

Unidad 2: Eliminación Gaussiana

Profesor: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

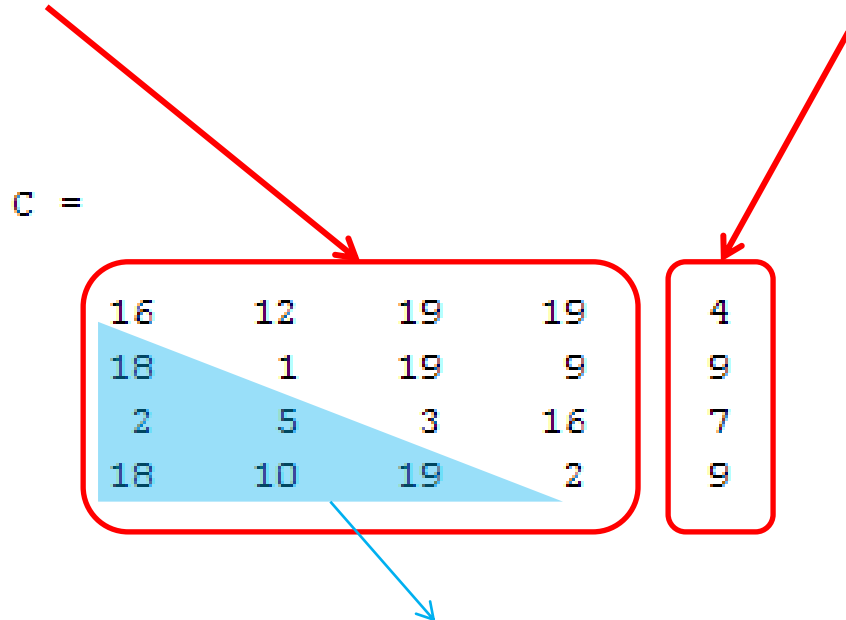
A =

16	12	19	19
18	1	19	9
2	5	3	16
18	10	19	2

b =

4
9
7
9

C =



16	12	19	19	4
18	1	19	9	9
2	5	3	16	7
18	10	19	2	9

Debemos trabajar la matriz para que estos elementos tomen el valor cero

~~| | | | | |
|----|----|----|----|---|
| 16 | 12 | 19 | 19 | 4 |
| 18 | 1 | 19 | 9 | 9 |
| 2 | 5 | 3 | 16 | 7 |
| 18 | 10 | 19 | 2 | 9 |~~

18	1	19	9	9
18	16	12	19	19
16	16	12	19	19

Coeficiente o pivote

Ecuación (o fila) pivote

0 -12.5000 -2.3750 -12.3750 4.5000

C =

16	12	19	19	4
18	1	19	9	9
2	5	3	16	7
18	10	19	2	9



C =

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	3.5000	0.6250	13.6250	6.5000
0	-3.5000	-2.3750	-19.3750	4.5000

$$C(1,:) = C(1, :)$$

Fila 1

$$C(2,:) = C(2, :) - \frac{C(2,1)}{C(1,1)} C(1, :)$$

Fila 2

$$C(3,:) = C(3, :) - \frac{C(3,1)}{C(1,1)} C(1, :)$$

Fila 3

$$C(4,:) = C(4, :) - \frac{C(4,1)}{C(1,1)} C(1, :)$$

Fila 4

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	3.5000	0.6250	13.6250	6.5000
0	-3.5000	-2.3750	-19.3750	4.5000

0	3.5000	0.6250	13.6250	6.5000
---	--------	--------	---------	--------

-
 3.5000

 -12.5000

0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
---	----------	---------	----------	--------

0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600
---	---------	---------	---------	--------

C =

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	3.5000	0.6250	13.6250	6.5000
0	-3.5000	-2.3750	-19.3750	4.5000



C =

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0.0000	-1.7100	-15.9100	3.2400

$$C(1,:) = C(1,:)$$

Fila 1

$$C(2,:) = C(2,:)$$

Fila 2

$$C(3,:) = C(3,:) - \frac{C(3,2)}{C(2,2)} C(2,:)$$

Fila 3

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,2)}{C(2,2)} C(2,:)$$

Fila 4

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0.0000	-1.7100	-15.9100	3.2400

	0	0.0000	-1.7100	-15.9100	3.2400
-					
-1.7100					

-0.0400	0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600

	0	0.0000	0.0000	-450.2500	-328.5000

C =

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0.0000	-1.7100	-15.9100	3.2400



C =

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0.0000	0.0000	-450.2500	-328.5000

$$C(1,:) = C(1,:)$$

Fila 1

$$C(2,:) = C(2,:)$$

Fila 2

$$C(3,:) = C(3,:)$$

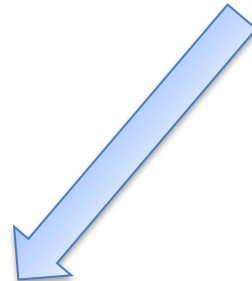
Fila 3

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,3)}{C(3,3)} C(3,:)$$

Fila 4

C =

16	12	19	19	4
18	1	19	9	9
2	5	3	16	7
18	10	19	2	9



C =

16.0000	12.0000	19.0000	19.0000	4.0000
0	-12.5000	-2.3750	-12.3750	4.5000
0	-0.0000	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0.0000	0.0000	-450.2500	-328.5000

$$C(1,:) = C(1,:)$$

1

$$C(2,:) = C(2,:) - \frac{C(2,1)}{C(1,1)} C(1,:)$$

$$C(3,:) = C(3,:) - \frac{C(3,1)}{C(1,1)} C(1,:)$$

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,1)}{C(1,1)} C(1,:)$$

$$C(1,:) = C(1,:)$$

2

$$C(2,:) = C(2,:)$$

$$C(3,:) = C(3,:) - \frac{C(3,2)}{C(2,2)} C(2,:)$$

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,2)}{C(2,2)} C(2,:)$$

$$C(1,:) = C(1,:)$$

3

$$C(2,:) = C(2,:)$$

$$C(3,:) = C(3,:)$$

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,3)}{C(3,3)} C(3,:)$$

$$C(j,:) = C(j,:) - \frac{C(j,i)}{C(i,i)} C(i,:)$$

$$C(1,:) = C(1,)$$

$$C(2,:) = C(2,:) - \frac{C(2,1)}{C(1,1)} C(1,)$$

i=1

$$C(3,:) = C(3,:) - \frac{C(3,1)}{C(1,1)} C(1,)$$

j=2,3 y 4

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,1)}{C(1,1)} C(1,)$$

$$C(1,:) = C(1,)$$

$$C(2,:) = C(2,)$$

i=2

$$C(3,:) = C(3,:) - \frac{C(3,2)}{C(2,2)} C(2,)$$

j=3 y 4

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,2)}{C(2,2)} C(2,)$$

$$C(1,:) = C(1,)$$

$$C(2,:) = C(2,)$$

i=3

$$C(3,:) = C(3,)$$

j=4

$$C(4,:) = C(4,:) - \frac{C(4,3)}{C(3,3)} C(3,)$$

```

for i=1:3
    for j=i+1:4
        C(j,:) = C(j,:) - (C(j,i)/C(i,i)) * C(i,:);
    end
end

```

```
for i=1:3          Nuestro ejemplo era 4x4
    for j=i+1:4
        C(j,:)=C(j,:)-(C(j,i)/C(i,i))*C(i,:);
    end
end
```

```
for i=1:f-1
    for j=i+1:f
        C(j,:)=C(j,:)-(C(j,i)/C(i,i))*C(i,:);
    end
end
```



```

function [D, e]=gaussiana(A, b)
[f c]=size(A);
C=[A,b];
for i=1:f-1
    for j=i+1:f
        C(j,:)=C(j,:)-(C(j,i)/C(i,i))*C(i,:);
    end
end
D=C(:, [1:c]);
e=C(:, c+1);
endfunction

```

```

function [D, e]=gaussianaBis(A, b)
    [f c]=size(A);
    C=[A,b];
    for i=1:f-1
        for j=i+1:f
            C(j,[i+1:c+1]) = C(j,[i+1:c+1])-(C(j,i)/C(i,i))*C(i,[i+1:c+1]);
        end
        C([i+1:f],i)=0;
    end
    D=C(:,[1:c]);
    e=C(:,c+1);
endfunction

```

$A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 19 & 19 \\ 18 & 1 & 19 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 16 \\ 18 & 10 & 19 & 2 \end{bmatrix};$
 $b = [4 \ 9 \ 7 \ 9]';$

$[A \ b] = \text{gaussiana}(A, b)$

$A =$
 16. 12. 19. 19.
 0. -12.5 -2.375 -12.375
 0. -4.441D-16 -0.04 10.16
 0. 1.943D-14 2.220D-16 -450.25
 $b =$
 4.
 4.5
 7.76
 -328.50000

$A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 19 & 19 \\ 18 & 1 & 19 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 16 \\ 18 & 10 & 19 & 2 \end{bmatrix};$

$b = [4 \ 9 \ 7 \ 9]';$

$[A \ b] = \text{gaussianaBis}(A, b)$

$A =$

16.	12.	19.	19.
0.	-12.5	-2.375	-12.375
0.	0.	-0.04	10.16
0.	0.	0.	-450.25

$b =$

4.
4.5
7.76
-328.50000

- Muchos SEAL se pueden resolver con la eliminación Gaussiana simple, pero existen algunas dificultades.
- El método de eliminación analizado se denomina “simple” porque durante las fases de eliminación es posible que ocurra una división entre cero y no se definieron mecanismos para evitarlo.
- Conforme el sistema se vuelve más grande, el tiempo de cálculo aumenta enormemente. La cantidad de operaciones aumenta casi tres órdenes de magnitud por cada orden de aumento de la dimensión.

- Antes de realizar un paso en la eliminación, resulta conveniente determinar el coeficiente más grande disponible en la columna debajo del elemento pivote.
- Las filas se pueden intercambiar de manera que el elemento más grande sea el elemento pivote; esto se conoce como ***pivoteo parcial***.
- Al procedimiento, donde tanto en las columnas como en las filas se busca el elemento más grande y luego se intercambian, se le conoce como ***pivoteo completo***.
- Los programas computacionales de uso general deben tener una estrategia de pivoteo (al menos parcial).

C =

16.	12.	19.	19.	4.
18.	1.	19.	9.	9.
2.	5.	3.	16.	7.
18.	10.	19.	2.	9.

Debemos elegir el mas grande (en valor absoluto) de los pivotes disponibles
Intercambiamos la fila 1 por la 2 y continuamos de manera tradicional

C =

18.	1.	19.	9.	9.
16.	12.	19.	19.	4.
2.	5.	3.	16.	7.
18.	10.	19.	2.	9.



C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.111111	2.111111	11.	-4.
0.	4.8888889	0.8888889	15.	6.
0.	9.	0.	-7.	0.

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.111111	2.11111111	11.	-4.
0.	4.88888889	0.88888889	15.	6.
0.	9.	0.	-7.	0.

**Debemos elegir el mas grande (en valor absoluto) de los pivotes disponibles
Sin modificaciones y continuamos de manera tradicional**

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-0.04	10.16	7.76
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-0.04	10.16	7.76
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24

Debemos elegir el mas grande (en valor absoluto) de los pivotes disponibles
Intercambiamos la fila 3 por la 4 y continuamos de manera tradicional

c =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24
0.	0.	-0.04	10.16	7.76



C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24
0.	0.	0.	10.532164	7.6842105

C = Con pivoteo

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24
0.	0.	0.	10.532164	7.6842105

C = Sin pivoteo

16.	12.	19.	19.	4.
0.	-12.5	-2.375	-12.375	4.5
0.	0.	-0.04	10.16	7.76
0.	0.	0.	-450.25	-328.5

- Antes de la primera eliminación ($i=1$) buscamos el coeficiente de mayor magnitud en la primera columna (completa) y lo ubicamos como pivote.

C =

16.	12.	19.	19.	4.
18.	1.	19.	9.	9.
2.	5.	3.	16.	7.
18.	10.	19.	2.	9.

C =

18.	1.	19.	9.	9.
16.	12.	19.	19.	4.
2.	5.	3.	16.	7.
18.	10.	19.	2.	9.

- Antes de la segunda eliminación ($i=2$) buscamos el coeficiente de mayor magnitud en la segunda columna pero ahora a partir de la segunda posición y lo ubicamos como pivote.

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.111111	2.11111111	11.	-4.
0.	4.8888889	0.8888889	15.	6.
0.	9.	0.	-7.	0.

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.111111	2.11111111	11.	-4.
0.	4.8888889	0.8888889	15.	6.
0.	9.	0.	-7.	0.

- De manera similar, previo a la tercera eliminación ($i=3$) buscamos el coeficiente de mayor magnitud en la tercera columna (a partir de la tercera posición) y lo ubicamos como pivote.

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-0.04	10.16	7.76
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24
0.	0.	-0.04	10.16	7.76

- Por lo tanto, previo a la eliminación número i se busca el coeficiente de mayor magnitud del vector extraído de la columna i desde la fila i hasta la última (fila f).

$$[\text{big } p] = \max(\text{abs}(\mathbf{C}([\mathbf{i}:f], \mathbf{i})));$$

- Ejemplo I ($i=1$):

C =

16.	12.	19.	19.	4.
18.	1.	19.	9.	9.
2.	5.	3.	16.	7.
18.	10.	19.	2.	9.

big=18

p=2

Intercambiamos la fila 1 con la 2

- Por lo tanto, previo a la eliminación número i se busca el coeficiente de mayor magnitud del vector extraído de la columna i desde la fila i hasta la última (fila f).

$$[\text{big } p] = \max(\text{abs}(\mathbf{C}([i:f], i)));$$

- Ejemplo II ($i=3$): Intercambiamos la fila i por la $i+p-1$

C =

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-0.04	10.16	7.76
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24

¿Cuándo?
Solo si $p > 1$

big=1.71 Intercambiamos la fila 3 con la 4

$p = 2$ ¿Cómo se relaciona p con la fila a intercambiar?

```
function C=pivoteoparcial(C, i)
    [f c]=size(C);
    [big p] = max(abs(C([i:f],i)));
    if p > 1
        dummy = C;
        C(i,:) = dummy(i+p-1,:);
        C(i+p-1,:)= dummy(i,:);
    end
endfunction
```



```
function [D, e]=gaussianaPP(A, b)
    [f c]=size(A);
    C=[A,b];
    for i=1:f-1
        for j=i+1:f
            C(j,[i+1:c+1]) = C(j,[i+1:c+1])-(C(j,i)/C(i,i))*C(i,[i+1:c+1]);
        end
        C([i+1:f],i)=0;
    end
    D=C(:,[1:c]);
    e=C(:,c+1);
endfunction
```

¿Dónde introducimos la función para el pivoteo parcial?
Completar...

$A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 19 & 19 \\ 18 & 1 & 19 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 16 \\ 18 & 10 & 19 & 2 \end{bmatrix};$

$b = [4 \ 9 \ 7 \ 9]';$

$[D, e] = \text{gaussianaPP}(A, b)$

D =

18.	1.	19.	9.
0.	11.111111	2.11111111	11.
0.	0.	-1.71	-15.91
0.	0.	0.	10.532164

e =

9.
 -4.
 3.24
 7.6842105

C =

16.	12.	19.	19.	4.
18.	1.	19.	9.	9.
2.	5.	3.	16.	7.
18.	10.	19.	2.	9.

¡Cuidado!
Al intercambiar columnas la incógnita original 3 pasó a ser la 1 del nuevo sistema (y viceversa).

Debemos elegir el mas grande (en valor absoluto) de los pivotes disponibles
Intercambiamos la fila 1 por la 1 y la columna 1 por la 3 y continuamos de manera tradicional

C =

19.	12.	16.	19.	4.
19.	1.	18.	9.	9.
3.	5.	2.	16.	7.
19.	10.	18.	2.	9.



C =

19.	12.	16.	19.	4.
0.	-11.	2.	-10.	5.
0.	3.1052632	-0.5263158	13.	6.3684211
0.	-2.	2.	-17.	5.

C =

19.	12.	16.	19.	4.
0.	-11.	2.	-10.	5.
0.	3.1052632	-0.5263158	13.	6.3684211
0.	-2.	2.	-17.	5.

Debemos elegir el mas grande (en valor absoluto) de los pivotes disponibles
Intercambiamos la fila 2 por la 4 y la columna 2 por la 4 y continuamos de manera tradicional

C =

19.	19.	16.	12.	4.
0.	-17.	2.	-2.	5.
0.	13.	-0.5263158	3.1052632	6.3684211
0.	-10.	2.	-11.	5.



C =

19.	19.	16.	12.	4.
0.	-17.	2.	-2.	5.
0.	0.	1.003096	1.5758514	10.19195
0.	0.	0.8235294	-9.8235294	2.0588235

C =

19.	19.	16.	12.	4.
0.	-17.	2.	-2.	5.
0.	0.	1.003096	1.5758514	10.19195
0.	0.	0.8235294	-9.8235294	2.0588235

Debemos elegir el mas grande (en valor absoluto) de los pivotes disponibles
Intercambiamos la fila 3 por la 4 y la columna 3 por la 4 y continuamos de manera tradicional

C =

C =

19.	19.	12.	16.	4.	19.	19.	12.	16.	4.
0.	-17.	-2.	2.	5.	0.	-17.	-2.	2.	5.
0.	0.	-9.8235294	0.8235294	2.0588235	0.	0.	-9.8235294	0.8235294	2.0588235
0.	0.	1.5758514	1.003096	10.19195	0.	0.	0.	1.1352033	10.522219



C = Con pivoteo parcial

18.	1.	19.	9.	9.
0.	11.1111111	2.11111111	11.	-4.
0.	0.	-1.71	-15.91	3.24
0.	0.	0.	10.532164	7.6842105

C = Con pivoteo total

19.	19.	12.	16.	4.
0.	-17.	-2.	2.	5.
0.	0.	-9.8235294	0.8235294	2.0588235
0.	0.	0.	1.1352033	10.522219

$x =$

9.2690172

0.5674625

-8.6829539

0.7295947

Solución del sistema original o
con pivoteo parcial

$x_n =$

-8.6829539

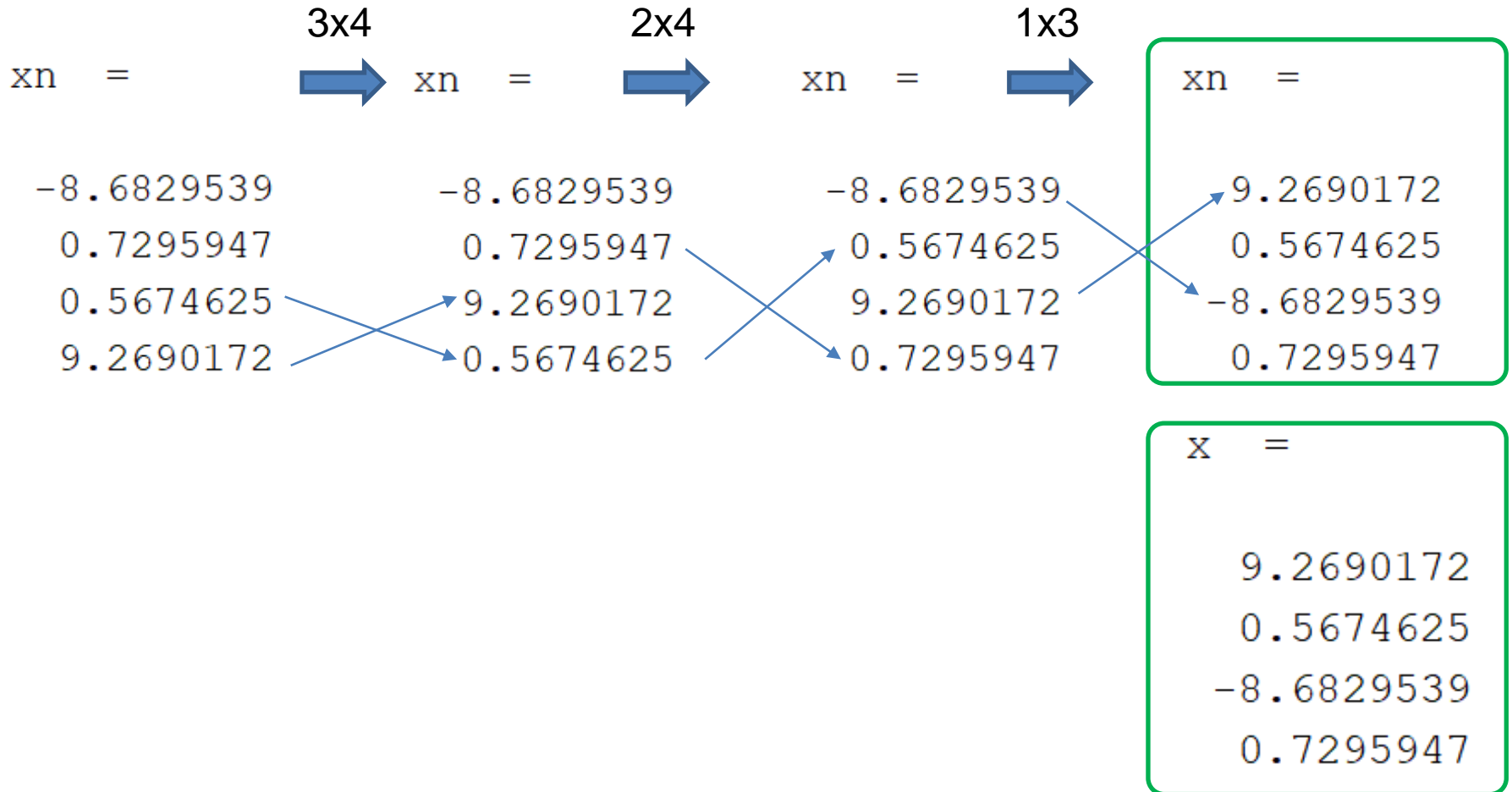
0.7295947

0.5674625

9.2690172

Solución del sistema
reformulado con pivoteo total

- Si a la solución le realizamos hacia atrás las mismas permutación que se realizaron durante la eliminación se llega a la solución del problema original.



- Una forma habitual de almacenar esta información es realizar sobre la matriz identidad las mismas permutaciones que a la matriz ampliada.

C =

19.	19.	12.	16.	4.	Matriz Ampliada luego de la eliminación Gaussiana con pivoteo total
0.	-17.	-2.	2.	5.	
0.	0.	-9.8235294	0.8235294	2.0588235	
0.	0.	0.	1.1352033	10.522219	

P =

0.	0.	0.	1.
0.	0.	1.	0.
1.	0.	0.	0.
0.	1.	0.	0.

xn =

-8.6829539	9.2690172
0.7295947	0.5674625
0.5674625	-8.6829539
9.2690172	0.7295947

x =

Matriz con las permutaciones realizadas.

- Finalmente la solución del problema original es la matriz de permutaciones multiplicada por la solución del sistema reformulado.

$$x = P \times xn$$

- Por lo tanto, luego de realizar un pivoteo por columnas necesitamos **si o si** la información de las permutaciones por columna que se realizaron.

Primera eliminación: $i=1$

C =

16.	12.	19.	19.	4.	big=19
18.	1.	19.	9.	9.	p=[1 3]
2.	5.	3.	16.	7.	fp=1
18.	10.	19.	2.	9.	cp=3

$[big\ p] = \max(\text{abs}(C([i:f], [i:f])))$;

$fp = p(1)$;

$cp = p(2)$;

Segunda eliminación: $i=2$

C =

19.	12.	16.	19.	4.
0.	-11.	2.	-10.	5.
0.	3.1052632	-0.5263158	13.	6.3684211
0.	-2.	2.	-17.	5.

big=17

p=[3 3]

fp=3

cp=3

$[big\ p]=\max(\text{abs}(C([i:f],[i:f])));$

$fp=p(1);$

$cp=p(2);$

Intercambiamos la fila i por la $i+fp-1$

Intercambiamos la columna i por la $i+cp-1$

```

function [C, P]=pivoteototal(C, i, P)
    [f c]=size(C);
    [big p]=max(abs(C([i:f],[i:f])));
    fp=p(1);
    cp=p(2);
    if fp > 1
        dummy = C;
        C(i,:) = dummy(i+fp-1,:);
        C(i+fp-1,:)= dummy(i,:);
    end

```

```
if cp > 1
    dummy = C;
    C(:,i) = dummy(:,i+cp-1);
    C(:,i+cp-1) = dummy(:,i);
    dummy = P;
    P(:,i) = dummy(:,i+cp-1);
    P(:,i+cp-1) = dummy(:,i);
end
endfunction
```

```
function [D, e]=gaussianaPT(A, b)
```

```
[f c]=size(A);
```

```
C=[A,b];
```

```
for i=1:f-1
```

```
    for j=i+1:f
```

```
        C(j,[i+1:c+1]) = C(j,[i+1:c+1])-(C(j,i)/C(i,i))*C(i,[i+1:c+1]);
```

```
    end
```

```
    C([i+1:f],i)=0;
```

```
end
```

```
D=C(:,[1:c]);
```

```
e=C(:,c+1);
```

```
endfunction
```

¿Dónde introducimos la función para el pivoteo total?

¿Se deben modificar las salidas de la función?

Completar...

$A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 19 & 19 \\ 18 & 1 & 19 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 16 \\ 18 & 10 & 19 & 2 \end{bmatrix};$

$b = [4 \ 9 \ 7 \ 9]';$

$[D, e, P] = \text{gaussianaPT}(A, b)$

D =

19.	19.	12.	16.
0.	-17.	-2.	2.
0.	0.	-9.8235294	0.8235294
0.	0.	0.	1.1352033

e =

4.
 5.
 2.0588235
 10.522219

P =

0.	0.	0.	1.
0.	0.	1.	0.
1.	0.	0.	0.
0.	1.	0.	0.