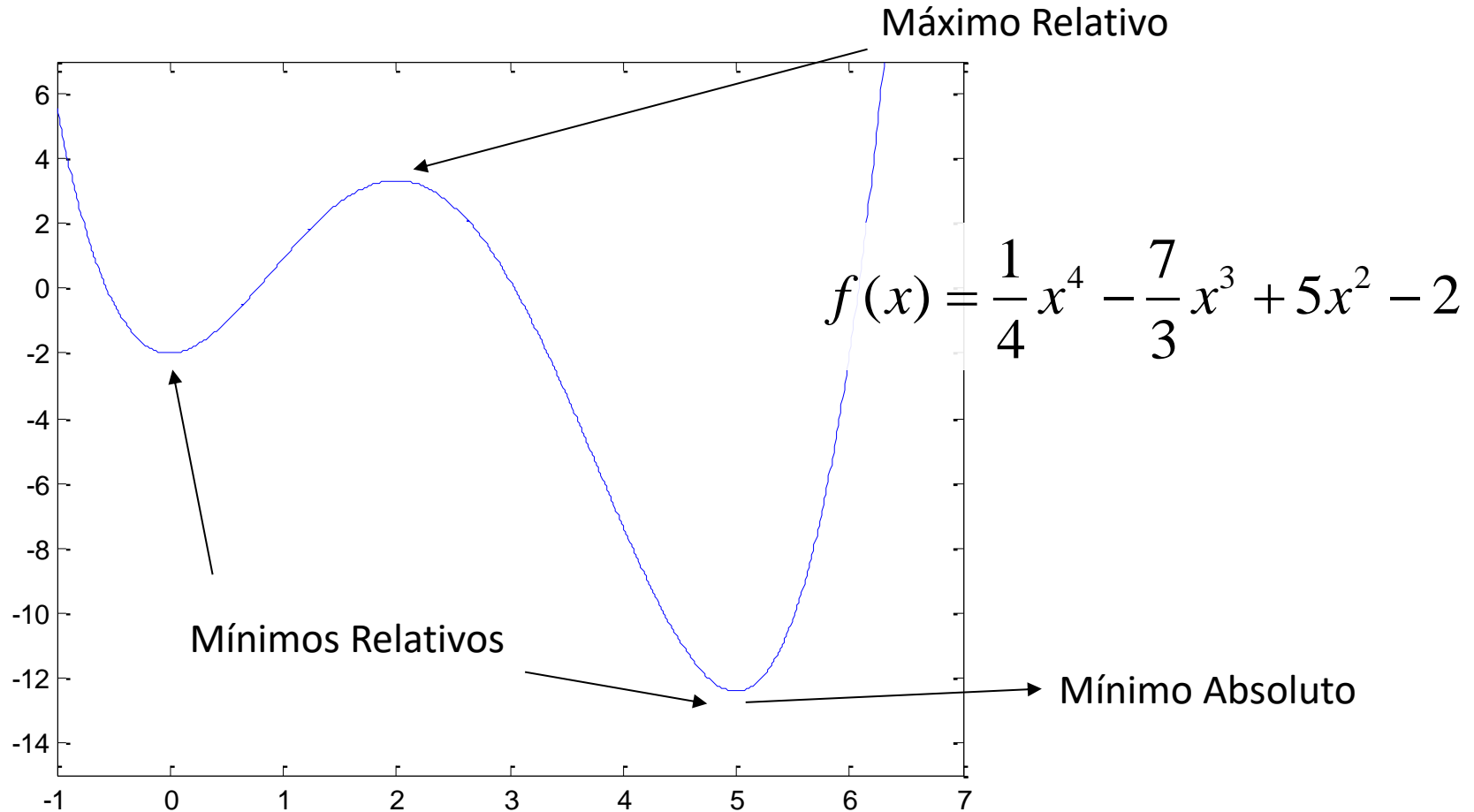


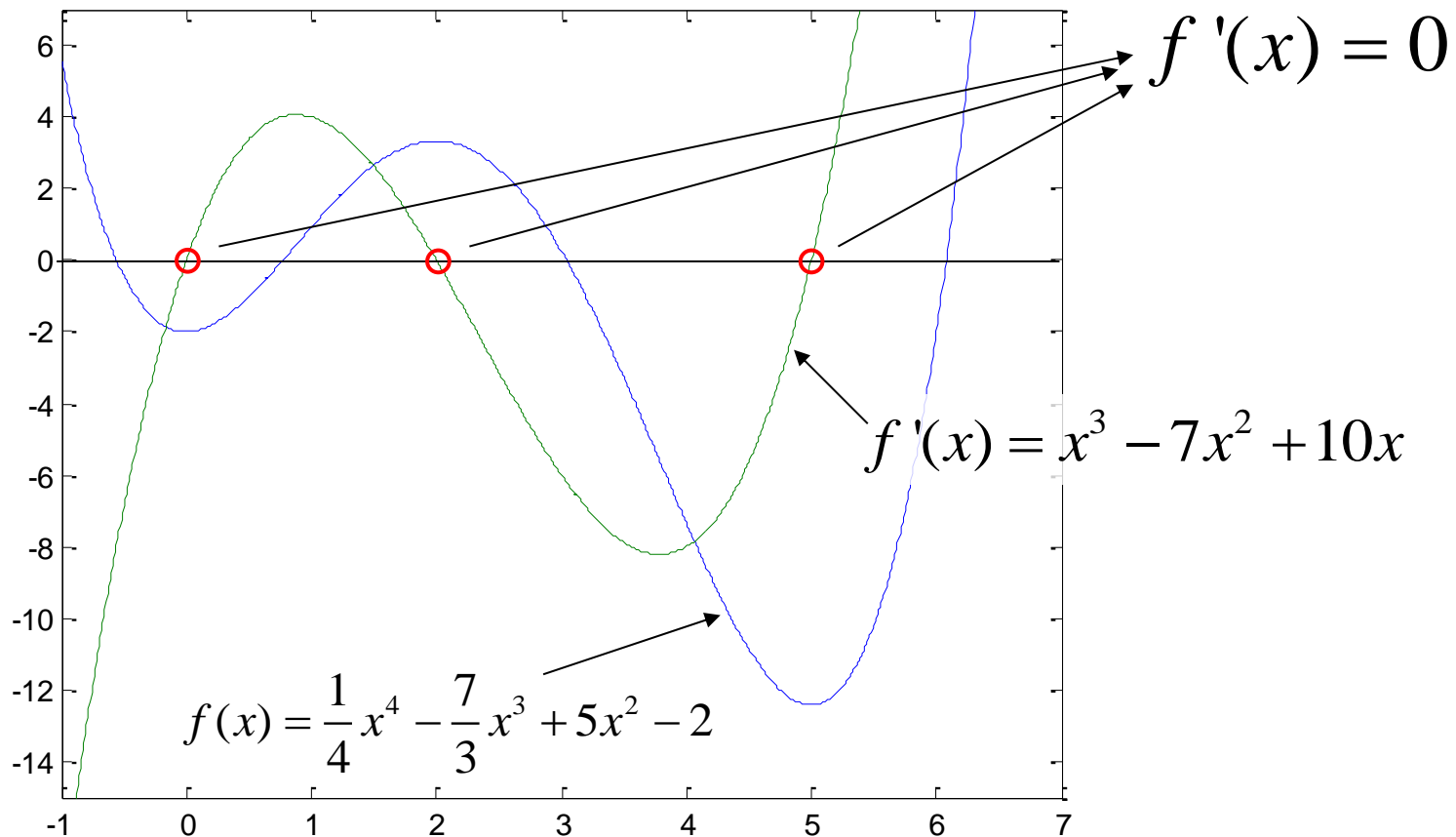
# Optimización Unidimensional 2024

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi  
JTP: Ing. Amalia Rueda

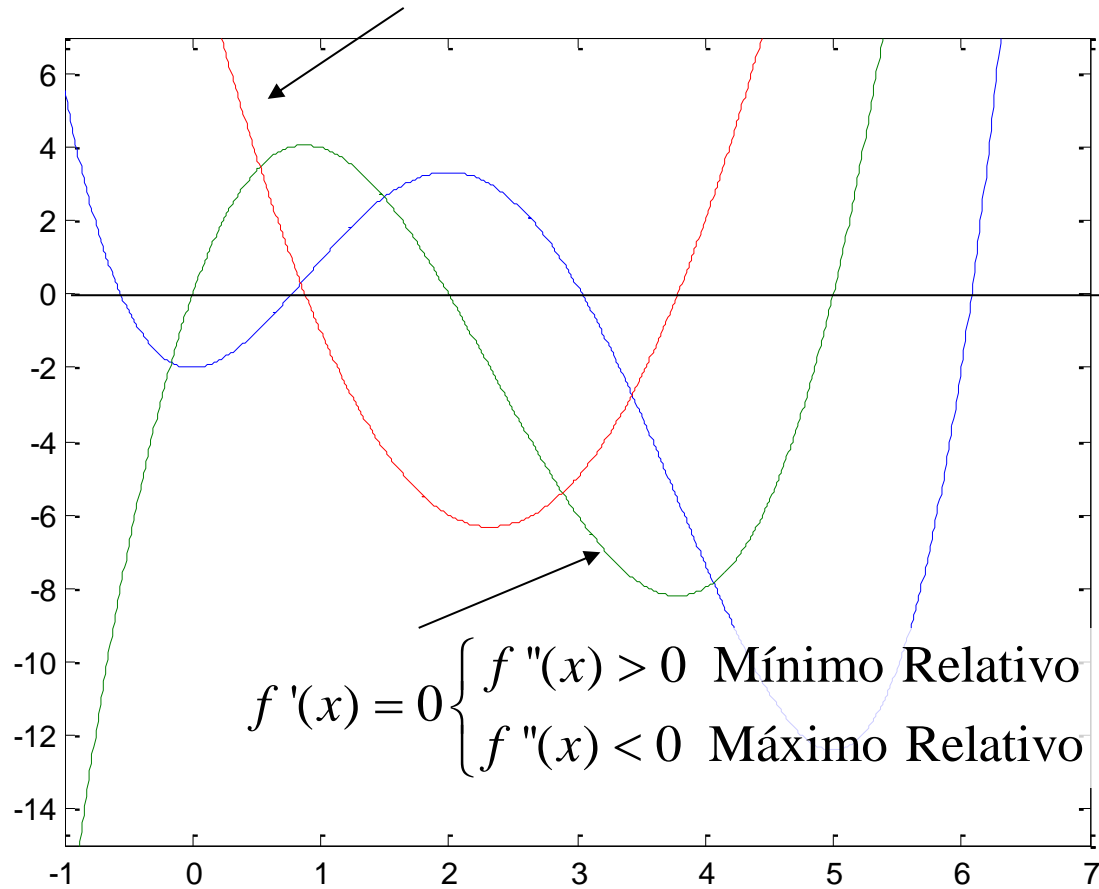
Encontrar el valor mínimo o máximo de una función en una variable



Condición necesaria de mínimo o máximo:  $f'(x) = 0$



$$f''(x) = 3x^2 - 14x + 10$$



Taylor de segundo orden:  $f(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$

Utilizando el valor actual de la variable en un proceso iterativo  $x^{(k)}$  se aproxima por Taylor de segundo orden el valor de la función en el siguiente punto  $x^{(k+1)}$ :

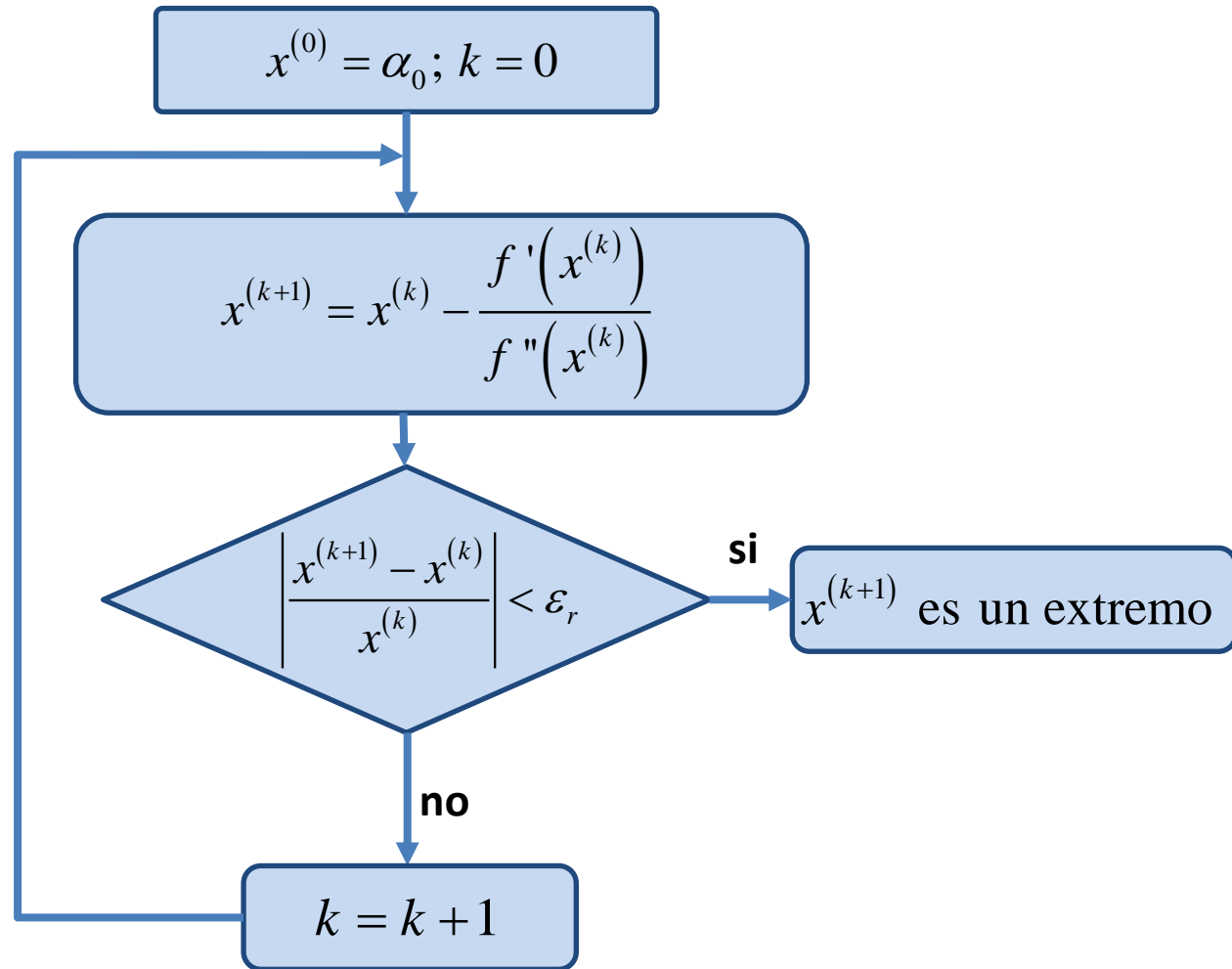
$$f(x^{(k+1)}, x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{f''(x^{(k)})}{2!}(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2$$

Buscamos que el siguiente punto sea un punto crítico:  $\frac{df(x^{(k+1)}, x^{(k)})}{dx^{(k+1)}} = 0$

$$0 + f'(x^{(k)}) + \frac{2f''(x^{(k)})}{2!}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}$$

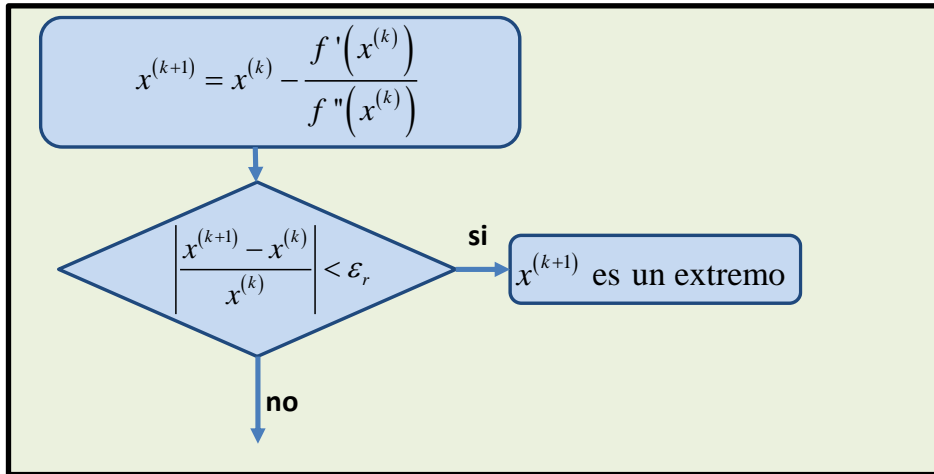
Formula recursiva del método de Newton



```
function out=newton(funp, funpp, x0, tol)
```

```
x=x0;
```

```
for k=1:100
```



```
end
```

```
if k == 100
```

```
    out=[];
```

```
    disp('no converge');
```

```
end
```

```
endfunction
```

Ejemplo:  $\min e^x + 1.5x^2$

$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	<i>error</i>
0				

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}$$



Este método encuentra la parábola que pasa por tres puntos de la función y encuentra el extremo de la misma. Luego se eligen tres nuevos puntos y se repite el procedimiento hasta satisfacer la tolerancia.

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

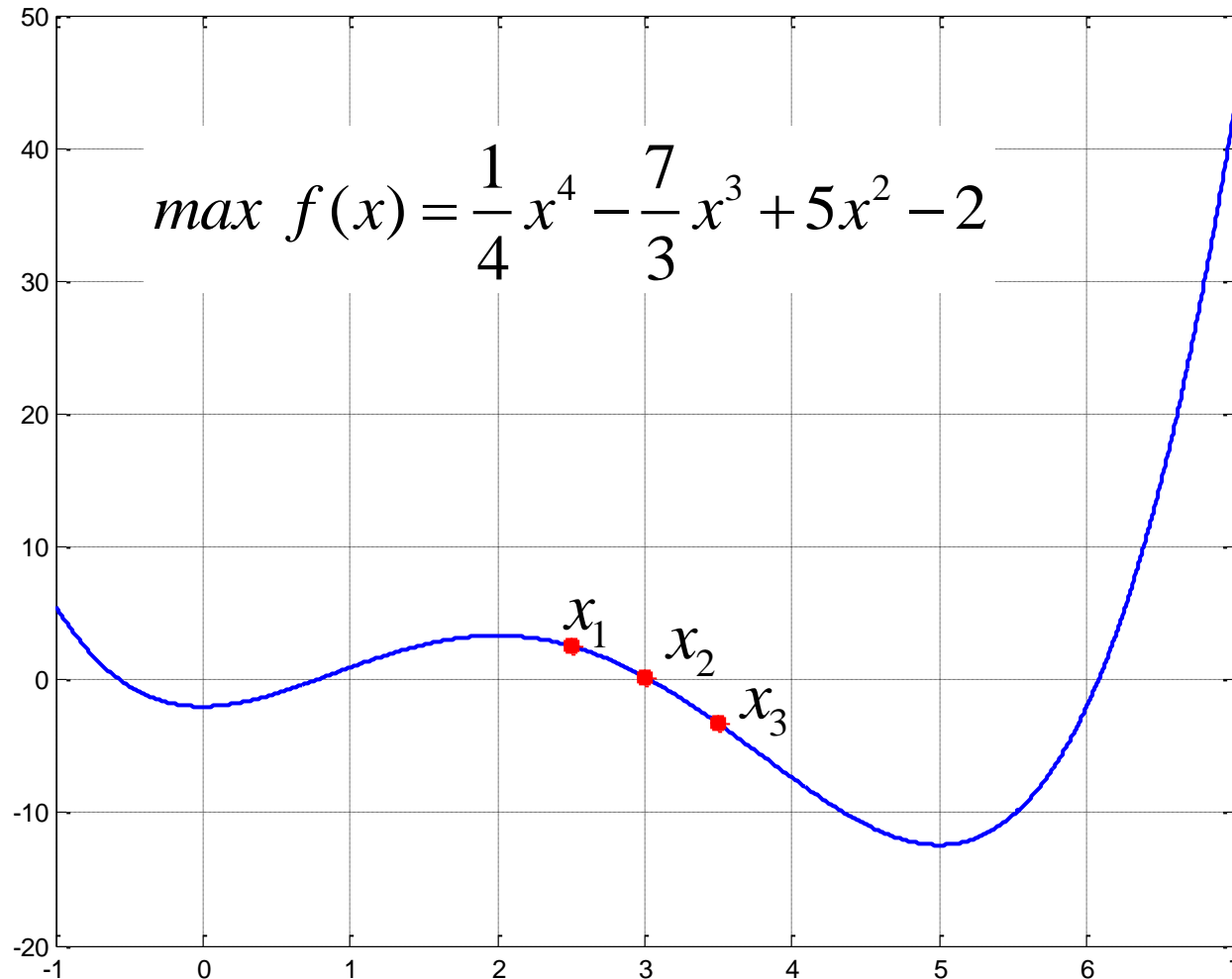
¿Cómo encontrar la parábola?

¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

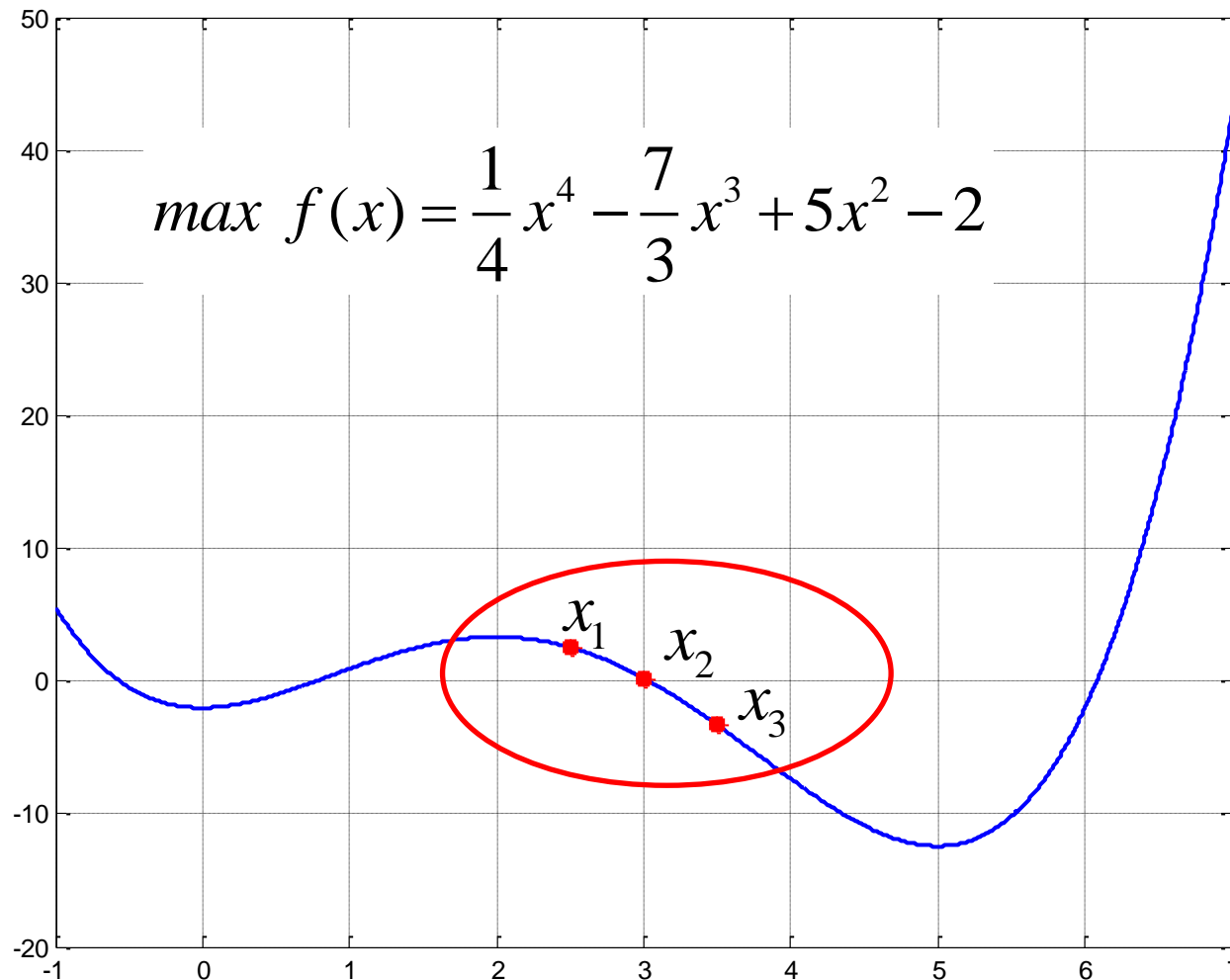
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

¿Cuál es el criterio de tolerancia?

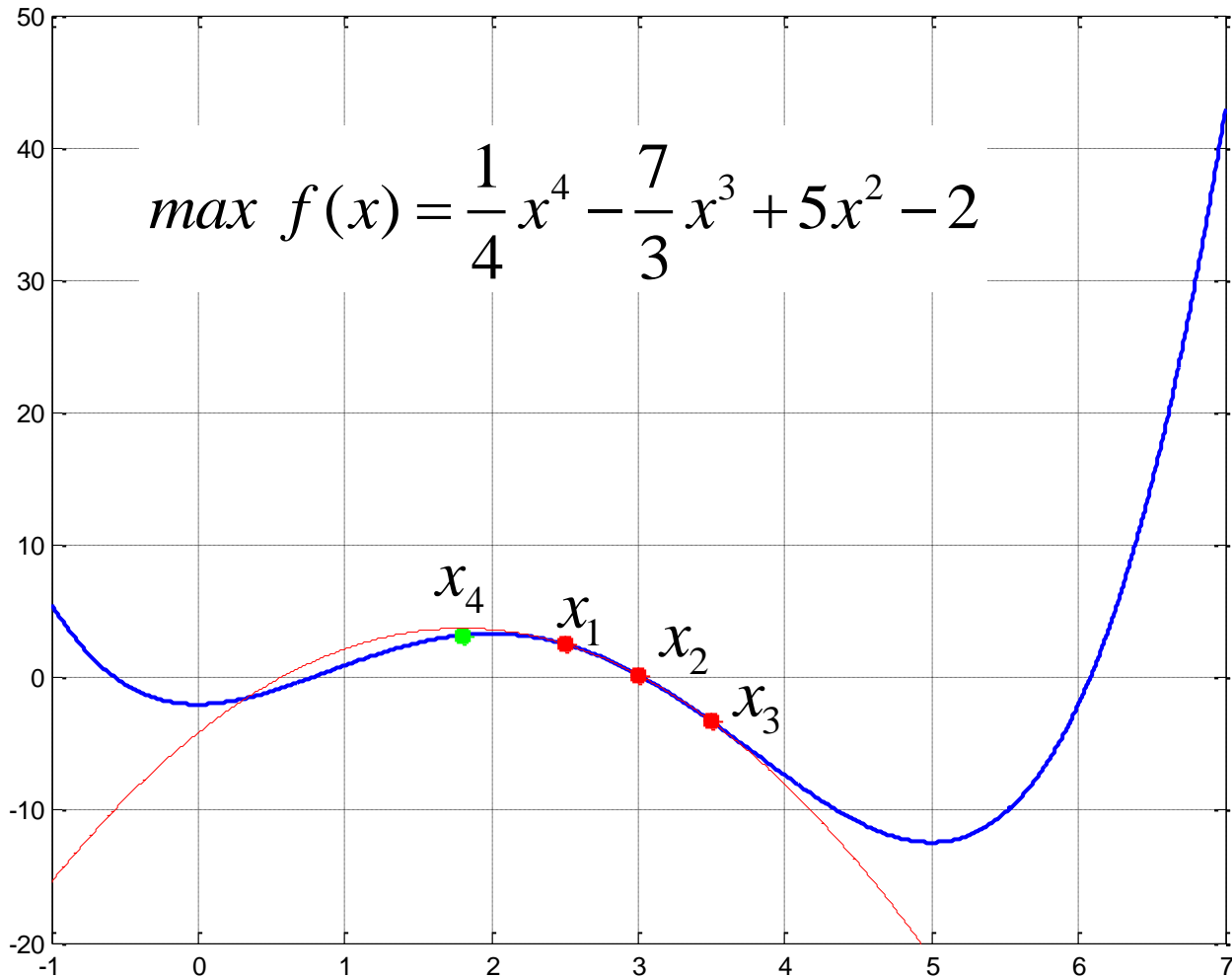
¿Cómo elegir los tres valores de arranque?



Solo necesitamos tres puntos del dominio



Encontramos la parábola que pasa por los tres puntos. El nuevo punto corresponde al **extremo** de la misma.



¿Cómo encontrar la parábola?

La parábola debe pasar por los siguientes puntos:

$$x_1 = 2.5 \quad f(x_1) = 2.55729 \quad (2.5; 2.55729)$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 0.25 \quad \longrightarrow \quad (3; 0.25)$$

$$x_3 = 3.5 \quad f(x_3) = -3.27604 \quad (3.5; -3.27604)$$

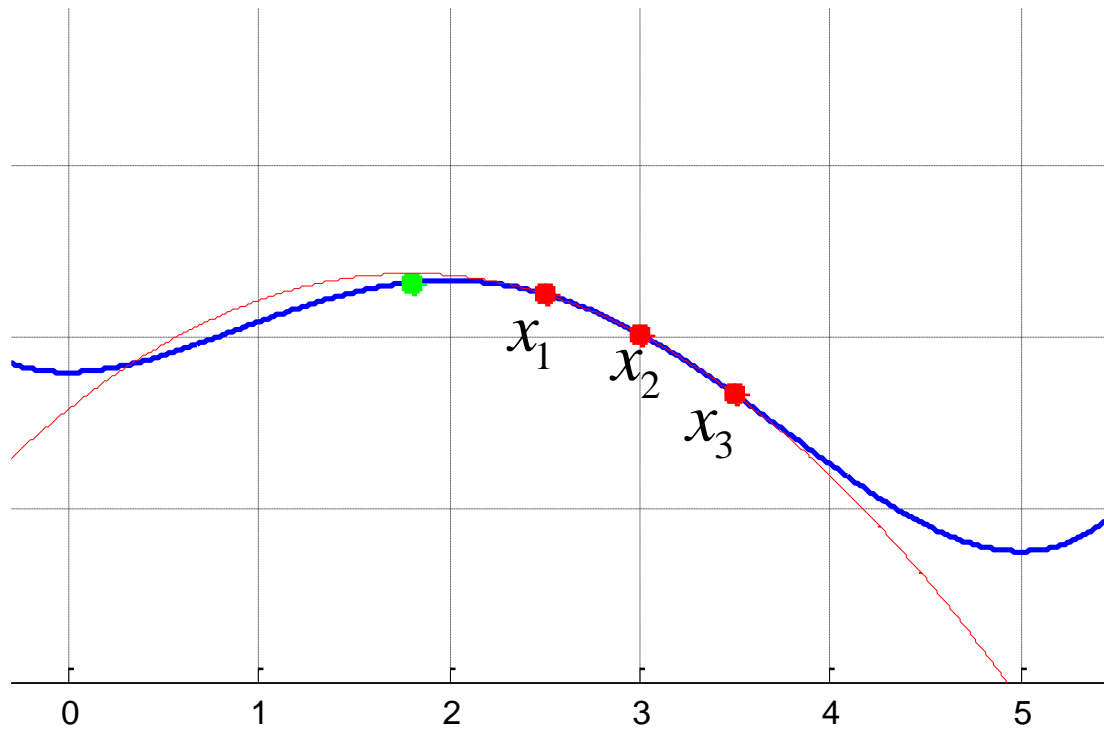
$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$  Los tres puntos deben cumplir esta ecuación

$$\begin{cases} a2.5^2 + b2.5 + c = 2.55729 \\ a3^2 + b3 + c = 0.25 \\ a3.5^2 + b3.5 + c = -3.27604 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2.5^2 & 2.5 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 3.5^2 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.55729 \\ 0.25 \\ -3.27604 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$  Sistema 3x3

$$\begin{bmatrix} 2.5^2 & 2.5 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 3.5^2 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.55729 \\ 0.25 \\ -3.27604 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Resolvemos}} \begin{matrix} a = -2.4375 \\ b = 8.791667 \\ c = -4.1875 \end{matrix}$$

$$y = -2.4375x^2 + 8.791667x - 4.1875$$

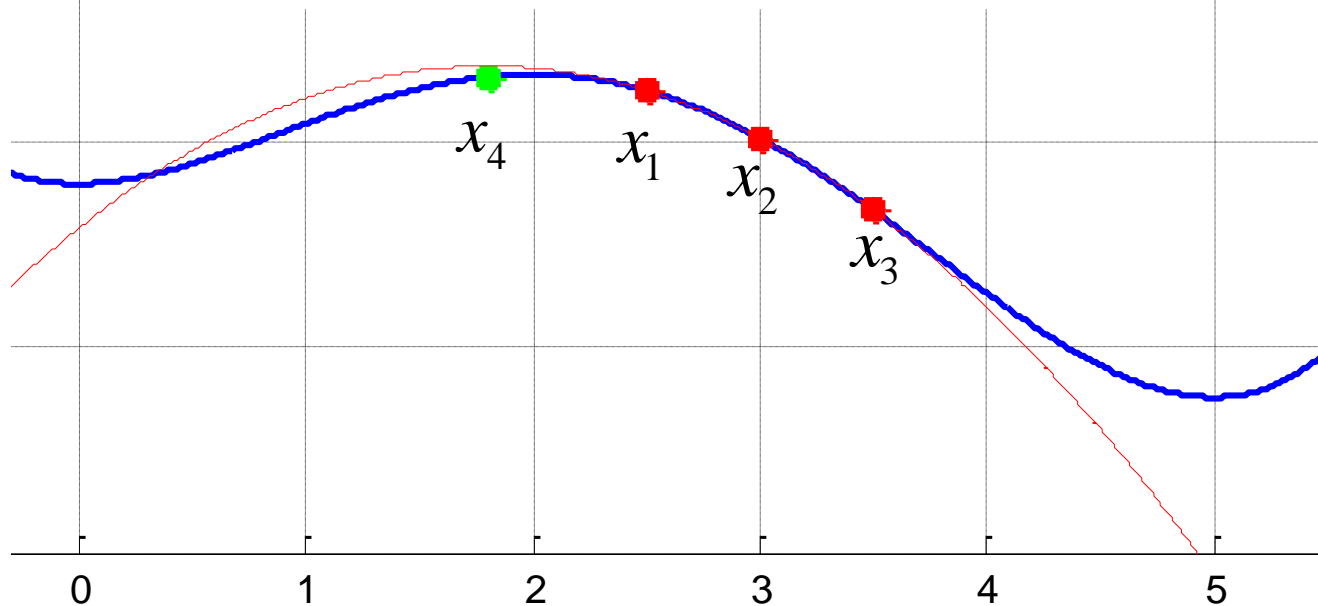


¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

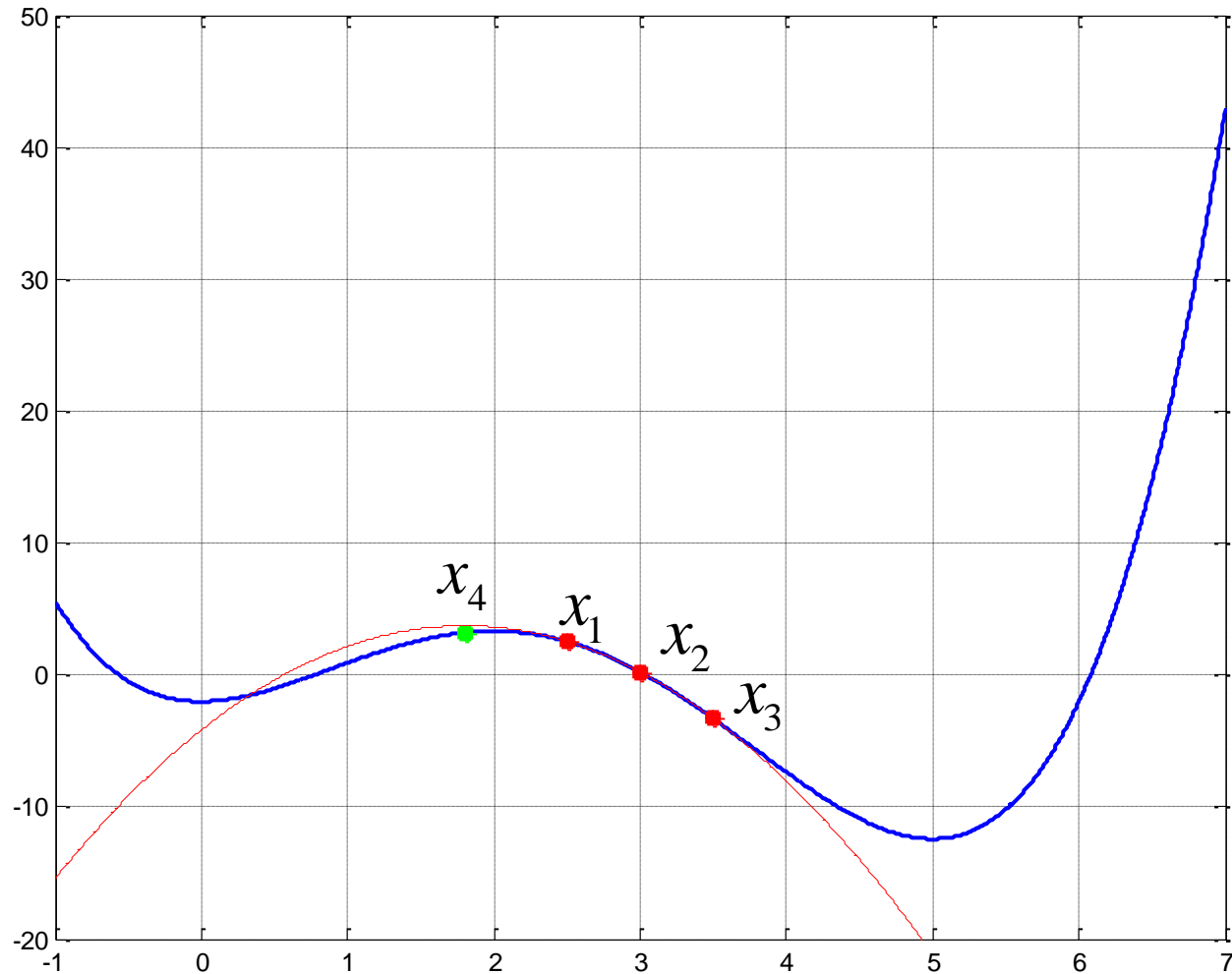
$$y = ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad y' = 2ax + b \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y' = 0$$

El nuevo punto corresponde al extremo de la parábola:

$$x_4 = -\frac{8.791667}{2(-2.4375)} = 1.803418$$

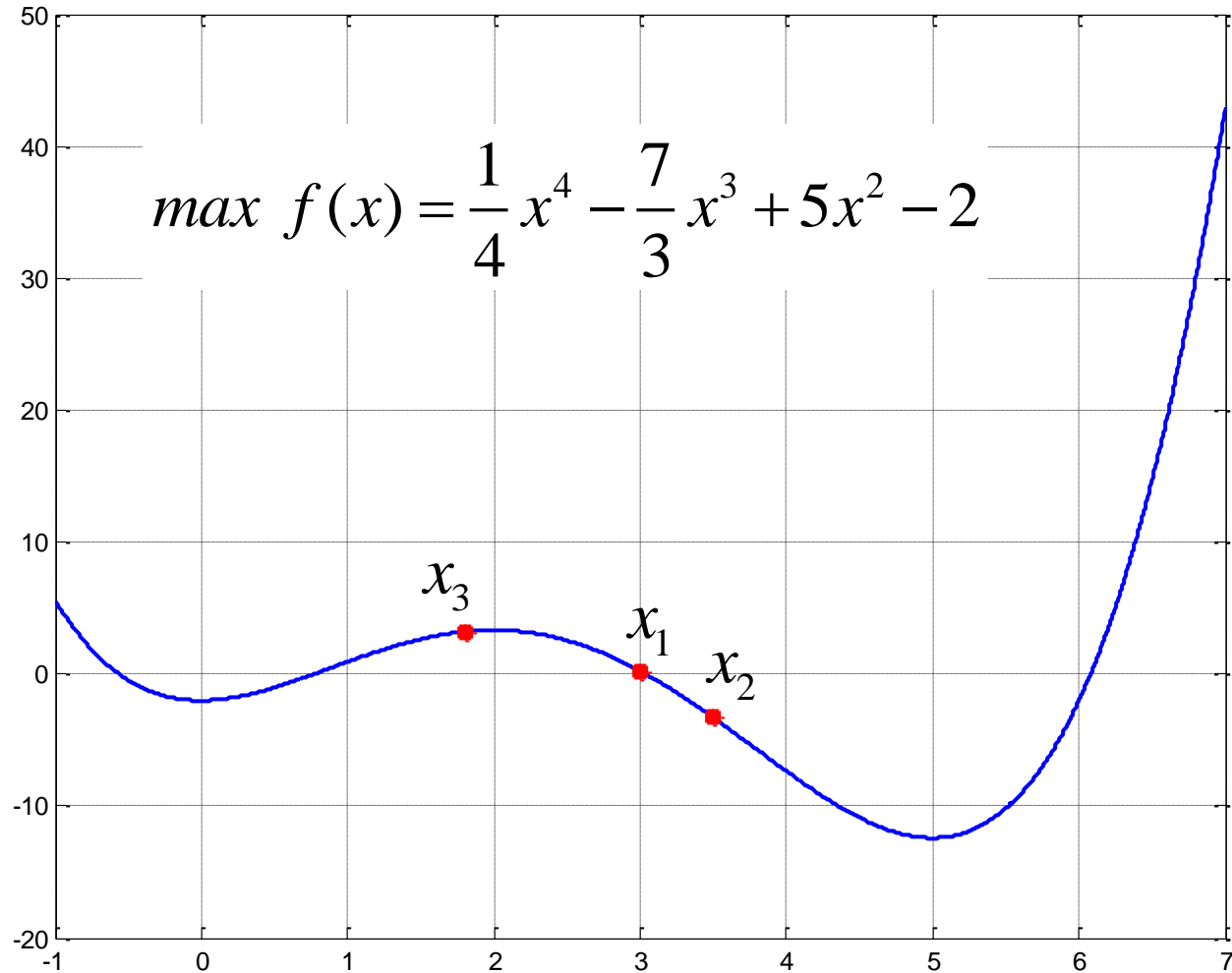


¿Cómo elijo los nuevos puntos?  
Nos quedamos con los tres últimos

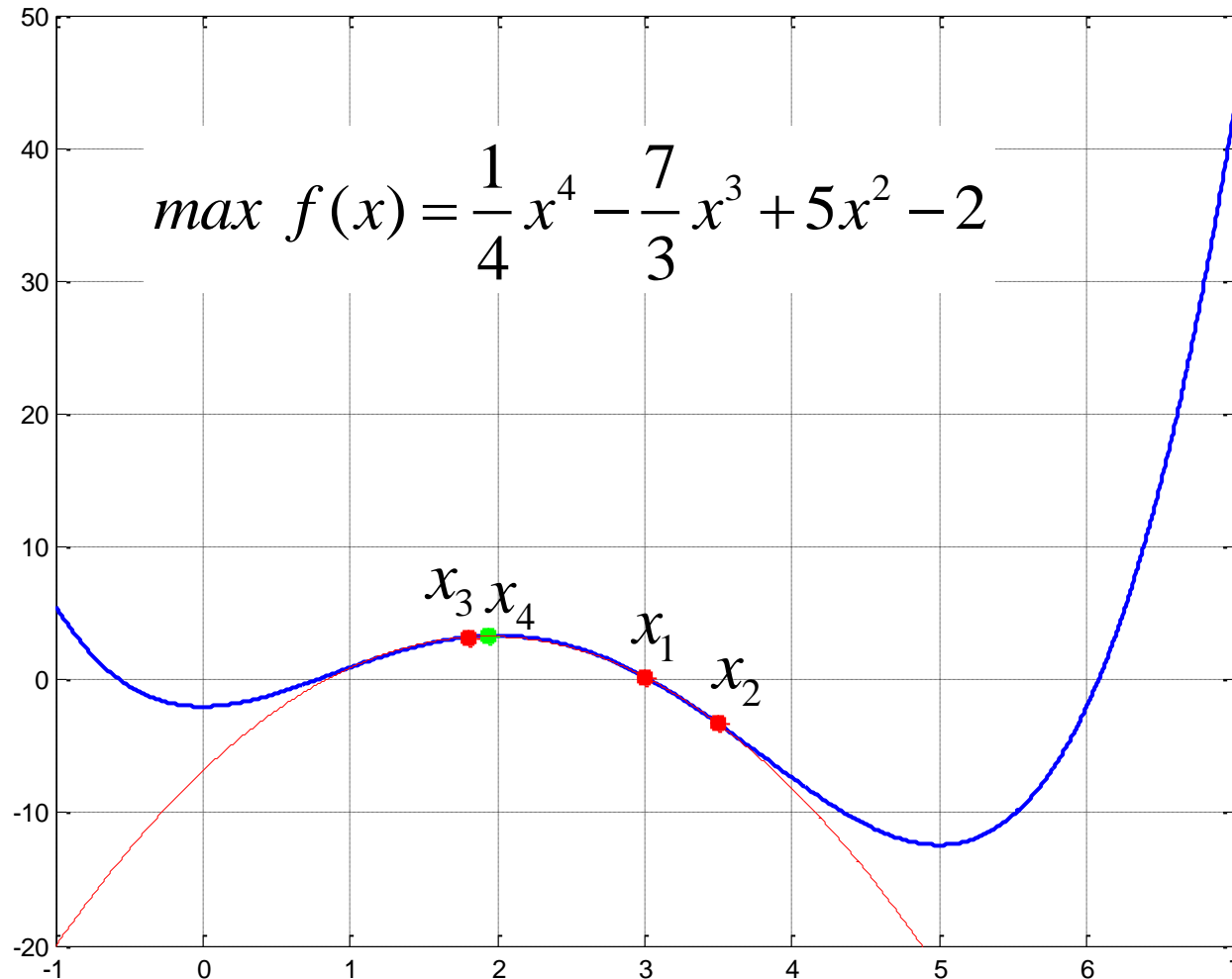




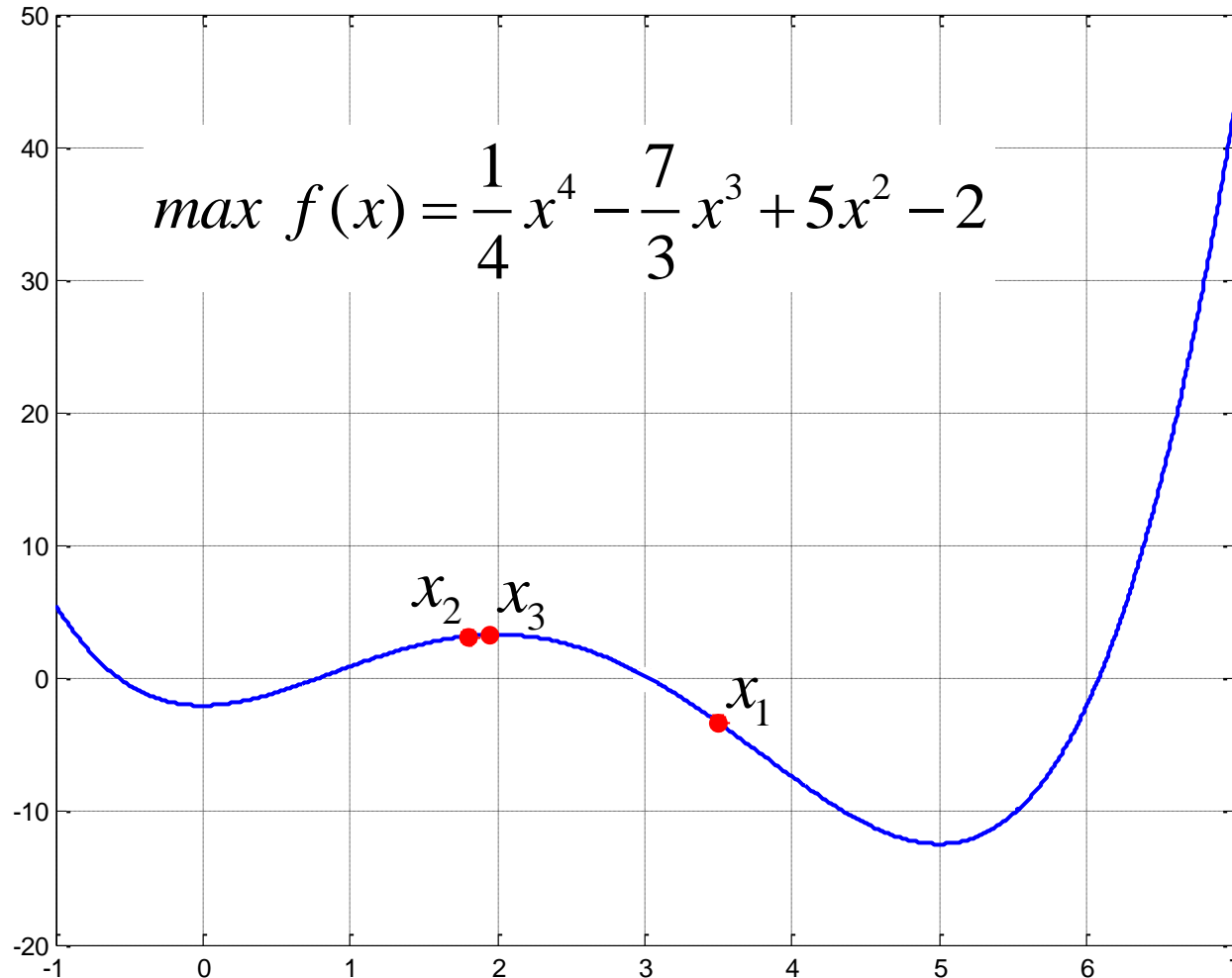
¿Cómo elijo los nuevos puntos?  
Nos quedamos con los tres últimos

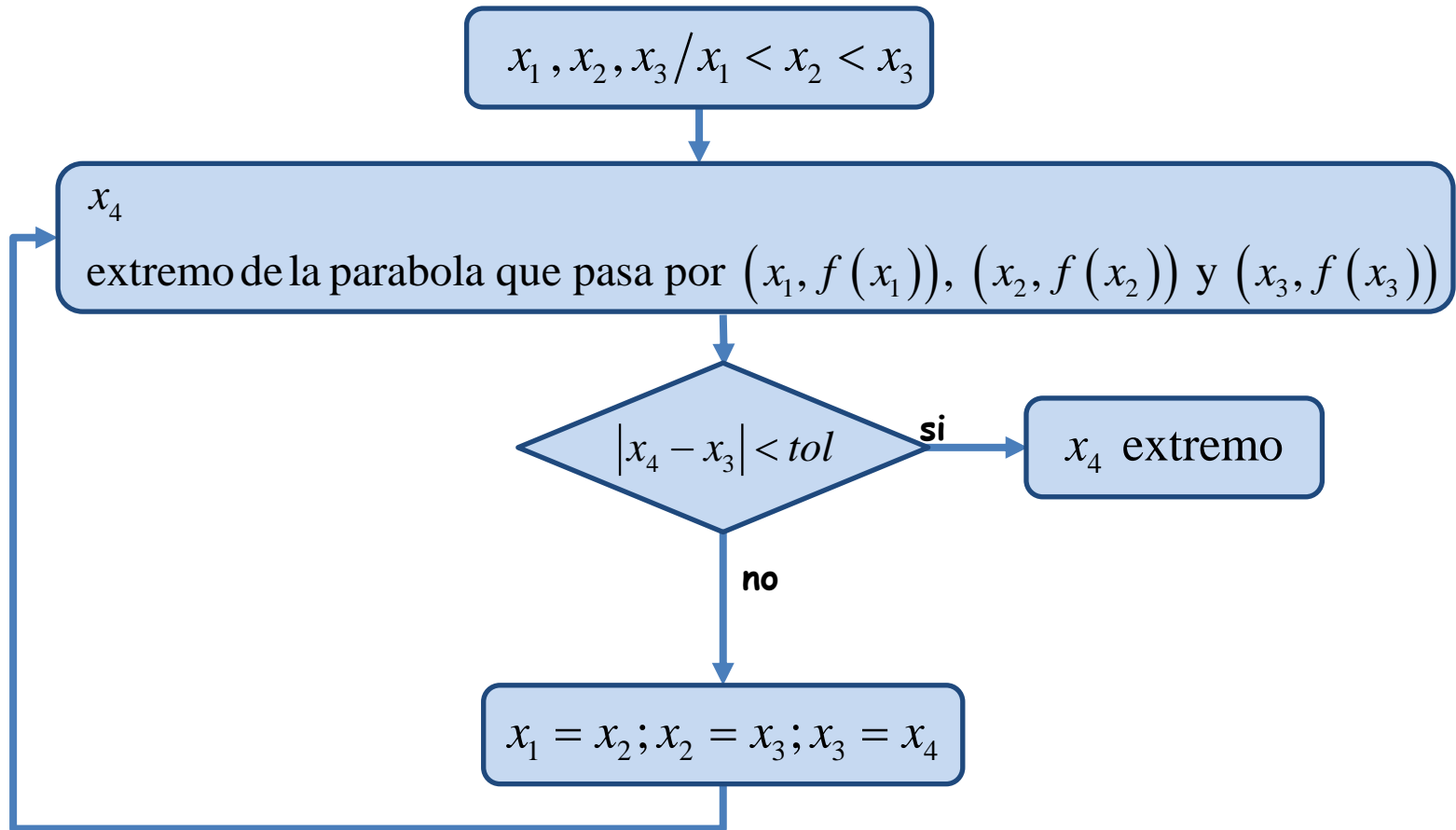


Continuamos... hasta satisfacer la tolerancia



¿Cómo elijo los nuevos puntos?  
Nos quedamos con los tres últimos





```
function xopt=parabolicas(fun, x1, x2, x3, tol)
```

```
for k= 1:100
```

```
A=[1 x1 x1^2;1 x2 x2^2;1 x3 x3^2];
```

```
b=[fun(x1);fun(x2);fun(x3)];
```

```
x=A\b;
```

```
x4=-x(2)/(2*x(3));
```

```
if abs(x4-x3) < tol
```

```
    xopt = x4;
```

```
    break
```

```
end
```

```
x1 = x2; x2 = x3; x3 = x4;
```

```
end
```

```
if k == 100
```

```
    xopt=[];
```

```
    disp('no converge');
```

```
end
```

```
endfunction
```

$x_4$

extremo de la parábola que pasa por  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$  y  $(x_3, f(x_3))$

**Tip: Existe una formula directa para el calculo del nuevo punto**

$$x_4 = \frac{f(x_1)(x_2^2 - x_3^2) + f(x_2)(x_3^2 - x_1^2) + f(x_3)(x_1^2 - x_2^2)}{2f(x_1)(x_2 - x_3) + 2f(x_2)(x_3 - x_1) + 2f(x_3)(x_1 - x_2)}$$



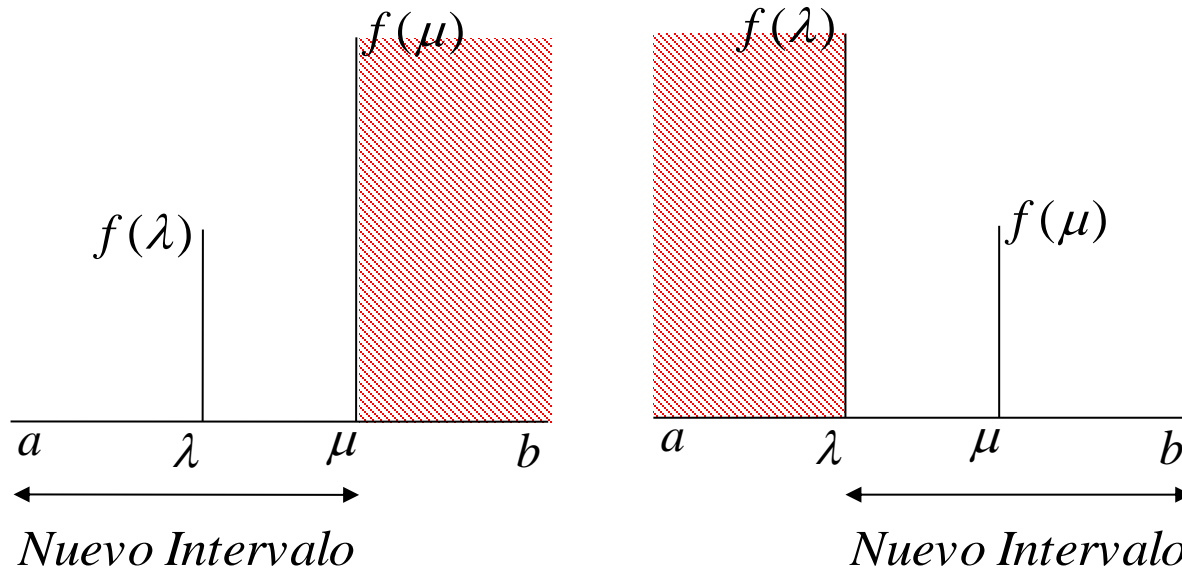
(Minimización)

Sea  $\lambda, \mu \in [a, b]$  tal que  $\lambda < \mu$

$\therefore$

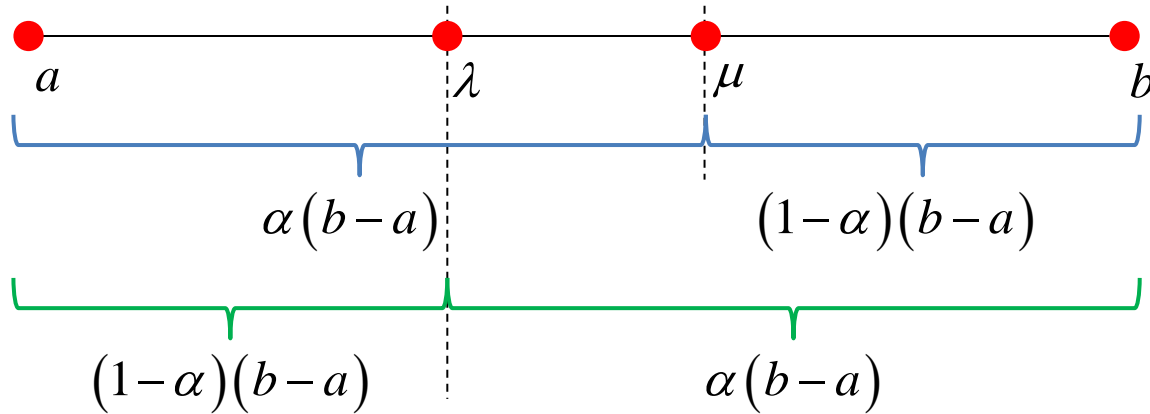
Si  $f(\lambda) < f(\mu)$ , luego  $f(x) \geq f(\lambda) \quad \forall x \in (\mu, b]$

Si  $f(\lambda) \geq f(\mu)$ , luego  $f(x) \geq f(\mu) \quad \forall x \in [a, \lambda]$





Expresamos a  $\lambda$  y  $\mu$  como una fracción  $\alpha$  del intervalo  $[a,b]$ :



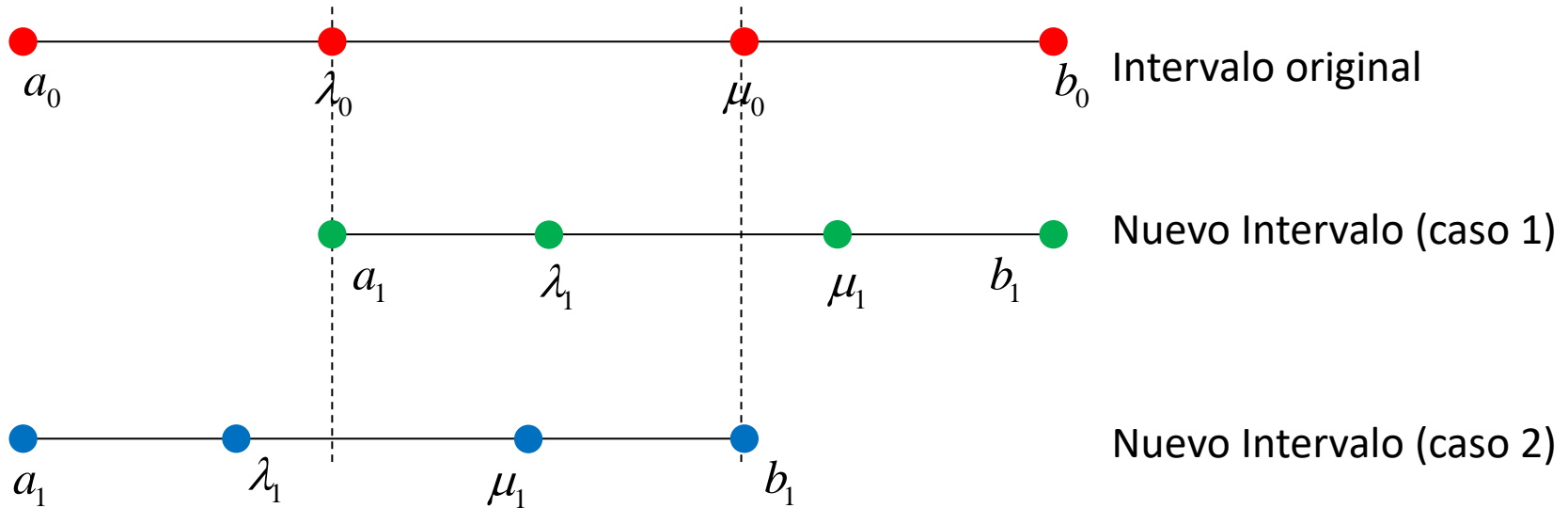
Analizando la grafica anterior encontramos las siguientes expresiones de  $\lambda$  y  $\mu$  :

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

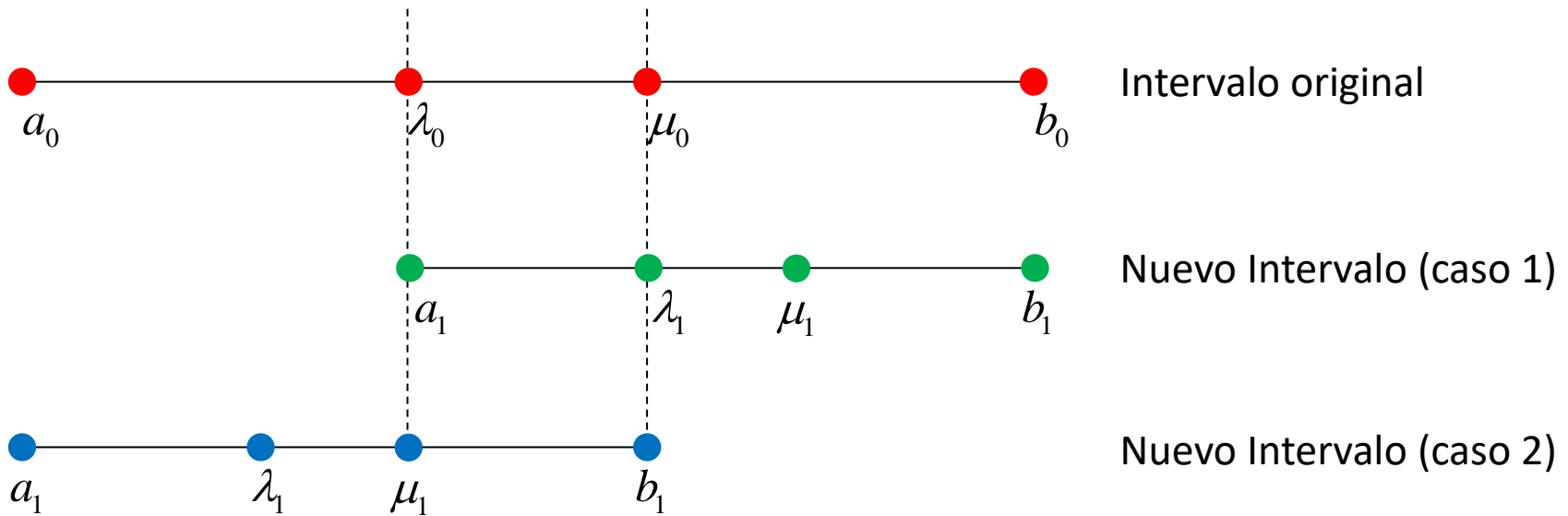
*¿ $\alpha$ ?*

Valor aleatorio:  $\alpha=0.7$ :



**No se utiliza cualquier valor** porque cada iteración requeriría calcular  $\lambda$  y  $\mu$

Buscamos  $\alpha$  de manera que se cumpla lo siguiente:

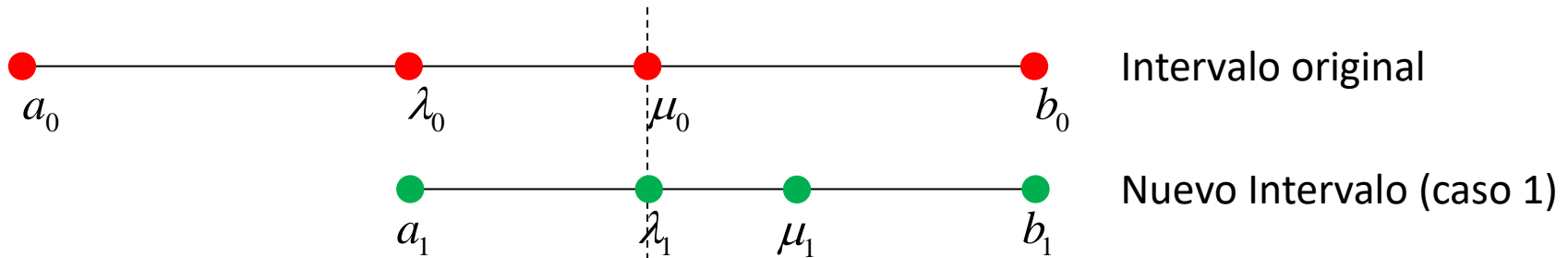


Caso 1:  $\lambda_1 = \mu_0$

Caso 2:  $\mu_1 = \lambda_0$

El valor de  $\alpha$  que estamos buscando permite que en cada iteración solo se calcule  $\lambda$  o  $\mu$

Caso 1:  $\lambda_1 = \mu_0$



$$\mu_0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)$$

$$\lambda_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$



$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$

De la grafica:

$$b_1 = b_0$$

$$a_1 = \lambda_0 = b_0 - \alpha(b_0 - a_0)$$

Reemplazando:

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha(b_0 - (b_0 - \alpha(b_0 - a_0)))$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha(b_0 - b_0 + \alpha(b_0 - a_0))$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha^2(b_0 - a_0)$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha^2(b_0 - a_0)$$

$$\cancel{\alpha^2(b_0 - a_0)} + \alpha \cancel{(b_0 - a_0)} - \cancel{(b_0 - a_0)} = 0$$

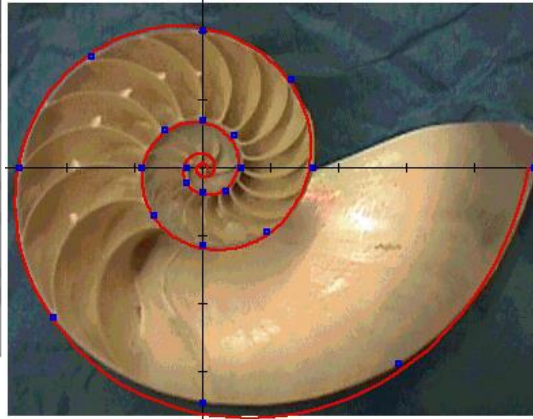
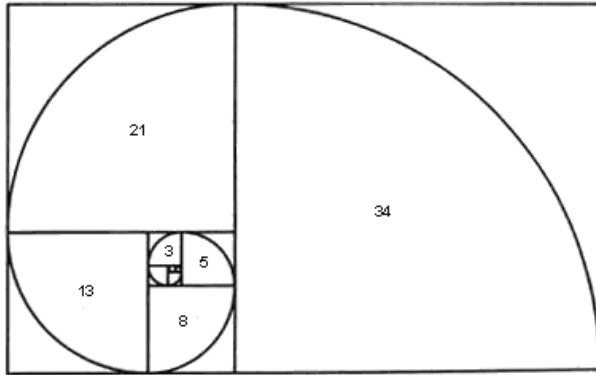
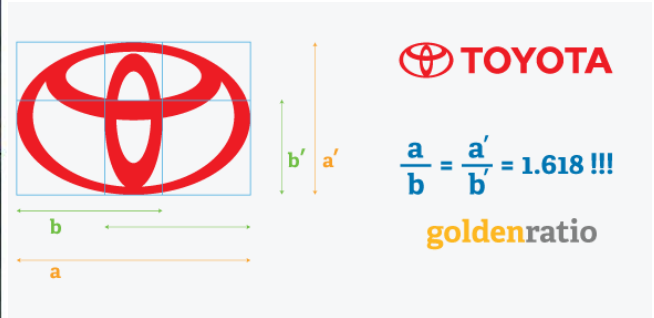
$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \begin{cases} \alpha_1 \cong 0.618 \\ \alpha_2 \cong -1.618 \end{cases}$$

**¡Encontramos el  $\alpha$ !**

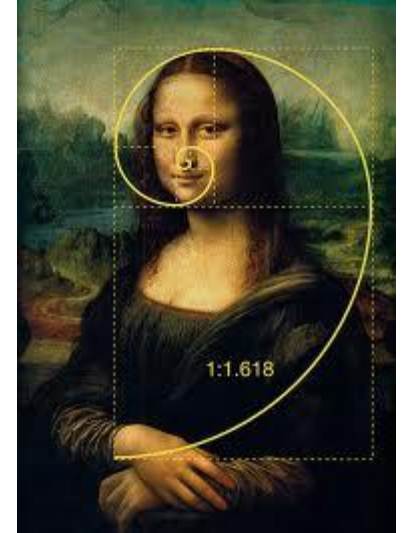
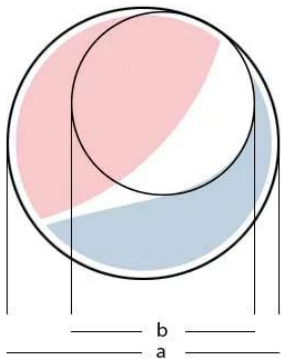
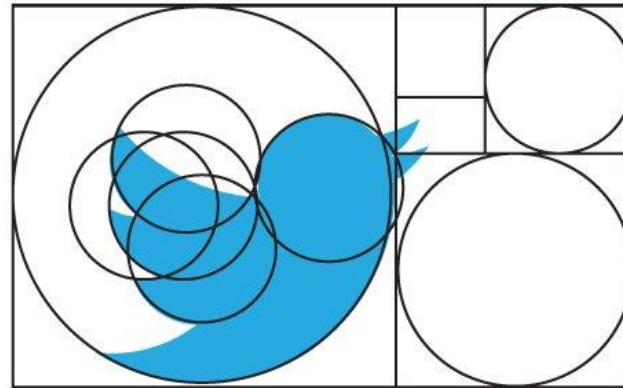
Analizando el Caso 2 se llega a la misma conclusión

$$\alpha \cong 0.618034$$

# Golden Ratio

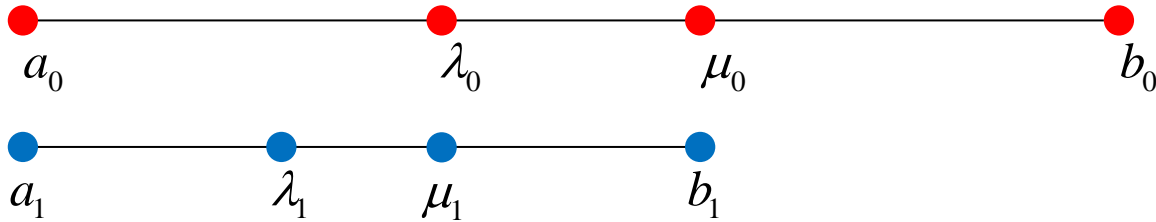



The Toyota logo is shown within a blue rectangle. Dimensions are labeled: 'b' for the width of the rectangle, 'a' for the width of the logo, 'b'' for the height of the rectangle, and 'a'' for the height of the logo. To the right, the Toyota logo is shown in red with the word "TOYOTA" in red. Below it, the equation  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = 1.618 !!!$  is displayed, followed by the text "goldenratio".



(Minimización)

Si  $f(\lambda) < f(\mu)$

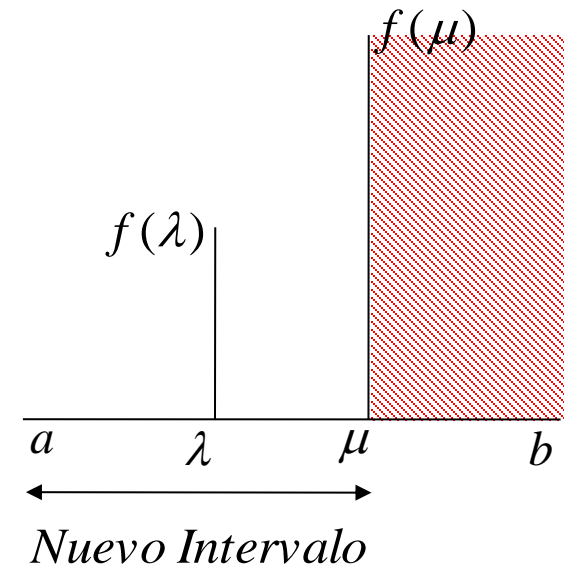


$$a_1 = a_0$$

$$b_1 = \mu_0$$

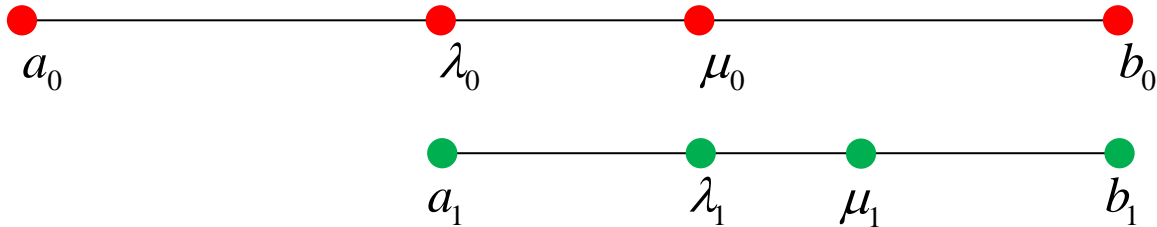
$$\mu_1 = \lambda_0$$

$$\lambda_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$



(Minimización)

Si  $f(\lambda) \geq f(\mu)$

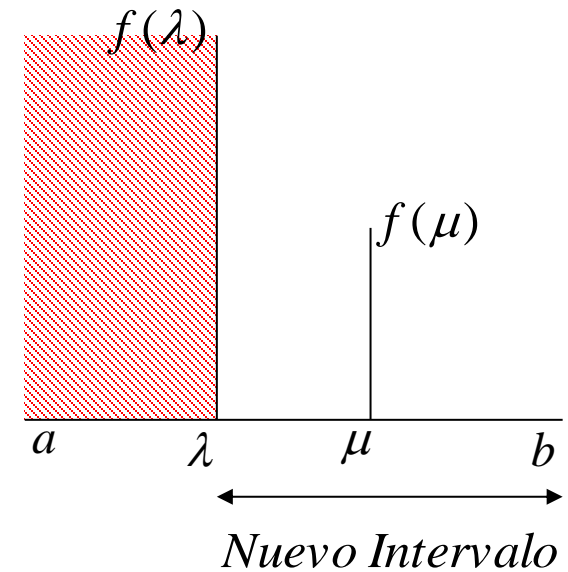


$$a_1 = \lambda_0$$

$$b_1 = b_0$$

$$\lambda_1 = \mu_0$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$$





$[a, b]$  intervalo de búsqueda original

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$|a - b| < tol$

si

extremo

no

$f(\lambda) < f(\mu)$

no

si

$$a = \lambda$$

$$b = b$$

$$\lambda = \mu$$

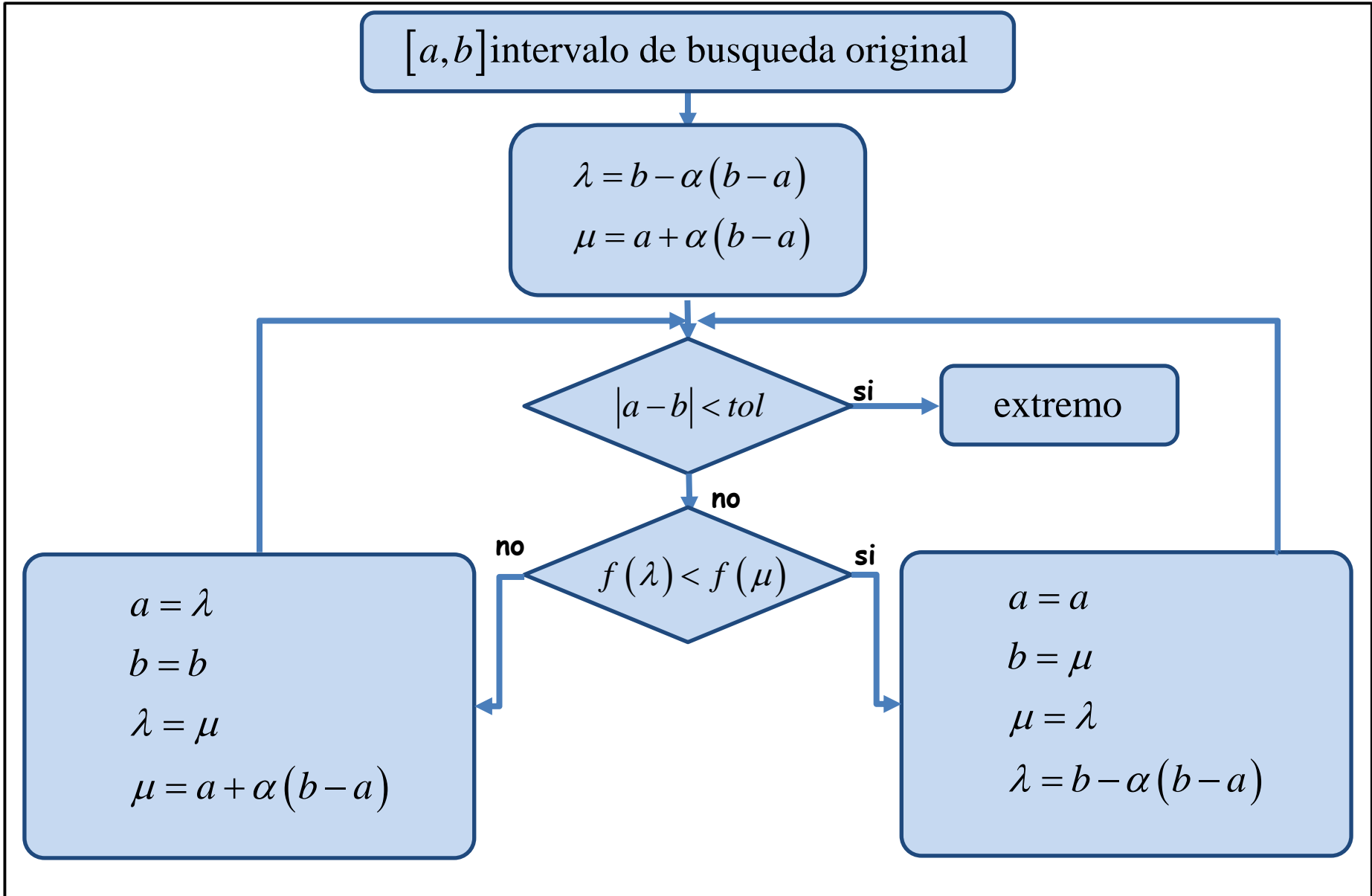
$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

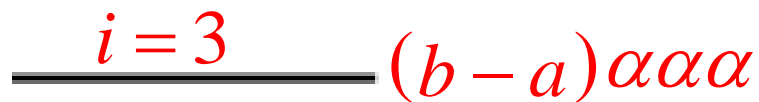
$$a = a$$

$$b = \mu$$

$$\mu = \lambda$$

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$





El tamaño del intervalo siempre se reduce en la misma proporción  
¿Cuál es el tamaño del intervalo en la iteración  $k$  ?

$$(b - a)\alpha^k$$

La relación del tamaño del intervalo con el número de iteración nos sirve para conocer de antemano cuantas iteraciones debemos realizar.

Es decir, en la iteración  $N$  el tamaño del intervalo debe ser igual a la tolerancia deseada.

$$tol = (b - a) \alpha^N$$

Ejemplo:

Encontrar el número de iteraciones necesarias comenzando en el intervalo  $[5 \ 6]$  adoptando una tolerancia de  $tol=10^{-5}$ .

$$tol = (b - a) \alpha^N \Rightarrow 10^{-5} = (b - a) \alpha^N$$

$$-5 = \log_{10}(6 - 5) + N \log_{10} \alpha$$

$$N = \frac{-5 - \log_{10}(6 - 5)}{\log_{10} 0.618034} \Rightarrow N = 23.9248... \\ (24 \text{ iteraciones})$$

$[a, b]$  intervalo de búsqueda original;  $k = 0$

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$$N = \lceil (\log(tol) - \log(b - a)) / \log 0.618034 \rceil$$

$k = N$

si extremo

no

$$a = \lambda$$

$$b = b$$

$$\lambda = \mu$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$$k = k + 1$$

$f(\lambda) < f(\mu)$

no

si

$$a = a$$

$$b = \mu$$

$$\mu = \lambda$$

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$k = k + 1$$

```
function xopt=mingoldenratio(fun, a, b, tol)
```

```
  alfa = 2/(sqrt(5)+1);
```

```
  l = b - alfa*(b-a);
```

```
  m = a + alfa*(b-a);
```

```
  fl = fun(l);
```

```
  fm = fun(m);
```

```
  N = ceil((log(tol)-log(b-a))/log(alfa));
```

```
  for k= 1:N
```

```
    if fl < fm
```

```
      b=m; m=l; l = b - alfa*(b-a);
```

```
      fm=fl; fl=fun(l);
```

```
    else
```

```
      a=l; l=m; m = a + alfa*(b-a);
```

```
      fl=fm; fm=fun(m);
```

```
    end
```

```
  end
```

```
  if fl < fm
```

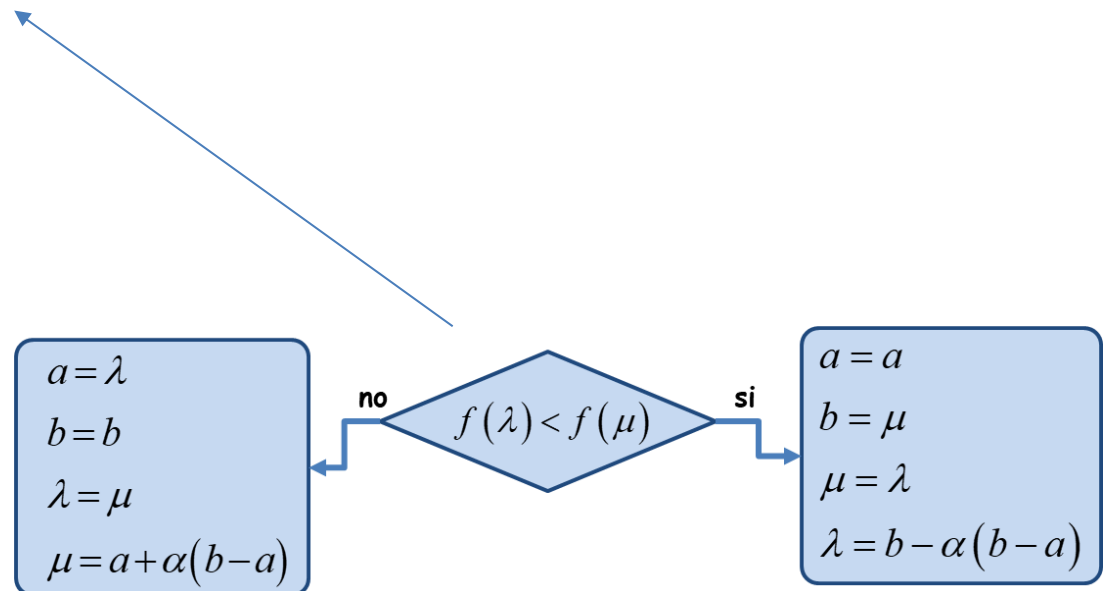
```
    xopt=l
```

```
  else
```

```
    xopt=m
```

```
  end
```

```
endfunction
```









Ejemplo:  $\min \frac{x^2}{10} - 2\text{sen}(x)$

$a$	$\lambda$	$\mu$	$b$	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
0	1.528	2.472	4	-1.76469035	-0.6302549
0	0.944304	1.528	2.472	-1.53100712	-1.76469035
0.944304	1.528	1.88842013	2.472	-1.76469035	-1.54334736
0.944304	1.30495636	1.528	1.88842013	-1.75945322	-1.76469035
1.30495636	1.528	1.66553697	1.88842013	-1.76469035	-1.71362958
1.30495636	1.44269815	1.528	1.66553697	-1.77547549	-1.76469035

# Plantear Caso de Maximización

