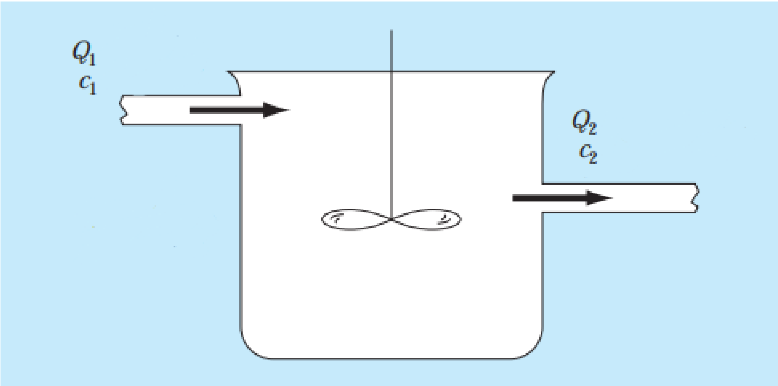
Modelado de un sistema dinámico mediante EDOs - Laplace

Modelado del sistema



Un tanque agitado cuenta con una alimentación por medio de una bomba que da un caudal constante de agua con una determinada concentración de soluto. Este tanque alimenta una unidad de proceso a través de una salida también a través de una bomba a caudal constante. El tanque se encuentra en estado estacionario (Q1=Q2). Se supone mezcla completa, esto es, la concentración a la salida corresponde a la concentración dentro del tanque (uniforme).

Balance de masa global

Para conocer el comportamiento del líquido en el tanque se realiza un balance de masa sobre un tanque en estado dinámico:

$$Acumulación = Masa\ que\ entra - Masa\ que\ sale$$

$$\frac{dM}{dt} = me - ms$$

Donde me y ms son los caudales másicos de entrada y salida del tanque respectivamente y $\frac{dM}{dt}$ es la velocidad de acumulación de masa dentro del tanque.

Reemplazando los caudales másicos por el caudal volumétrico Q por la densidad del líquido ρ se obtiene $m = Q\rho$. Reemplazando en el balance y considerando que la densidad no varía con el tiempo:

$$\frac{dV}{dt}\rho = Qe\rho - Qs\rho$$

Considerando que la densidad se mantiene constante puede simplificarse y se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = Qe - Qs$$

Como tanto la entrada y la salida del tanque es constante y es la misma, Qe=Qs, el volumen de este no varía.

$$\frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow V_{liq} = cte$$

Balance de masa por componente

Para conocer el comportamiento del soluto en el tanque se realiza un balance de masa por componentes en estado dinámico:

$$Acumulación = Masa\,que\,entra - Masa\,que\,sale$$

$$\frac{dM_c}{dt} = m_{c,1} - m_{c,2}$$

Como el volumen del tanque no varía, podemos quitarlo del diferencial.

$$M_c = c_2 V_{liq} \rightarrow \frac{dM_c}{dt} = V_{liq}\frac{dc_2}{dt}$$

Siendo c_i la concentración de la corriente i. Reemplazando en el balance

$$V_{liq}\frac{dc_2}{dt} = Q_1 c_1 - Q_2 c_2$$

Definiendo la variable q como el caudal relativo al volumen del tanque obtenemos la ecuación diferencial que define el comportamiento del soluto en el tanque.

$$q = \frac{Q}{V_{liq}}$$

$$\boxed{\frac{dc_2}{dt} = q_1 c_1 - q_2 c_2}$$

Aplicación al problema

Considere un tanque como el del sistema descrito arriba que es alimentado por un caudal de 3 m3/min. El tanque tiene un diámetro de 4 metros y una altura de 6 metros. El tanque se encuentra lleno al 80% de su capacidad. La alimentación tiene una concentración de 20 mg/m3.

A partir de cierto momento ocurre una falla en el reactor aguas arriba que alimenta el tanque y este es alimentado con una concentración 10% mayor a la operativa.

a) Resolviendo la EDO de forma analítica haciendo uso de la transformada de Laplace, muestre en un gráfico la evolución en el tiempo de la concentración del soluto en la salida del tanque para un tiempo total de 2 horas. En otro gráfico muestre el caudal de alimentación vs el tiempo.

b) Compare los resultados obtenidos en el punto a) con los que se obtienen de resolver la EDO de forma numérica por alguno de los métodos vistos en clase. Grafique en un mismo gráfico los resultados obtenidos para la altura del tanque en función del tiempo de manera analítica y los resultados obtenidos de forma numérica.