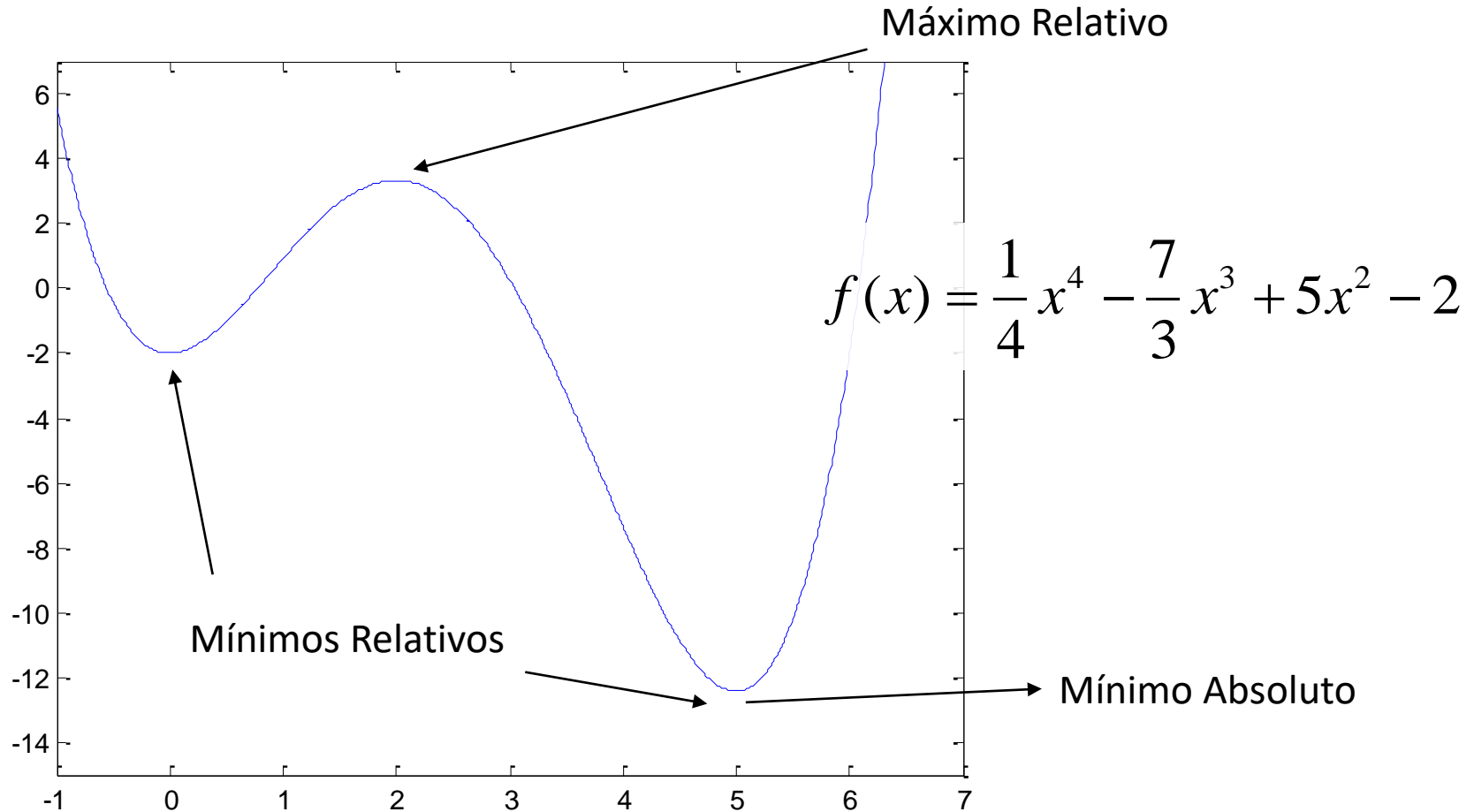


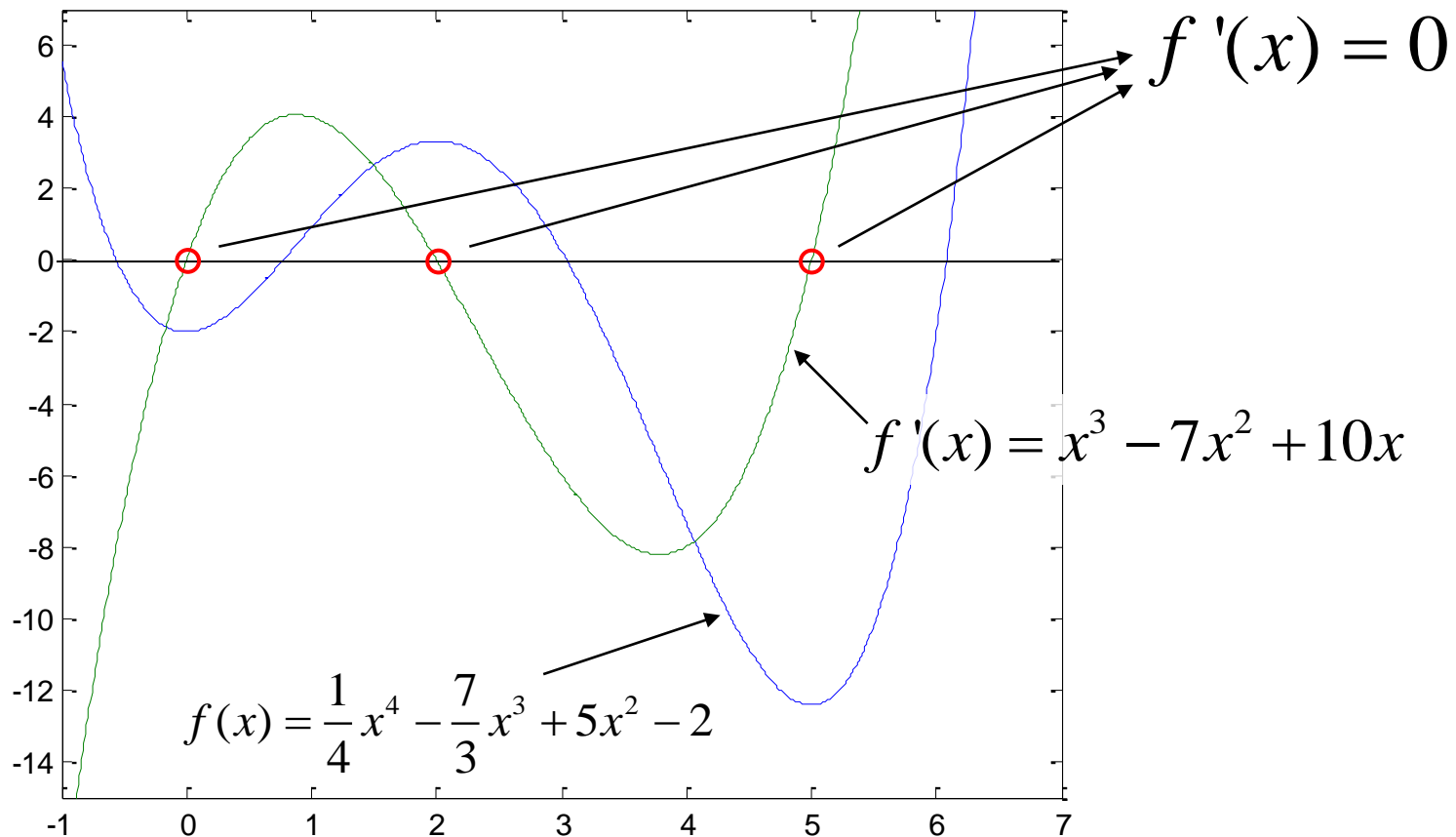
Optimización Unidimensional 2023

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
JTP: Ing. Amalia Rueda

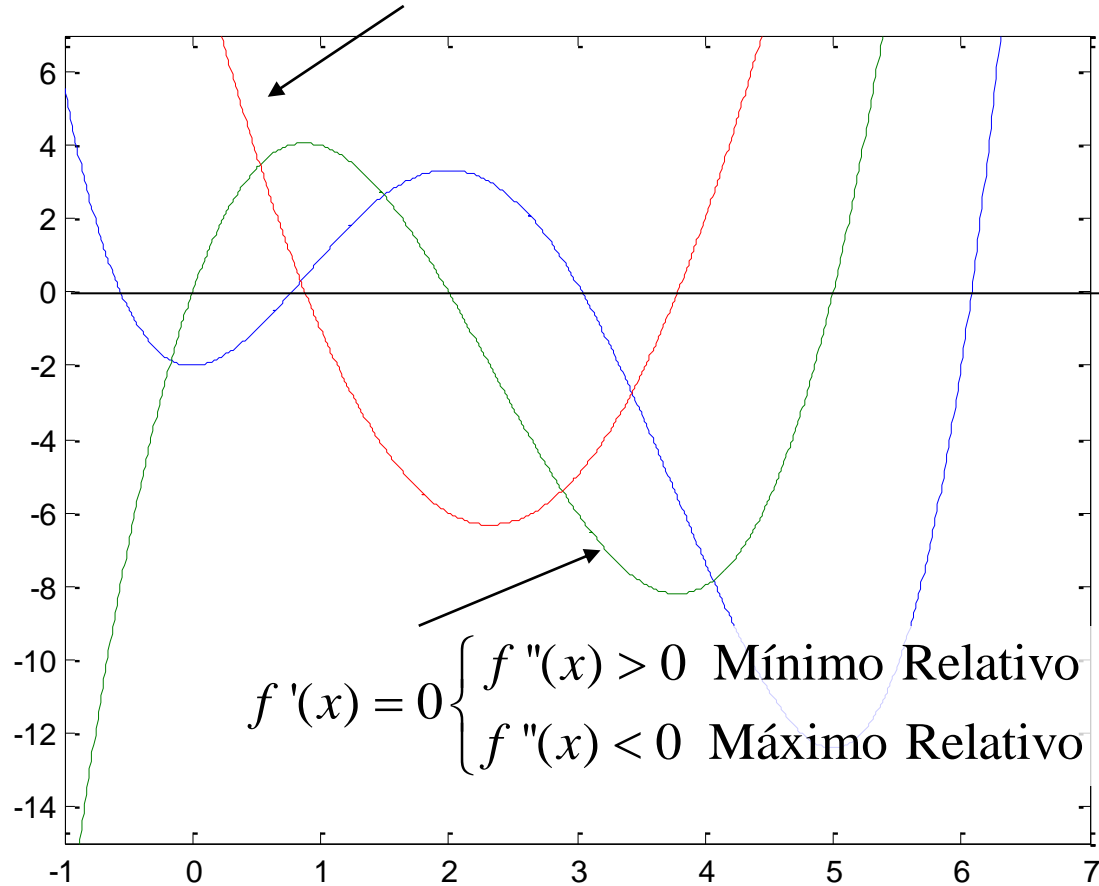
Encontrar el valor mínimo o máximo de una función en una variable



Condición necesaria de mínimo o máximo: $f'(x) = 0$



$$f''(x) = 3x^2 - 14x + 10$$



Taylor de segundo orden: $f(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$

Utilizando el valor actual de la variable en un proceso iterativo $x^{(k)}$ se aproxima por Taylor de segundo orden el valor de la función en el siguiente punto $x^{(k+1)}$:

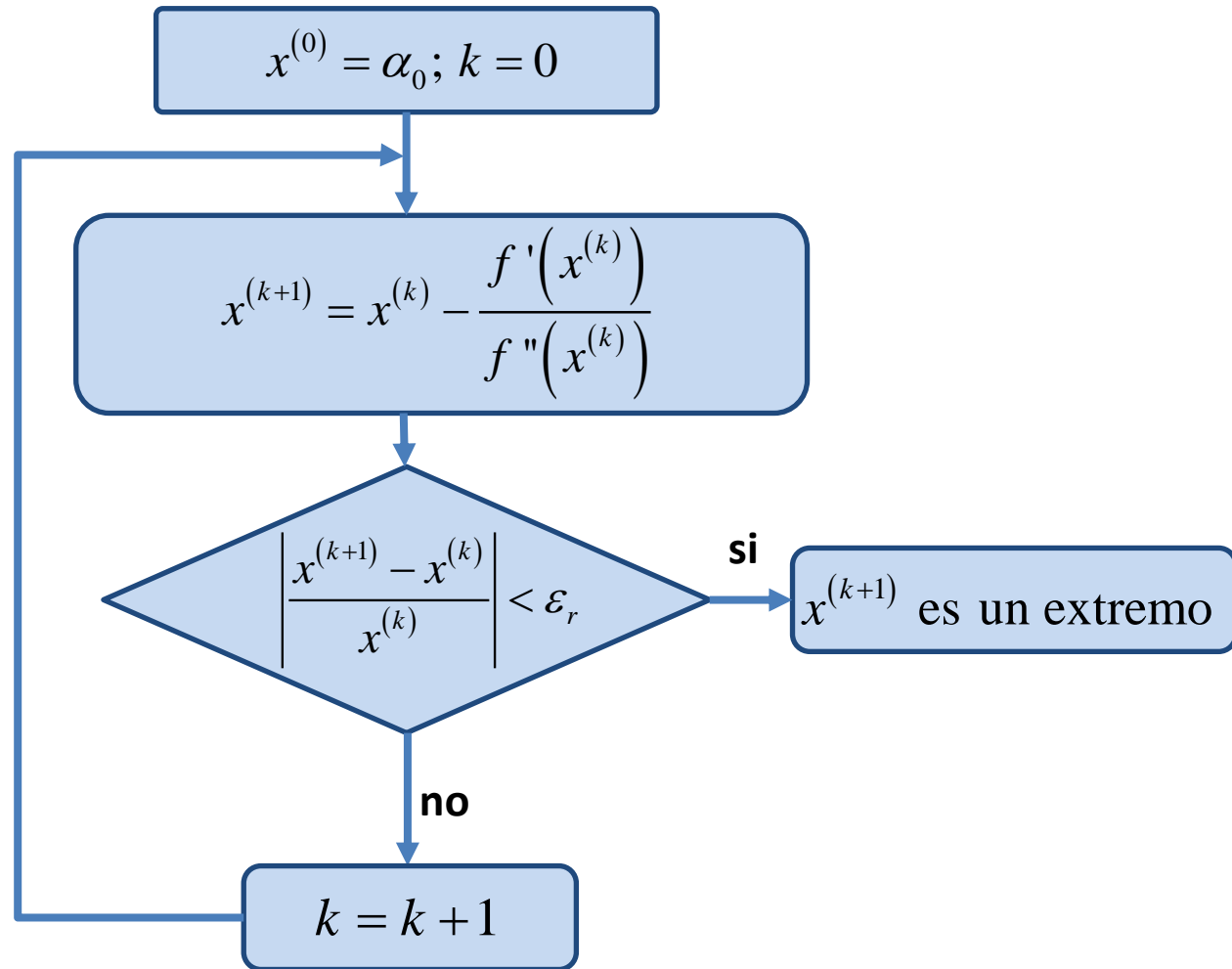
$$f(x^{(k+1)}, x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{f''(x^{(k)})}{2!}(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2$$

Buscamos que el siguiente punto sea un punto crítico: $\frac{df(x^{(k+1)}, x^{(k)})}{dx^{(k+1)}} = 0$

$$0 + f'(x^{(k)}) + \frac{2f''(x^{(k)})}{2!}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}$$

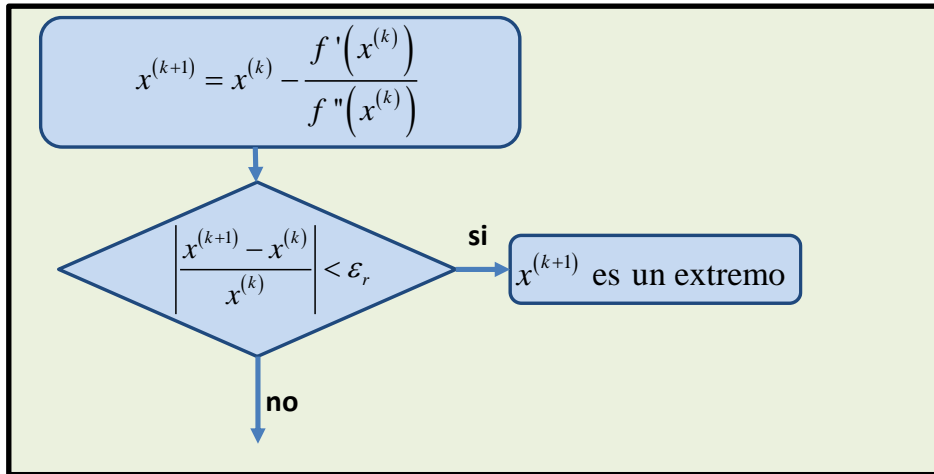
Formula recursiva del método de Newton



```
function out=newton(funp, funpp, x0, tol)
```

```
x=x0;
```

```
for k=1:100
```



```
end
```

```
if k == 100
```

```
    out=[];
```

```
    disp('no converge');
```

```
end
```

```
endfunction
```

Este método encuentra la parábola que pasa por tres puntos de la función y encuentra el extremo de la misma. Luego se eligen tres nuevos puntos y se repite el procedimiento hasta satisfacer la tolerancia.

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

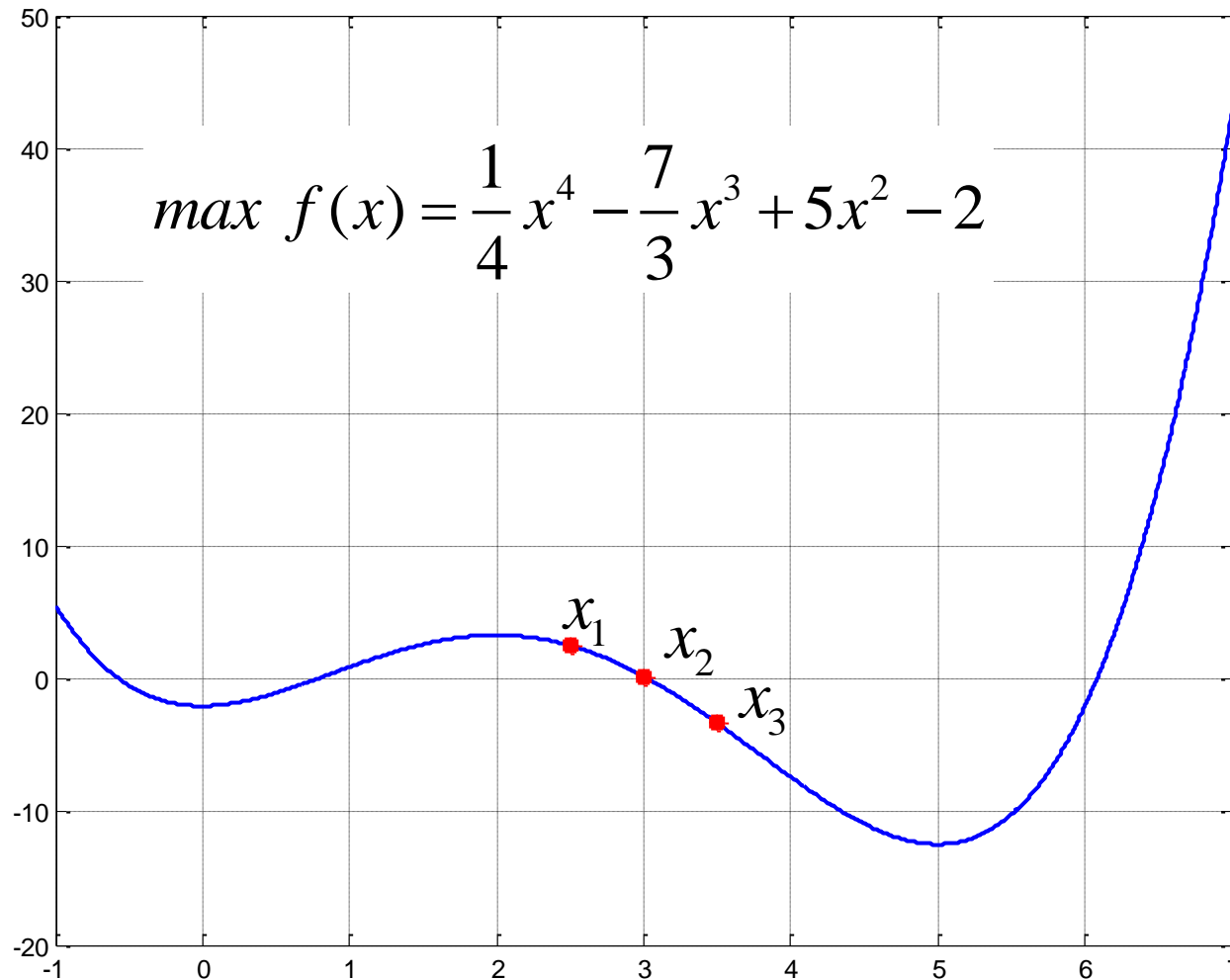
¿Cómo encontrar la parábola?

¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

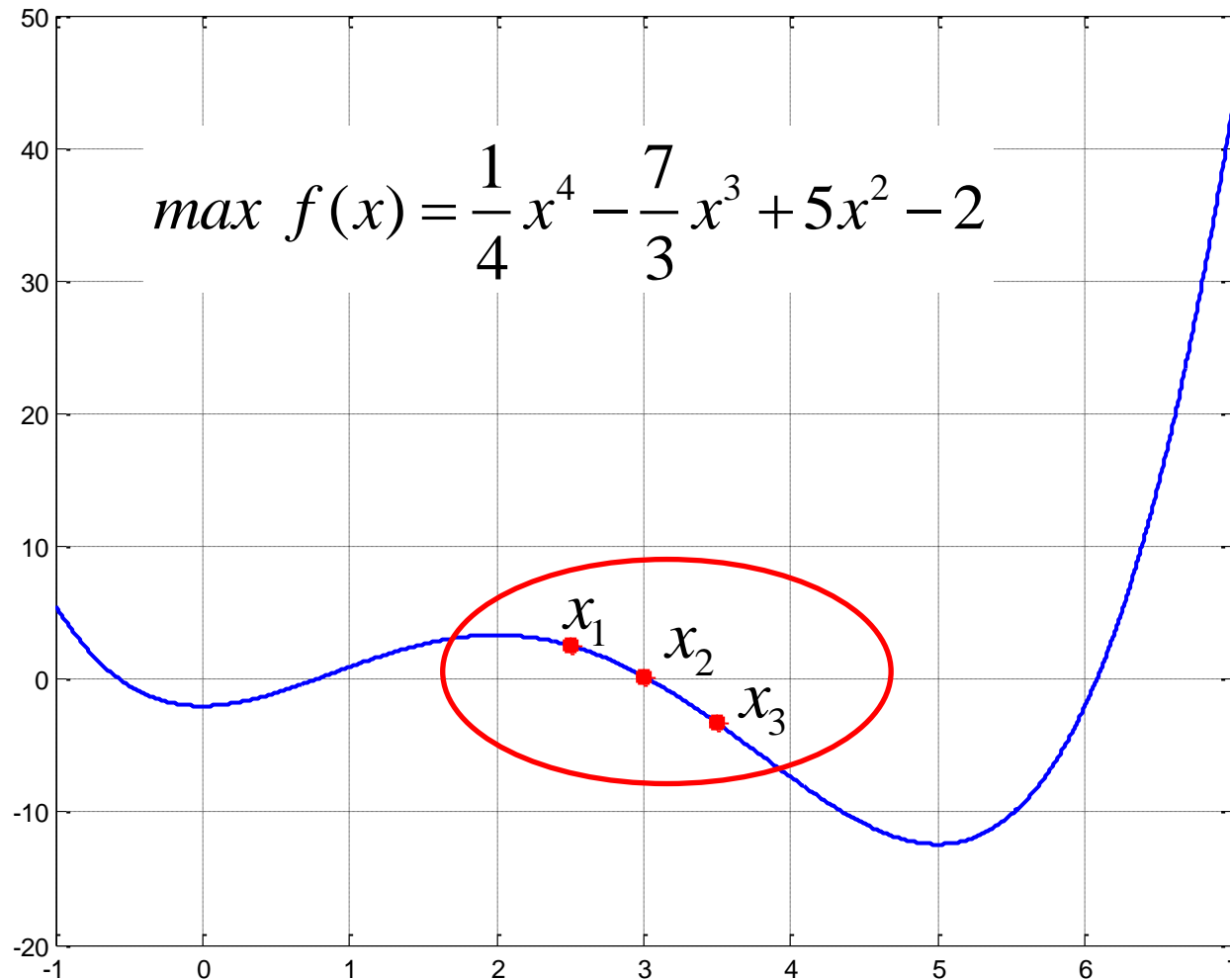
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

¿Cuál es el criterio de tolerancia?

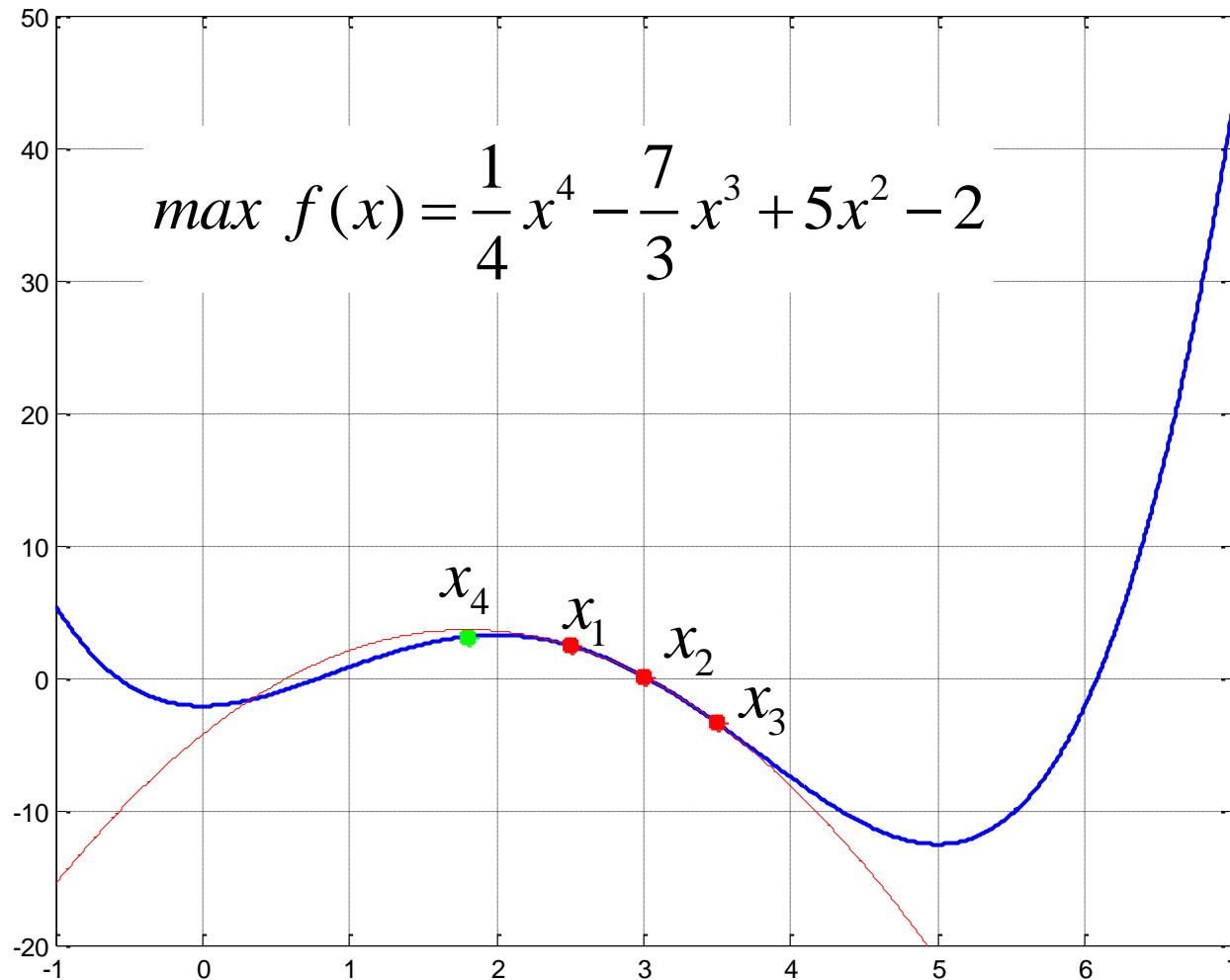
¿Cómo elegir los tres valores de arranque?



Solo necesitamos tres puntos del dominio



Encontramos la parábola que pasa por los tres puntos. El nuevo punto corresponde al **extremo** de la misma.



¿Cómo encontrar la parábola?

La parábola debe pasar por los siguientes puntos:

$$x_1 = 2.5 \quad f(x_1) = 2.55729 \quad (2.5; 2.55729)$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 0.25 \quad \longrightarrow \quad (3; 0.25)$$

$$x_3 = 3.5 \quad f(x_3) = -3.27604 \quad (3.5; -3.27604)$$

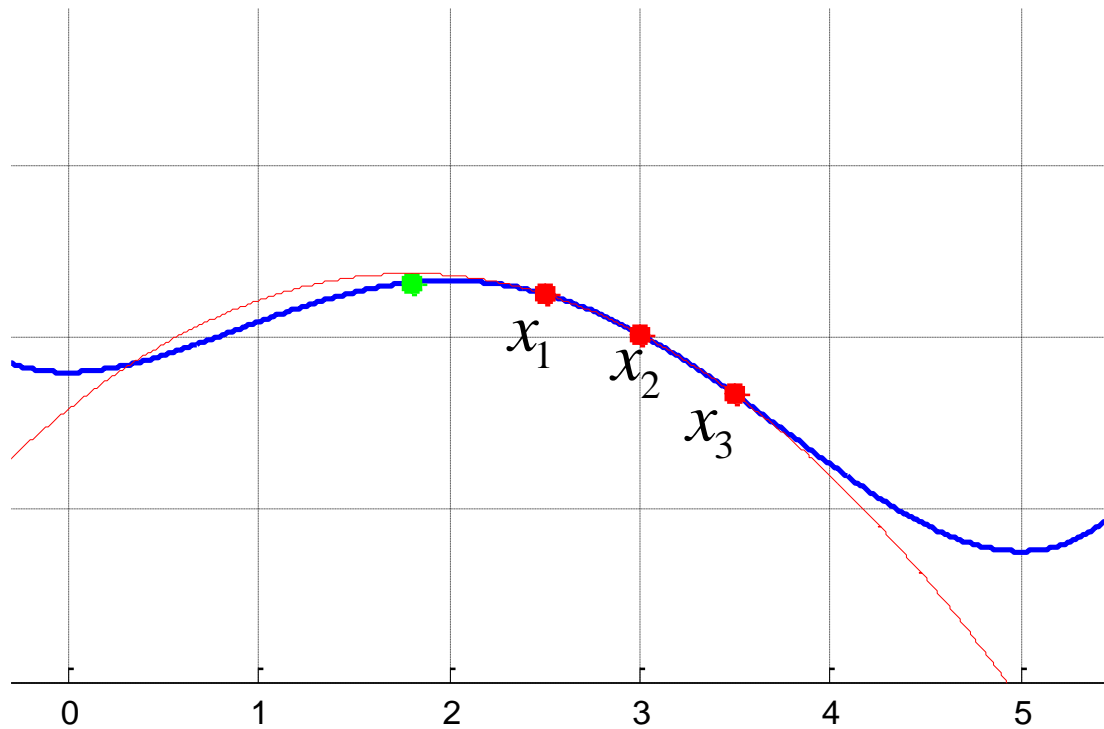
$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$ Los tres puntos deben cumplir esta ecuación

$$\begin{cases} a2.5^2 + b2.5 + c = 2.55729 \\ a3^2 + b3 + c = 0.25 \\ a3.5^2 + b3.5 + c = -3.27604 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2.5^2 & 2.5 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 3.5^2 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.55729 \\ 0.25 \\ -3.27604 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \text{Sistema } 3 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 2.5^2 & 2.5 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 3.5^2 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.55729 \\ 0.25 \\ -3.27604 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Resolvemos}} \begin{matrix} a = -2.4375 \\ b = 8.791667 \\ c = -4.1875 \end{matrix}$$

$$y = -2.4375x^2 + 8.791667x - 4.1875$$

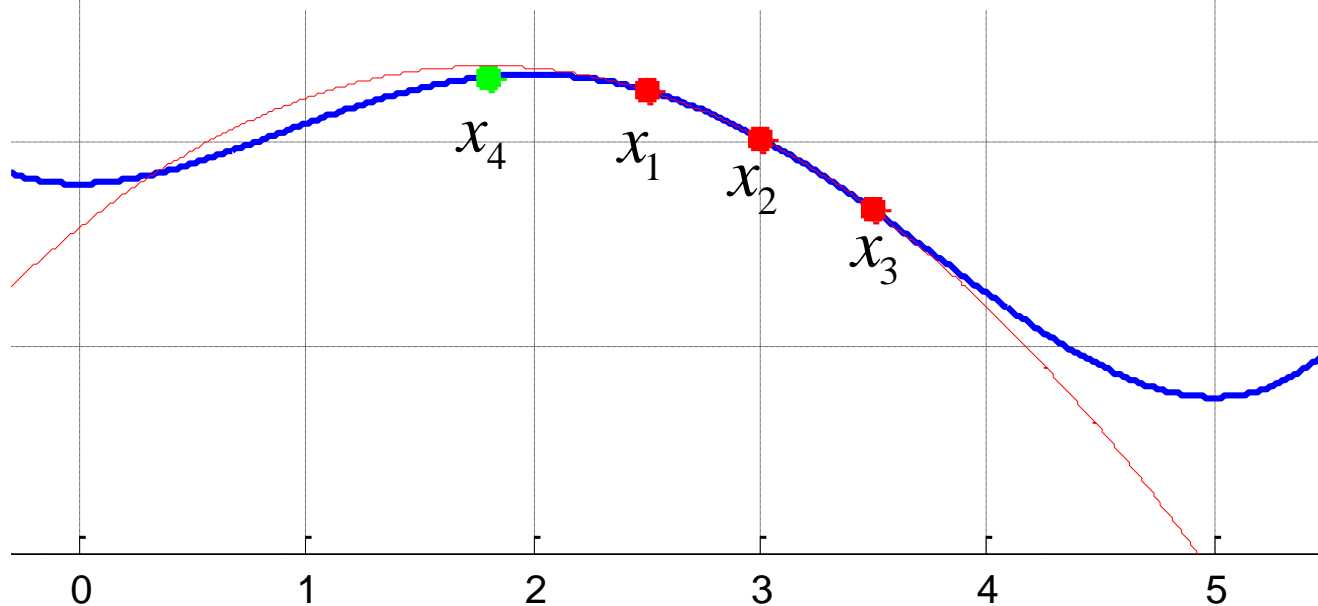


¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

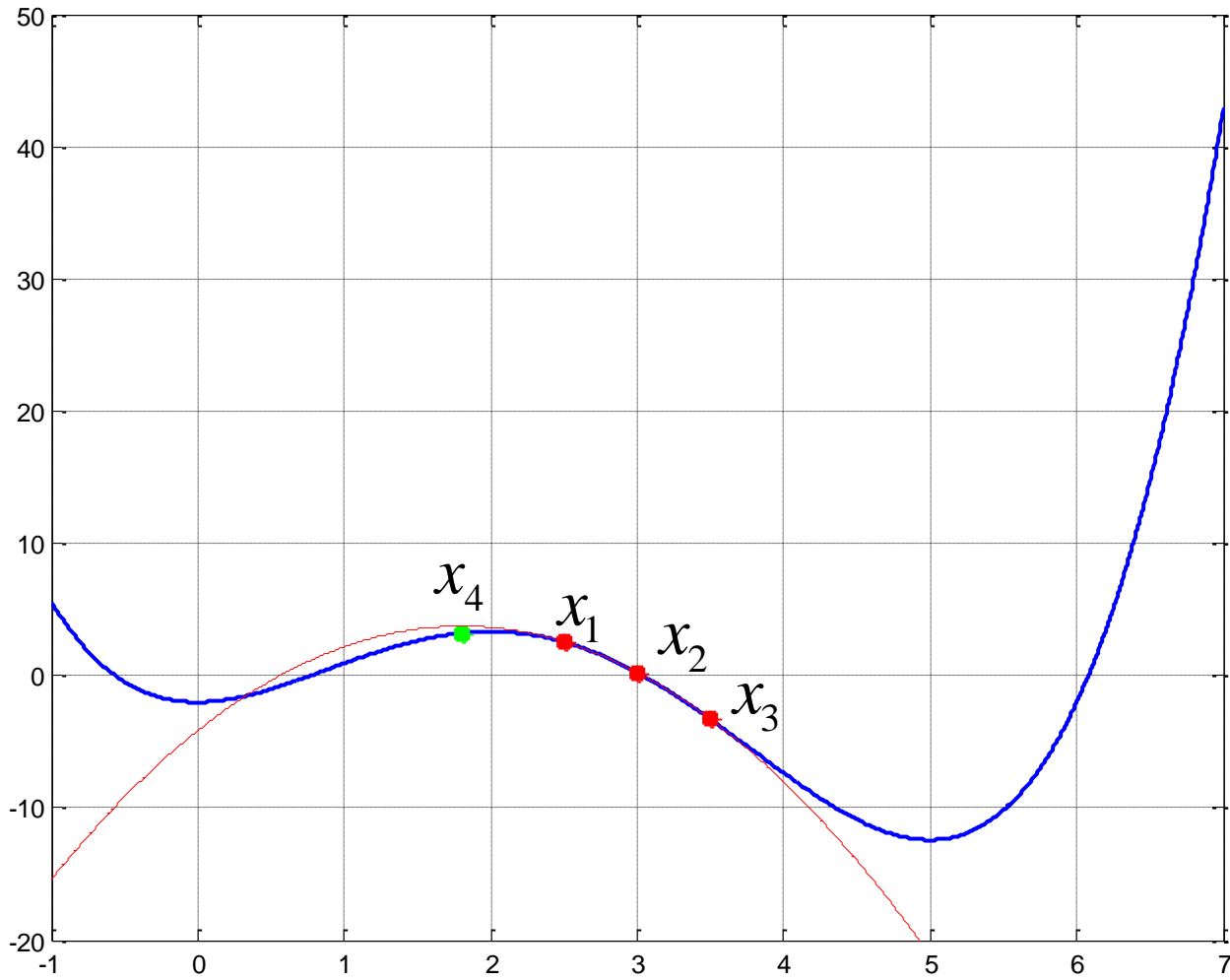
$$y = ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad y' = 2ax + b \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y' = 0$$

El nuevo punto corresponde al extremo de la parábola:

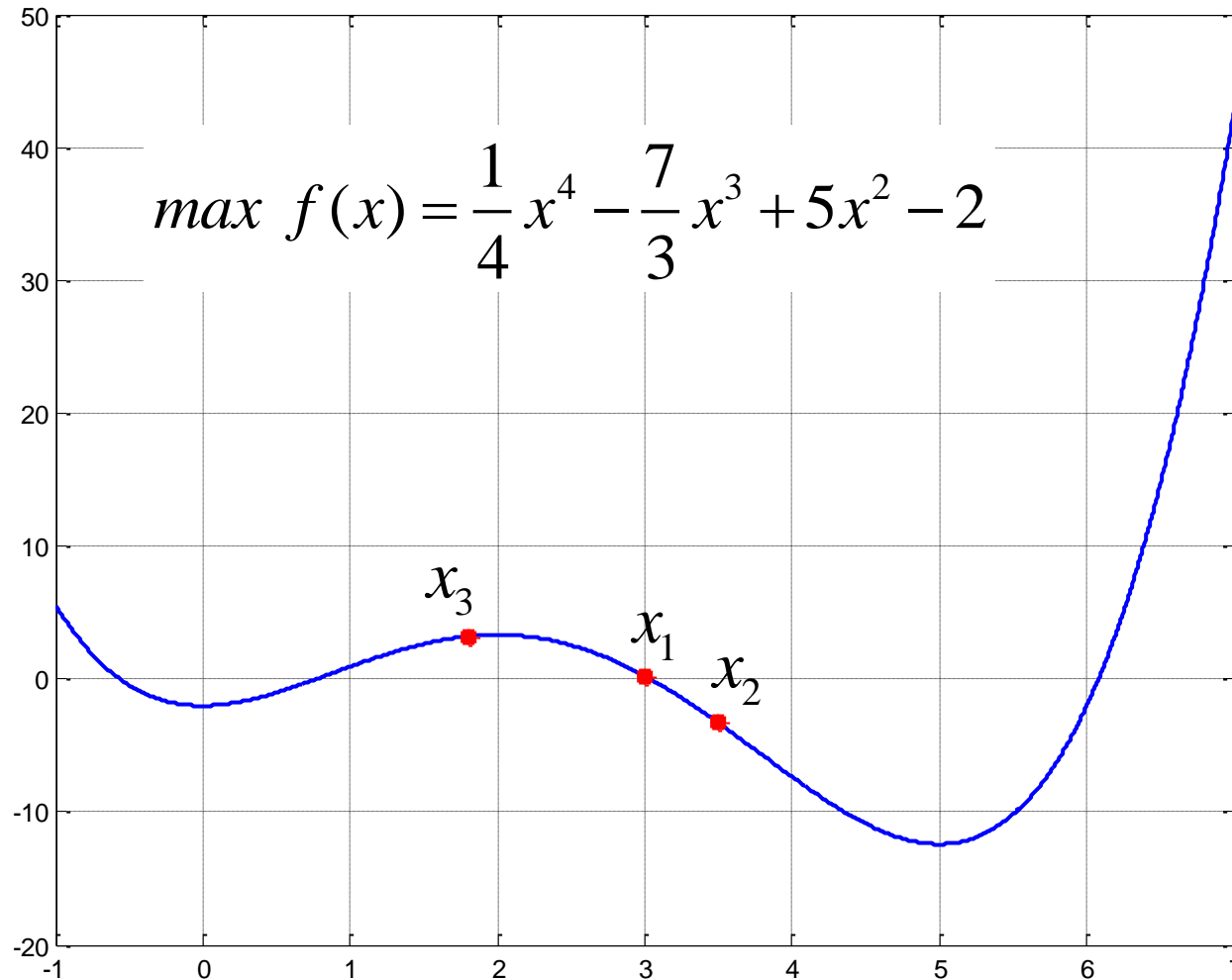
$$x_4 = -\frac{8.791667}{2(-2.4375)} = 1.803418$$



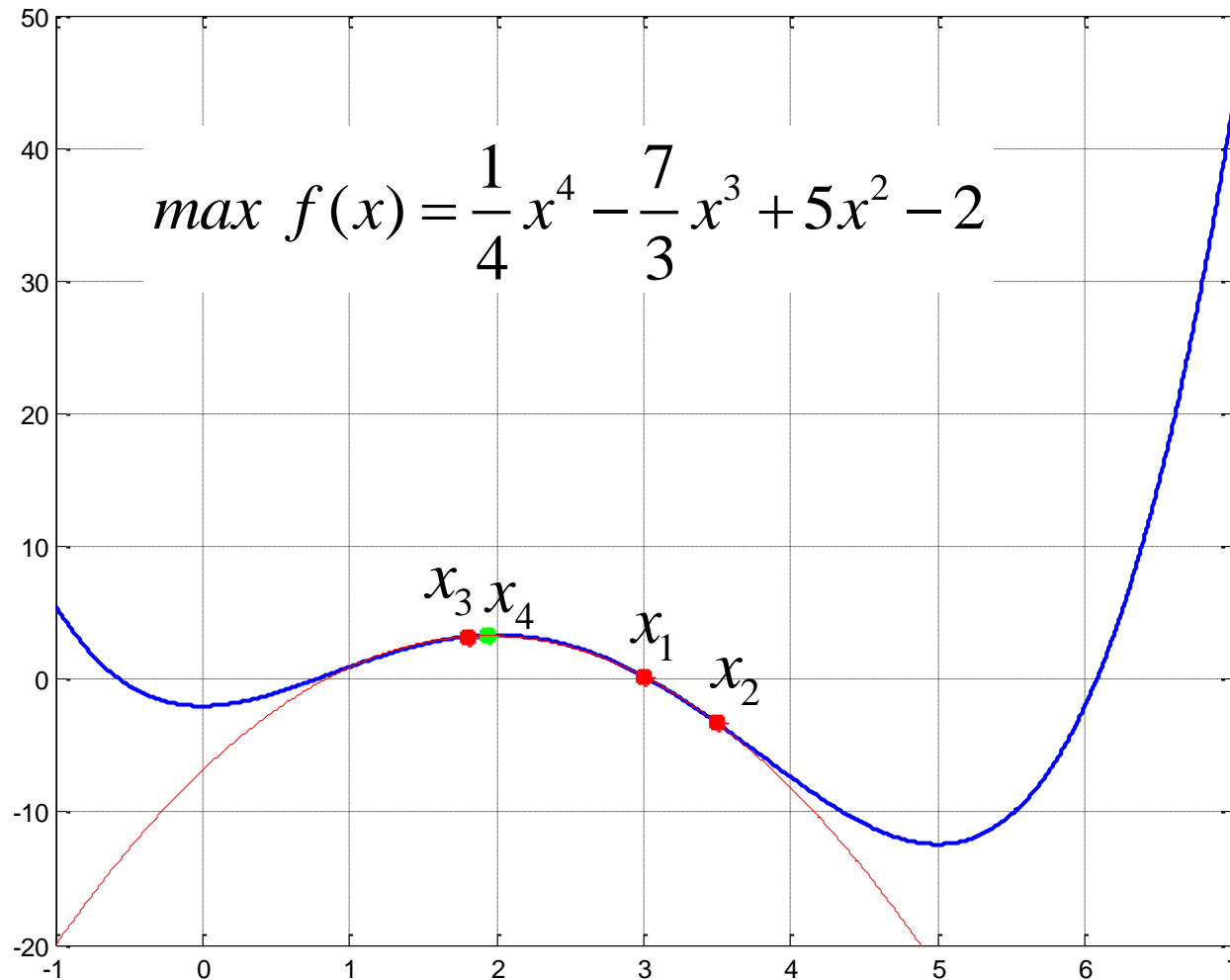
¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos



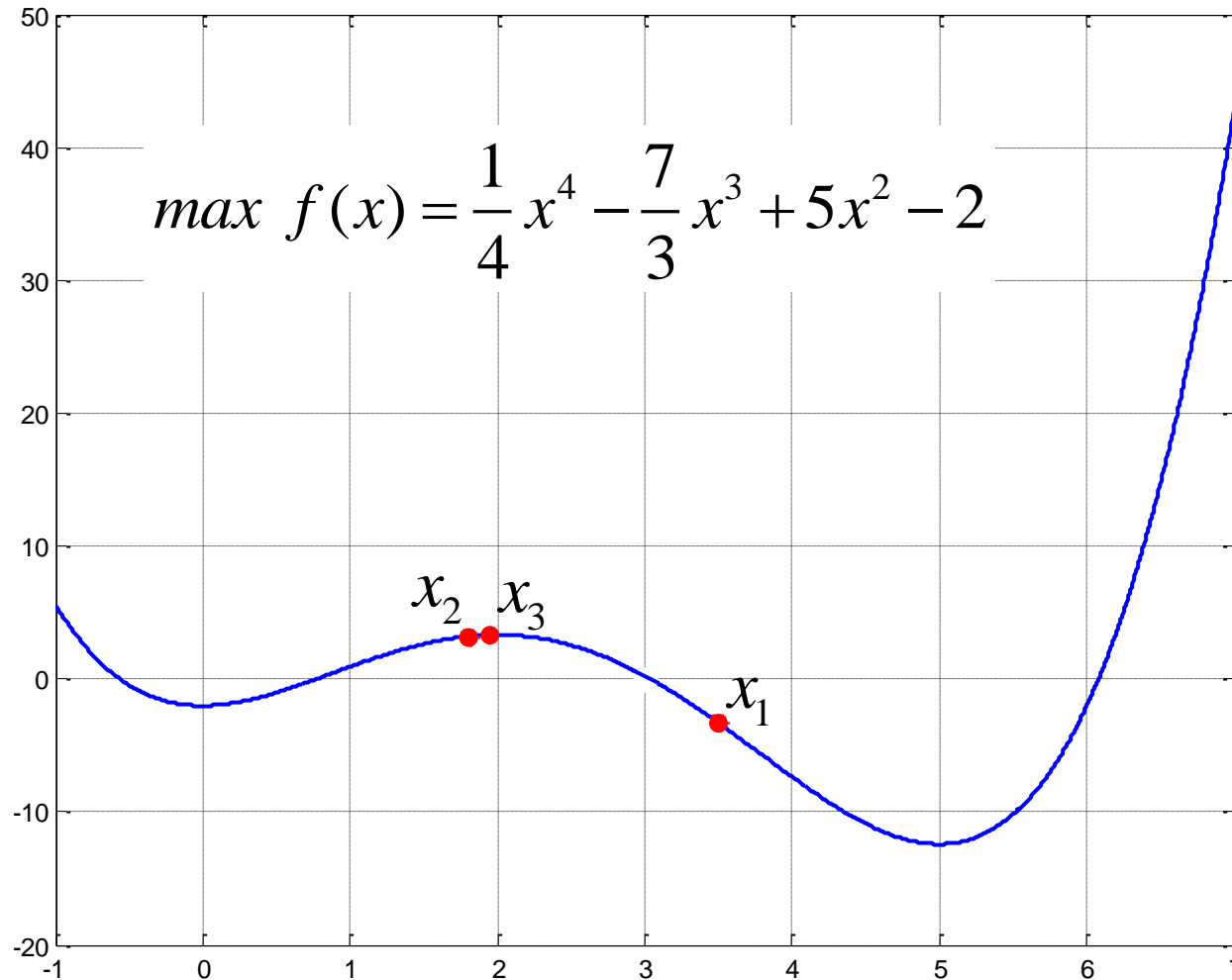
¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos

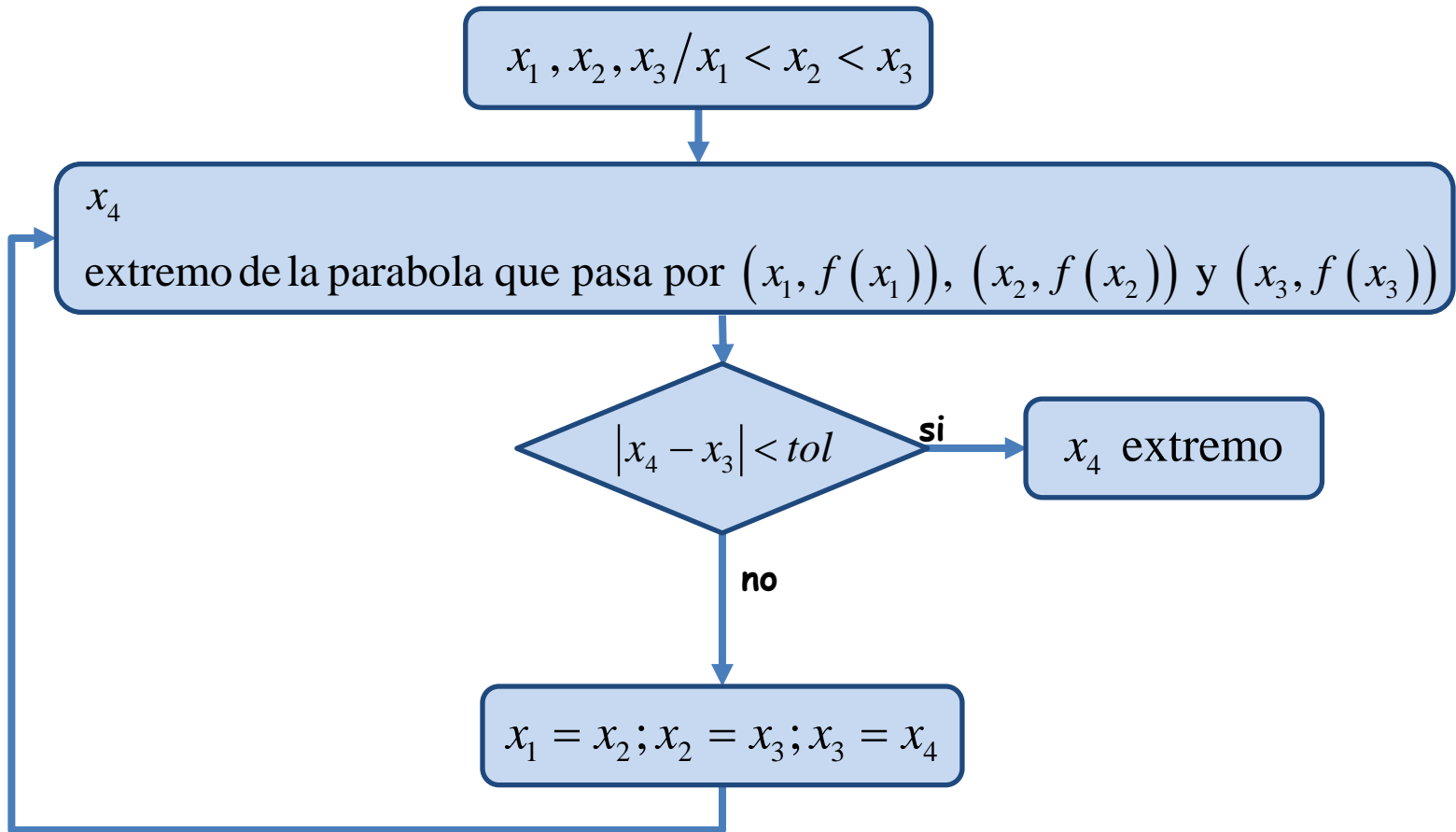


Continuamos... hasta satisfacer la tolerancia



¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos





```
function xopt=parabolicas(fun, x1, x2, x3, tol)
```

```
for k= 1:100
```

```
A=[1 x1 x1^2;1 x2 x2^2;1 x3 x3^2];
```

```
b=[fun(x1);fun(x2);fun(x3)];
```

```
x=A\b;
```

```
x4=-x(2)/(2*x(3));
```

```
if abs(x4-x3) < tol
```

```
    xopt = x4;
```

```
    break
```

```
end
```

```
x1 = x2; x2 = x3; x3 = x4;
```

```
end
```

```
if k == 100
```

```
    xopt=[];
```

```
    disp('no converge');
```

```
end
```

```
endfunction
```

x_4

extremo de la parábola que pasa por $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ y $(x_3, f(x_3))$

Tip: Existe una formula directa para el calculo del nuevo punto

$$x_4 = \frac{f(x_1)(x_2^2 - x_3^2) + f(x_2)(x_3^2 - x_1^2) + f(x_3)(x_1^2 - x_2^2)}{2f(x_1)(x_2 - x_3) + 2f(x_2)(x_3 - x_1) + 2f(x_3)(x_1 - x_2)}$$

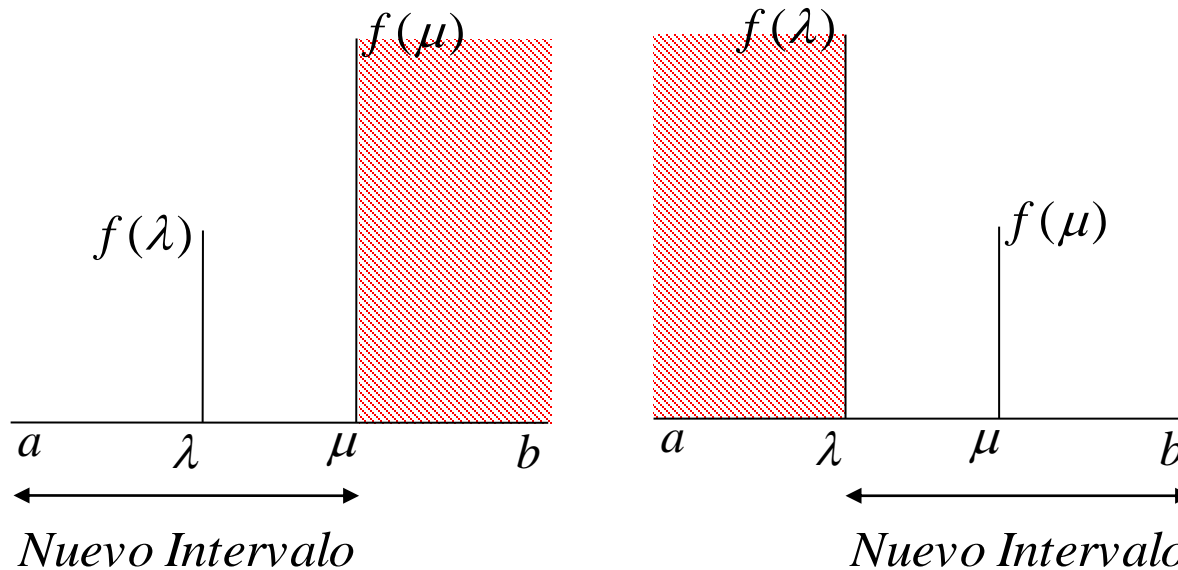
(Minimización)

Sea $\lambda, \mu \in [a, b]$ tal que $\lambda < \mu$

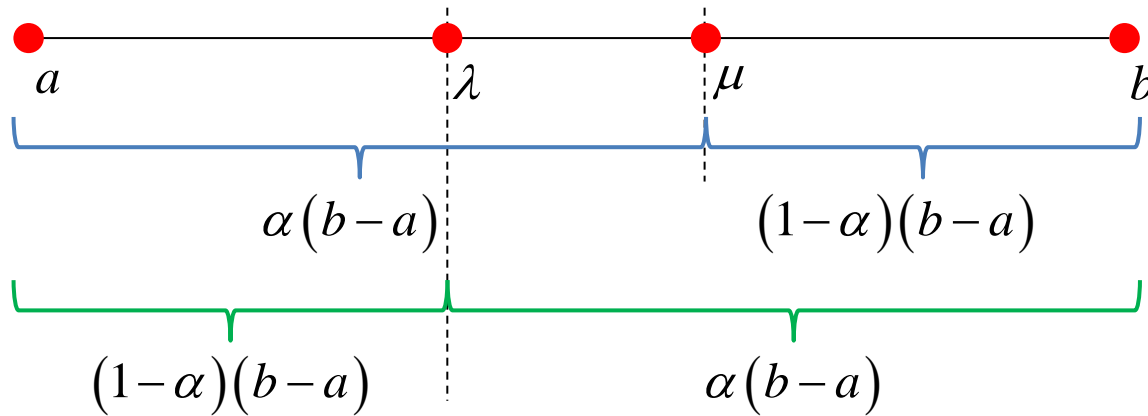
\therefore

Si $f(\lambda) < f(\mu)$, luego $f(x) \geq f(\lambda) \quad \forall x \in (\mu, b]$

Si $f(\lambda) \geq f(\mu)$, luego $f(x) \geq f(\mu) \quad \forall x \in [a, \lambda]$



Expresamos a λ y μ como una fracción α del intervalo $[a,b]$:



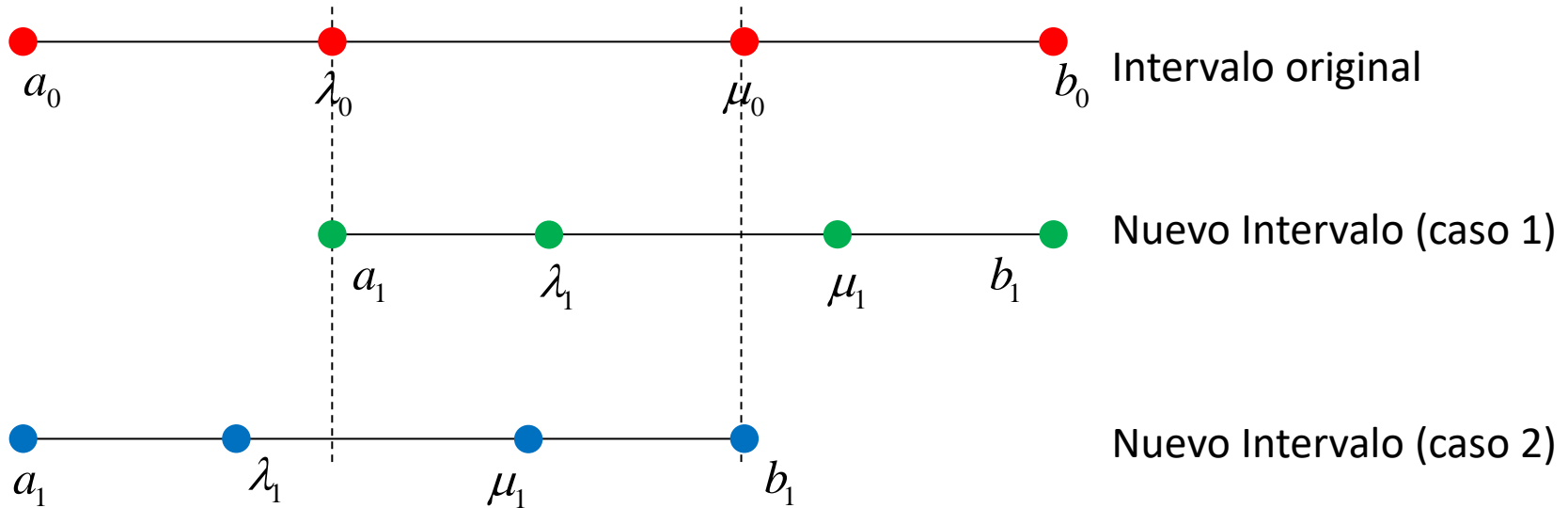
Analizando la grafica anterior encontramos las siguientes expresiones de λ y μ :

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

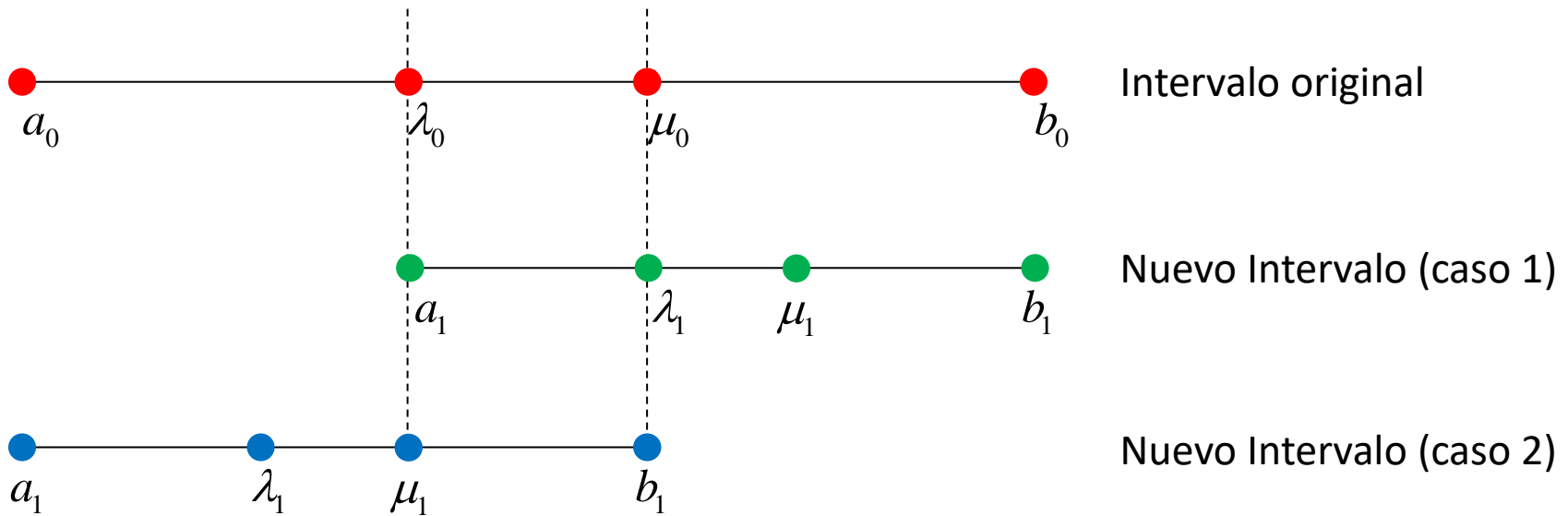
¿ α ?

Valor aleatorio: $\alpha=0.7$:



No se utiliza cualquier valor porque cada iteración requeriría calcular λ y μ

Buscamos α de manera que se cumpla lo siguiente:

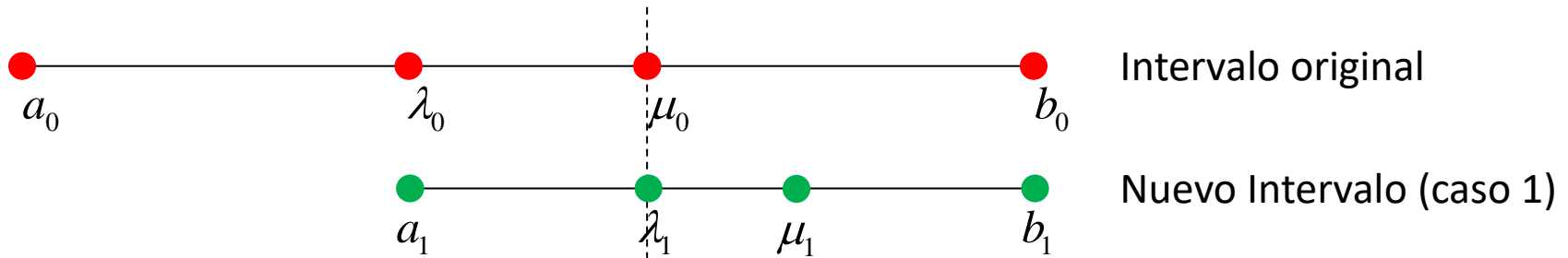


Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$

Caso 2: $\mu_1 = \lambda_0$

El valor de α que estamos buscando permite que en cada iteración solo se calcule λ o μ

Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$



$$\mu_0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)$$

$$\lambda_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$



$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$

De la grafica:

$$b_1 = b_0$$

$$a_1 = \lambda_0 = b_0 - \alpha(b_0 - a_0)$$

Reemplazando:

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha(b_0 - (b_0 - \alpha(b_0 - a_0)))$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha(b_0 - b_0 + \alpha(b_0 - a_0))$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha^2(b_0 - a_0)$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha^2(b_0 - a_0)$$

$$\cancel{\alpha^2(b_0 - a_0)} + \alpha \cancel{(b_0 - a_0)} - \cancel{(b_0 - a_0)} = 0$$

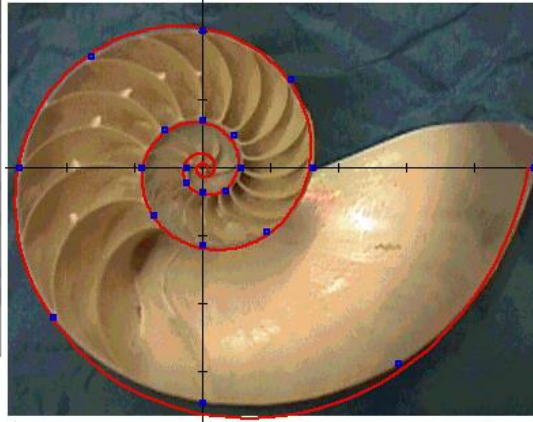
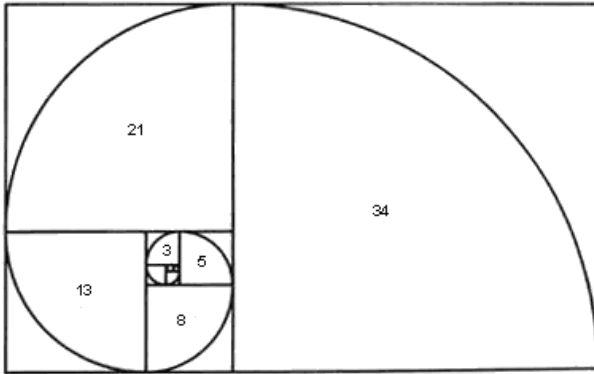
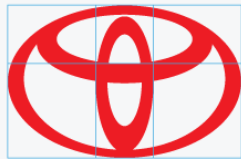
$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \begin{cases} \alpha_1 \cong 0.618 \\ \alpha_2 \cong -1.618 \end{cases}$$

¡Encontramos el α !

Analizando el Caso 2 se llega a la misma conclusión

$$\alpha \cong 0.618034$$

Golden Ratio

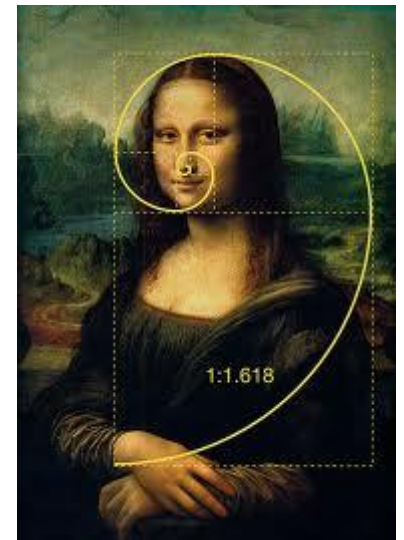
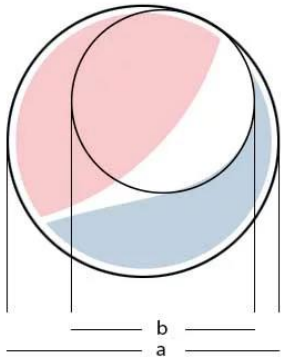
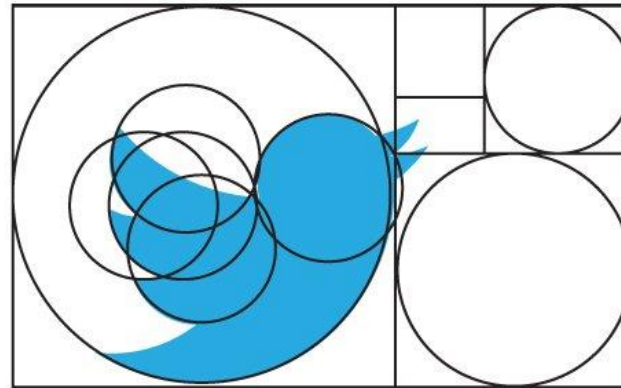



Annotations for the Toyota logo: a horizontal line 'b' spans the width of the logo, and a vertical line 'a' spans its height. A smaller version of the logo is shown with lines 'b'' and 'a''.

TOYOTA

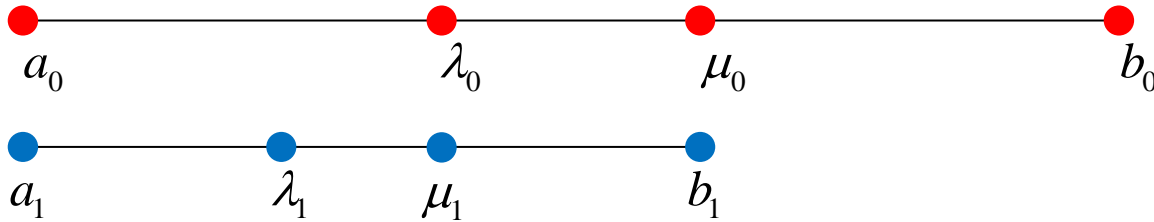
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = 1.618 !!!$$

goldenratio



(Minimización)

Si $f(\lambda) < f(\mu)$

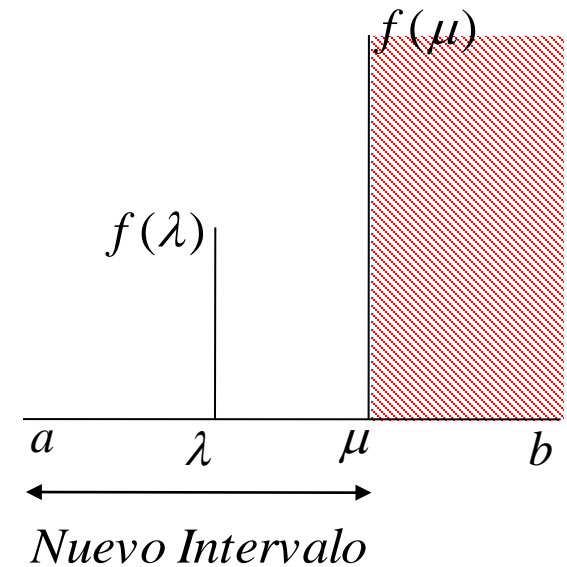


$$a_1 = a_0$$

$$b_1 = \mu_0$$

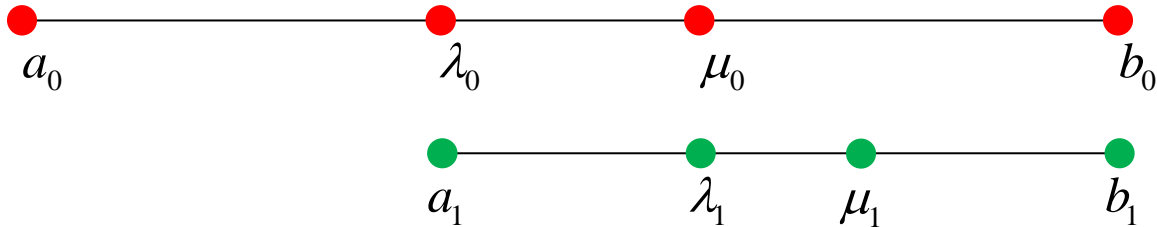
$$\mu_1 = \lambda_0$$

$$\lambda_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$



(Minimización)

Si $f(\lambda) \geq f(\mu)$

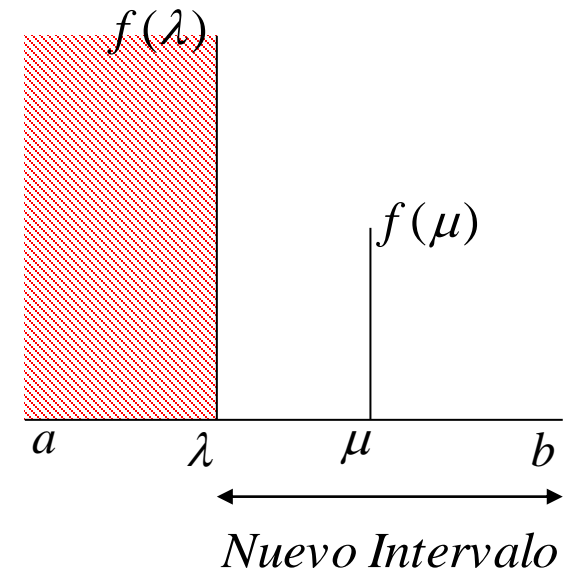


$$a_1 = \lambda_0$$

$$b_1 = b_0$$

$$\lambda_1 = \mu_0$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$$



$[a, b]$ intervalo de búsqueda original

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$|a - b| < tol$

si

extremo

no

$f(\lambda) < f(\mu)$

no

si

$$a = \lambda$$

$$b = b$$

$$\lambda = \mu$$

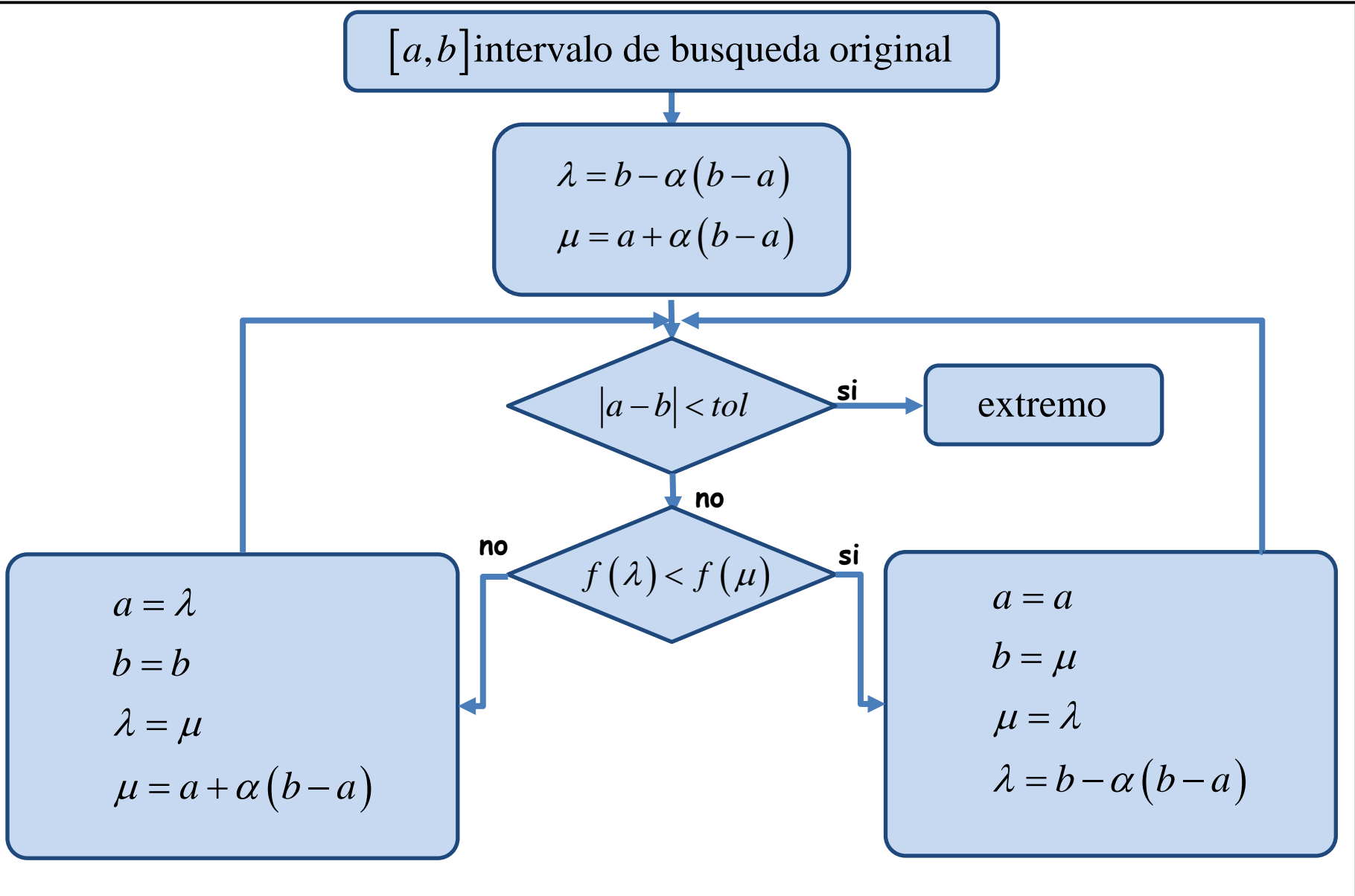
$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$$a = a$$

$$b = \mu$$

$$\mu = \lambda$$

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$



a $k = 0$ b $(b - a)$

$k = 1$ $(b - a)\alpha$

$k = 2$ $(b - a)\alpha\alpha$

$i = 3$ $(b - a)\alpha\alpha\alpha$

El tamaño del intervalo siempre se reduce en la misma proporción
¿Cuál es el tamaño del intervalo en la iteración k ?

$$(b - a)\alpha^k$$

La relación del tamaño del intervalo con el número de iteración nos sirve para conocer de antemano cuantas iteraciones debemos realizar.

Es decir, en la iteración N el tamaño del intervalo debe ser igual a la tolerancia deseada.

$$tol = (b - a) \alpha^N$$

Ejemplo:

Encontrar el número de iteraciones necesarias comenzando en el intervalo $[5 \ 6]$ adoptando una tolerancia de $tol=10^{-5}$.

$$tol = (b - a) \alpha^N \Rightarrow 10^{-5} = (b - a) \alpha^N$$

$$-5 = \log_{10}(6 - 5) + N \log_{10} \alpha$$

$$N = \frac{-5 - \log_{10}(6 - 5)}{\log_{10} 0.618034} \Rightarrow N = 23.9248... \\ (24 \text{ iteraciones})$$

$[a, b]$ intervalo de búsqueda original; $k = 0$

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$$N = \lceil (\log(tol) - \log(b - a)) / \log 0.618034 \rceil$$

$k = N$

si extremo

no

$$a = \lambda$$

$$b = b$$

$$\lambda = \mu$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

$$k = k + 1$$

$f(\lambda) < f(\mu)$

no

si

$$a = a$$

$$b = \mu$$

$$\mu = \lambda$$

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$k = k + 1$$

```
function xopt=mingoldenratio(fun, a, b, tol)
```

```
  alfa = 2/(sqrt(5)+1);
```

```
  l = b - alfa*(b-a);
```

```
  m = a + alfa*(b-a);
```

```
  fl = fun(l);
```

```
  fm = fun(m);
```

```
  N = ceil((log(tol)-log(b-a))/log(alfa));
```

```
  for k= 1:N
```

```
    if fl < fm
```

```
      b=m; m=l; l = b - alfa*(b-a);
```

```
      fm=fl; fl=fun(l);
```

```
    else
```

```
      a=l; l=m; m = a + alfa*(b-a);
```

```
      fl=fm; fm=fun(m);
```

```
    end
```

```
  end
```

```
  if fl < fm
```

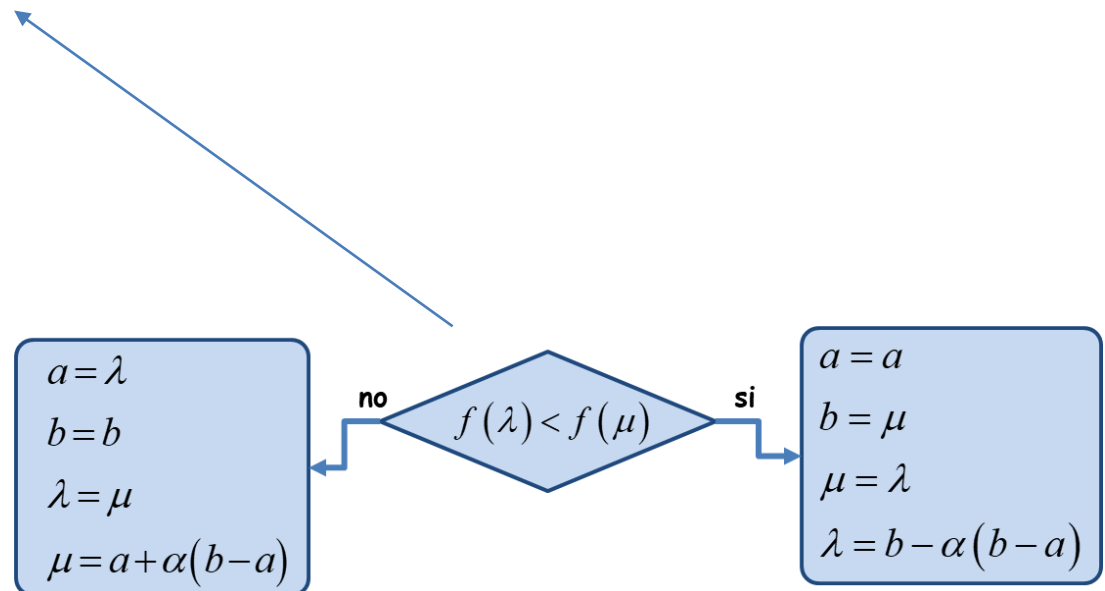
```
    xopt=l
```

```
  else
```

```
    xopt=m
```

```
  end
```

```
endfunction
```



Ejemplo: $\min \frac{x^2}{10} - 2\text{sen}(x)$

a	λ	μ	b	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
0	1.528	2.472	4	-1.76469035	-0.6302549
0	0.944304	1.528	2.472	-1.53100712	-1.76469035
0.944304	1.528	1.88842013	2.472	-1.76469035	-1.54334736
0.944304	1.30495636	1.528	1.88842013	-1.75945322	-1.76469035
1.30495636	1.528	1.66553697	1.88842013	-1.76469035	-1.71362958
1.30495636	1.44269815	1.528	1.66553697	-1.77547549	-1.76469035

Plantear Caso de Maximización

