Derivadas Numéricas
2023

Prof: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

J.T.P. : Ing. Amalia Rueda

Serie de Taylor (repaso)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{''''}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\ldots$$

A partir de la serie de Taylor en torno a x_0 podemos conocer el valor de la función en la inmediaciones de x_0

Serie de Taylor (repaso)

Aproximación constante

$$f(x) = f(x_0)$$

Aproximación lineal

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Aproximación cuadrática

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{"}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Forma General

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{"}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

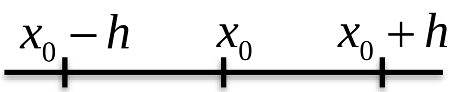
$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1!}(x - x_0)^{n+1}$$

Serie de Taylor (repaso)

Podemos estimar el valor de la función en x_0+h

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{''''}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\ldots$$



$$f(x_0+h)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x_0+h-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x_0+h-x_0)^3+\frac{f^{''''}(x_0)}{4!}(x_0+h-x_0)^4+\ldots$$

Derivada hacia delante

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})+\frac{f''(x_0)}{2!}(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f'''(x_0)}{3!}(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^3+\frac{f''''(x_0)}{4!}(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^4+\ldots$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\frac{f''''(x_0)}{4!}h^4+\ldots$$

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

Derivada hacia delante

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + \frac{f''(x_0)}{2!}(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0})^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0})^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0})^4 + \ldots$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}h^4 + \ldots$$

$$f'(x_0)h = f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 - \frac{f''''(x_0)}{4!}h^4 - \ldots$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(x_0)}{2!}h - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f''''(x_0)}{4!}h^3 - \ldots$$

Derivada hacia delante

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \boxed{- \frac{f^{''}(x_0)}{2!}h - \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f^{''''}(x_0)}{4!}h^3 - \ldots}$$

¿?

$$f^{'}(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Derivada hacia delante

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \cancel{\frac{f^{''}(x_0)}{2!}h - \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f^{''''}(x_0)}{4!}h^3} - \ldots$$

¿Porque truncamos la serie?

$$f^{'}(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

El objetivo es encontrar una expresión de la derivada utilizando solamente valores de la función

Derivada hacia delante

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f''(x_0)}{2!}h-\cancel{\frac{f'''(x_0)}{3!}h^2-\frac{f''''(x_0)}{4!}h^3}-\dots$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+O(h)$$

$$O(h)\cong\left|\frac{f''(x_0)}{2!}h\right|$$

Derivada hacia delante (ejemplo)

- Calcular *f'(2)* utilizando h=0.01

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(2) \approx \frac{\ln(2.01) - \ln(2)}{0.01}$$

$$f'(2) \approx 0.498754\ldots$$

Derivada Central

Evaluamos la serie en x_0+h y en x_0-h, luego restamos ambas expansiones

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0+h-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0+h-x_0)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(x_0+h-x_0)^4 + \ldots$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0-h-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0-h-x_0)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(x_0-h-x_0)^4 + \ldots$$

$$f(x_0-h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(-h)^n$$

Derivada Central

Evaluamos la serie en x_0+h y en x_0-h, luego restamos ambas expansiones

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\frac{f''''(x_0)}{4!}h^4+\ldots$$

$$-$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\frac{f''''(x_0)}{4!}h^4-\ldots$$

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=f'(x_0)2h+\frac{f'''(x_0)}{3!}2h^3+\frac{f'''''(x_0)}{5!}2h^5\ldots$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-\boxed{\frac{f'''(x_0)}{3!}h^2-\frac{f'''''(x_0)}{5!}h^4\ldots}$$

Error de truncamiento

Derivada Central

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 - \cancel{\frac{f'''''(x_0)}{5!}h^4 \ldots}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$O\left(h^2\right) \cong \left| \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 \right|$$

Derivada Numérica

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{x}$$

- Calcular *f'(2)* utilizando h=0.01
- Comparar con el valor exacto
- Comparar el error cometido con el de truncamiento esperado

Derivada Numérica

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$O(h) \cong \left| \frac{f''(x_0)}{2!} h \right|$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad O\left(h^2\right) \cong \left| \frac{f'''(x_0)}{3!} h^2 \right|$$

Error de redondeo

Los errores de redondeo surgen porque las computadoras digitales no pueden representar algunas cantidades exactamente. Hay dos facetas principales de los errores de redondeo involucrados en los cálculos numéricos:

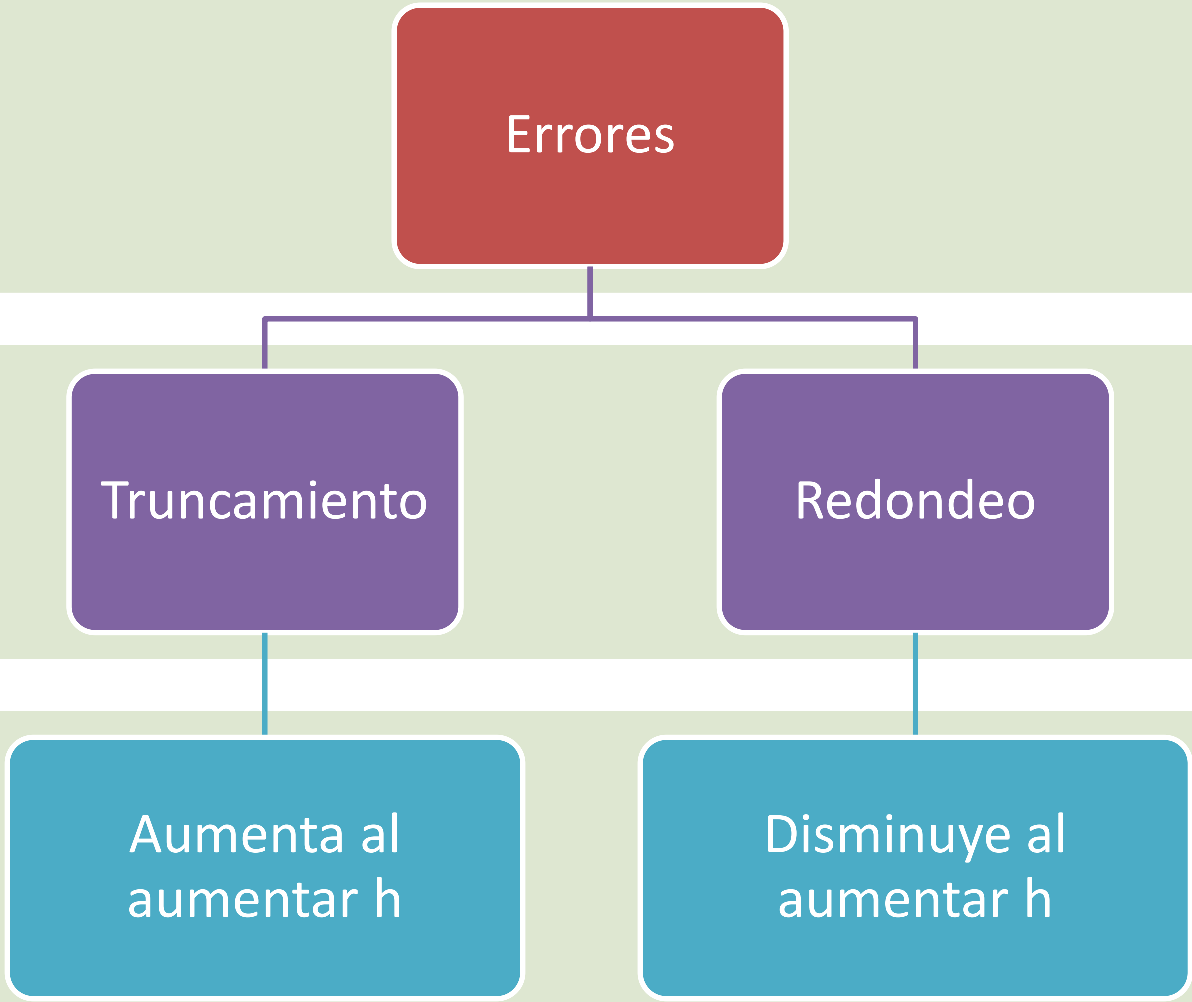
- Las computadoras digitales tiene un límite de tamaño y de precisión en su capacidad para representar números.
- Ciertas manipulaciones numéricas son altamente sensibles a los errores de redondeo.

Error Total

Al utilizar derivadas numéricas se introduce un error con respecto al valor exacto (analítico)

Existen dos tipos de errores y el error total es la suma de ambos

Cada uno tiene distinta relación con h

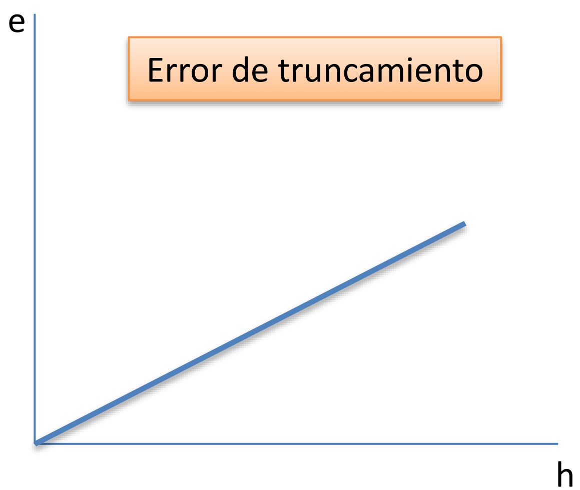


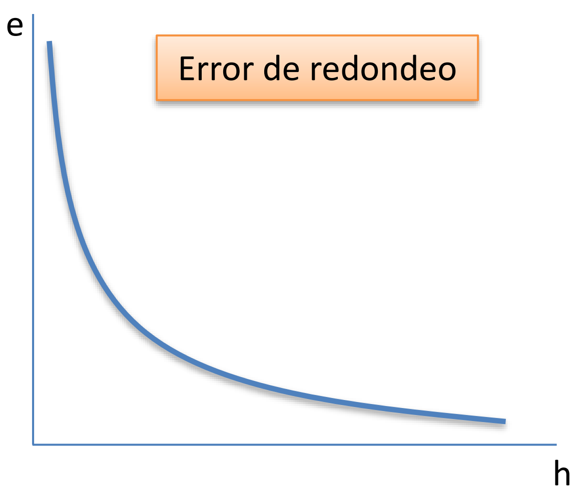
Error Total

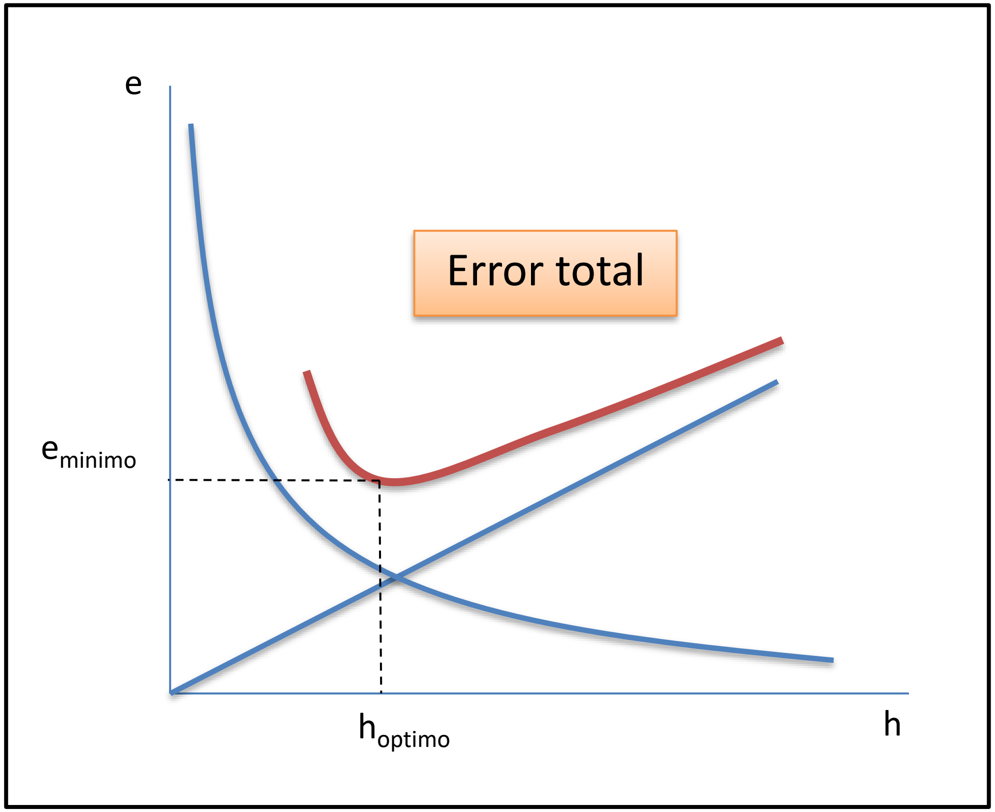
Error Total = Error de Truncamiento + Error de redondeo

Como el primer sumando aumenta con h mientras que el segundo disminuye, debe existir un valor optimo del incremento que minimice el error cometido

Error Total


e
Error de truncamiento
h


e
Error de redondeo
h


e
Error total
e_{minimo}
h_{optimo}
h