

# **Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias (EDOs)**

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

JTP: Ing. Amalia Rueda

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si  $y = f(x)$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la  
variable dependiente  
respecto de la independiente

La denominación de “ordinaria” se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Expresión implícita:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

**Orden:** máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

**Grado:** grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

**Lineal:** la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

**No Lineal:** la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$$y' - \cos(\omega x) = 0$$

EDO lineal de 1er orden y 1er grado

$$y'' + k^2 y = 0$$

EDO lineal de 2do orden y 1er grado

$$(y'')^3 - xyy' + y = 0$$

EDO no lineal de 2do orden y 3er grado

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Diremos que una función  $y: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada  $n$ -ésima de  $y$  en todo punto del intervalo  $[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$  para todo  $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$

Para encontrar  $y(x)$  (solución) es necesario efectuar  $n$  integraciones, lo cual implica que deben aparecer  $n$  constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1} \end{array} \right.$$

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) = 0 \quad x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{array} \right.$$

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \\ F_2(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \end{cases}$$

Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

Las EDOs de orden  $n$  se pueden transformar en  $n$  EDOs de 1er orden mediante un cambio de variables:

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \quad \text{EDO original}$$

$$\left. \begin{array}{l} y \\ y' = y_1 \\ y'' = y_1' \rightarrow y_1' = y_2 \\ y''' = y_1'' = y_2' \rightarrow y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y^{n-1} = y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y^n = y'_{n-1} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_{n-1} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Nos interesan los métodos para resolver EDOs de 1er orden

Sistema de  $n$  EDOs de 1er orden equivalente

## Problema de Valores de Contorno:

- Deben establecerse condiciones en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio.
- En el espacio o dominio unidimensional hay dos puntos frontera, en  $x=a$  y  $x=b$  si el dominio es el intervalo cerrado  $[a,b]$ .
- El orden mínimo de una EDO para un problema de valores de frontera es  $n=2$ .

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

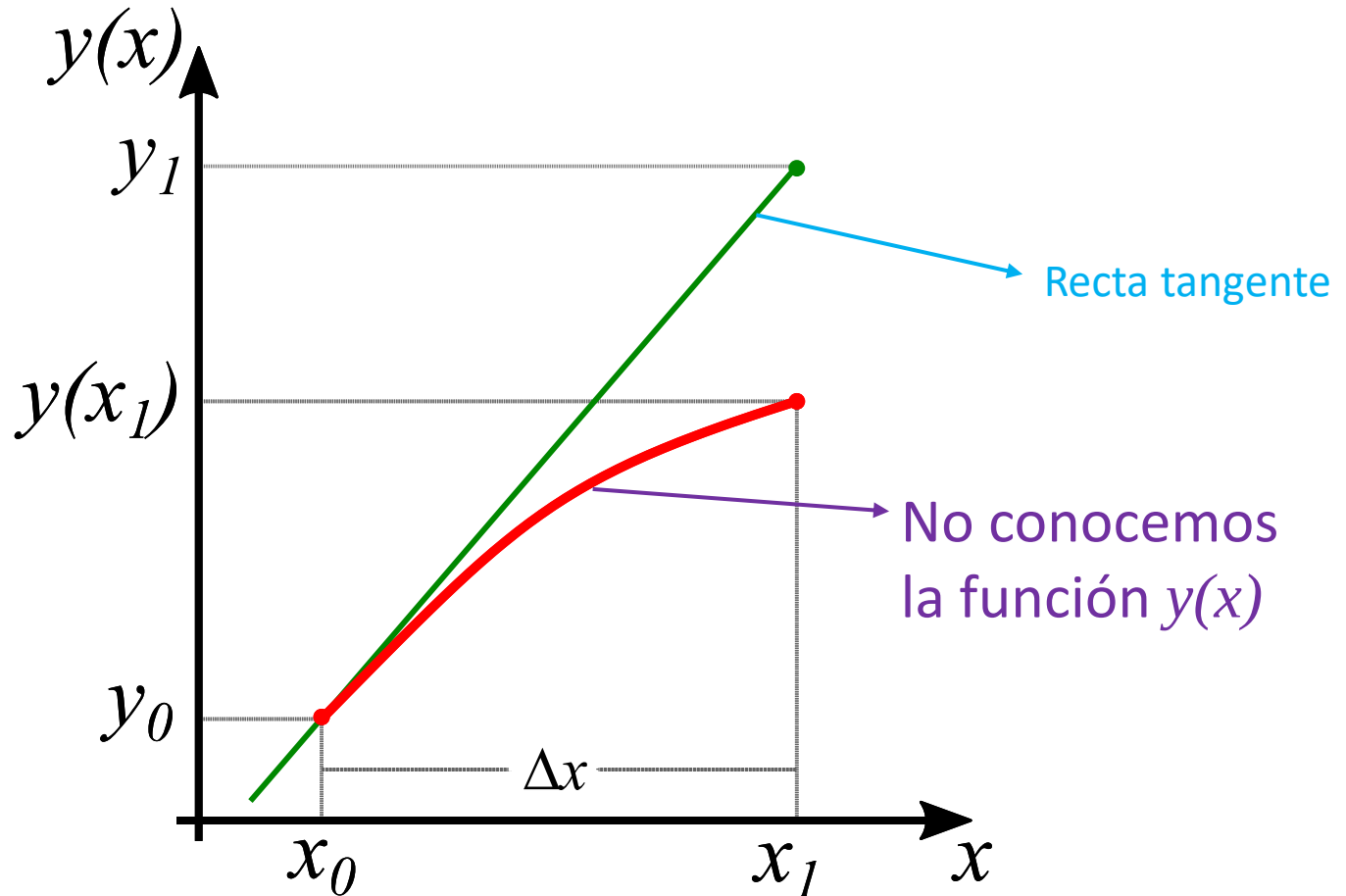
- Evaluación explícita de  $f(x, y(x))$  y sus derivadas.
- Avance paso a paso en el tiempo sin utilizar procedimientos iterativos.
- Métodos más difundidos:
  - Euler
  - Runge – Kutta de 4to. orden

## *Ventajas*

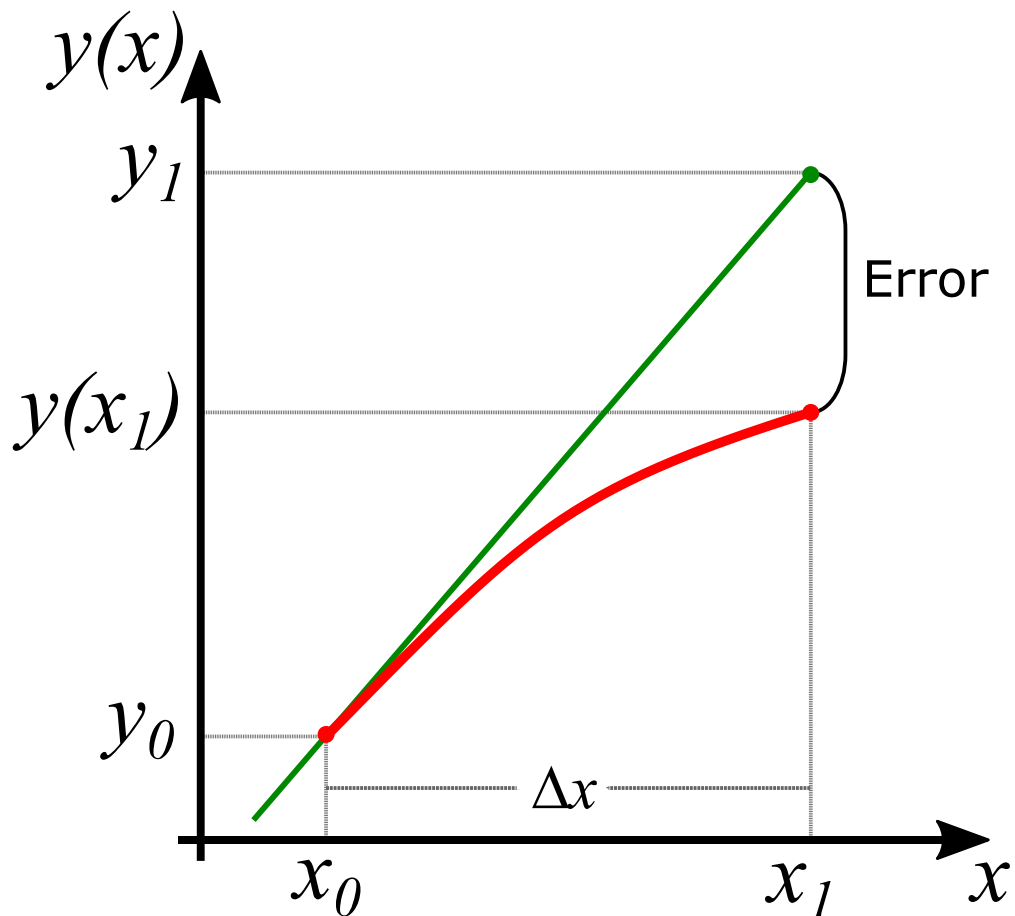
- Sencillo
- Programación rápida
- Bueno para  $h$  del orden  $< 0,1$

## *Desventajas*

- Dada su inexactitud suele tener limitaciones en algunos problemas prácticos.
- Inestabilidad para  $\Delta x$  grande



$y' = f(x, y)$  No se conoce la función y pero conocemos su derivada  
¿Cómo se podemos estimar el valor de la función en  $x_1$ ?



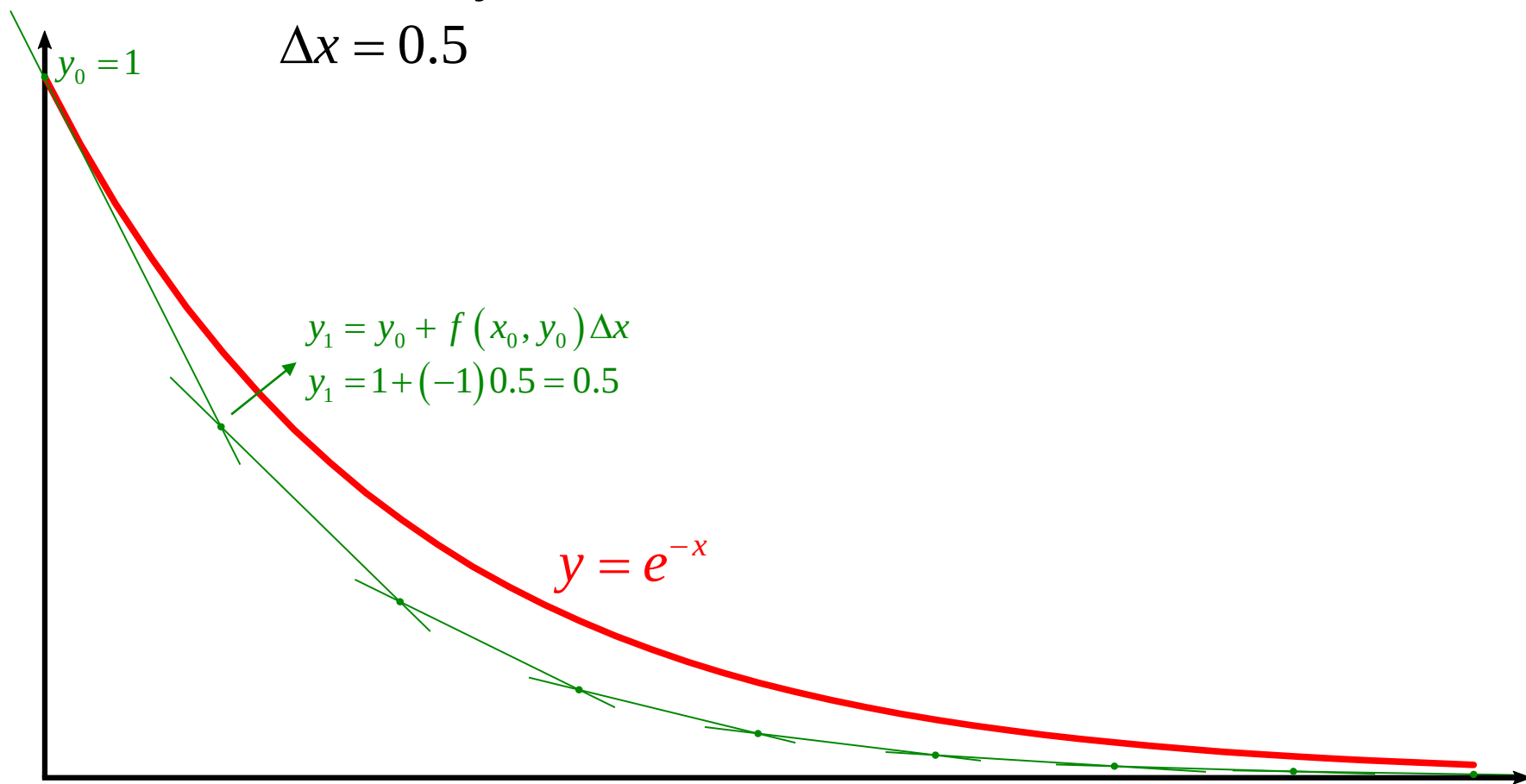
Algoritmo:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$$

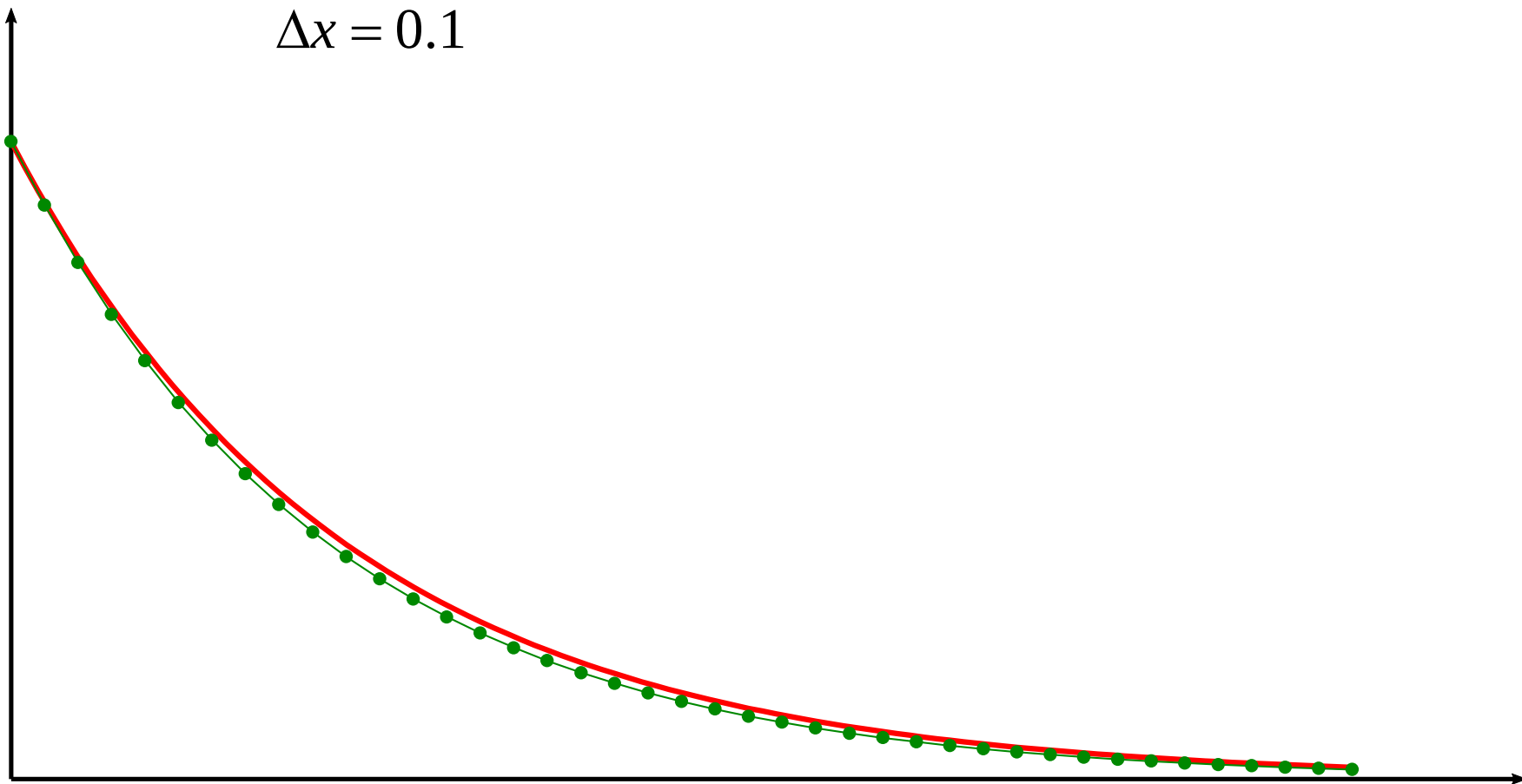
Ejemplo:  $\frac{dy}{dx} = -y$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$\Delta x = 0.5$



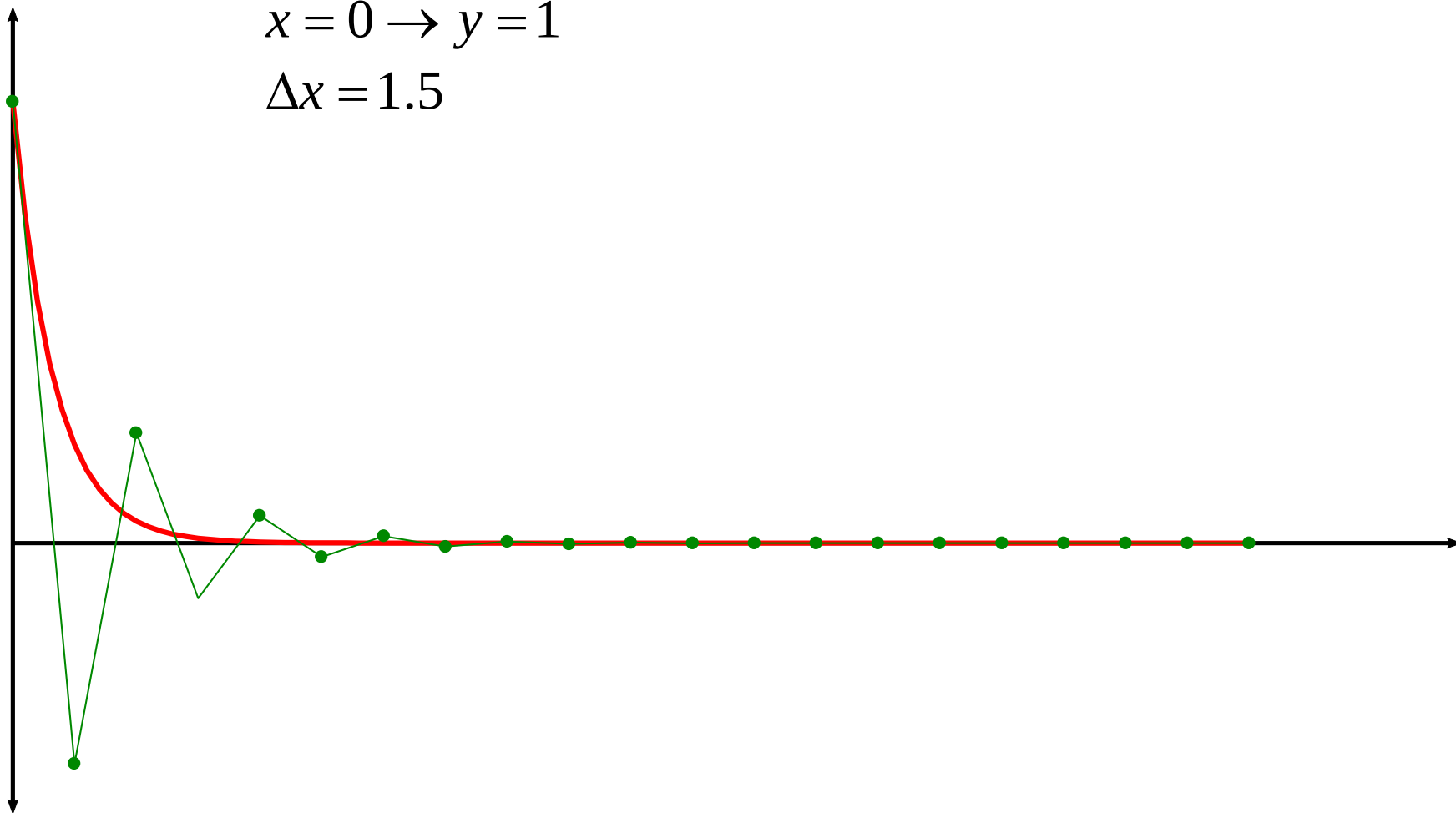
Ejemplo:  $\frac{dy}{dx} = -y$   
 $x = 0 \rightarrow y = 1$   
 $\Delta x = 0.1$



Ejemplo:  $\frac{dy}{dx} = -y$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$\Delta x = 1.5$



- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{ingresa al sistema} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{abandona el sistema} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de la masa dentro del sistema} \end{array} \right]$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

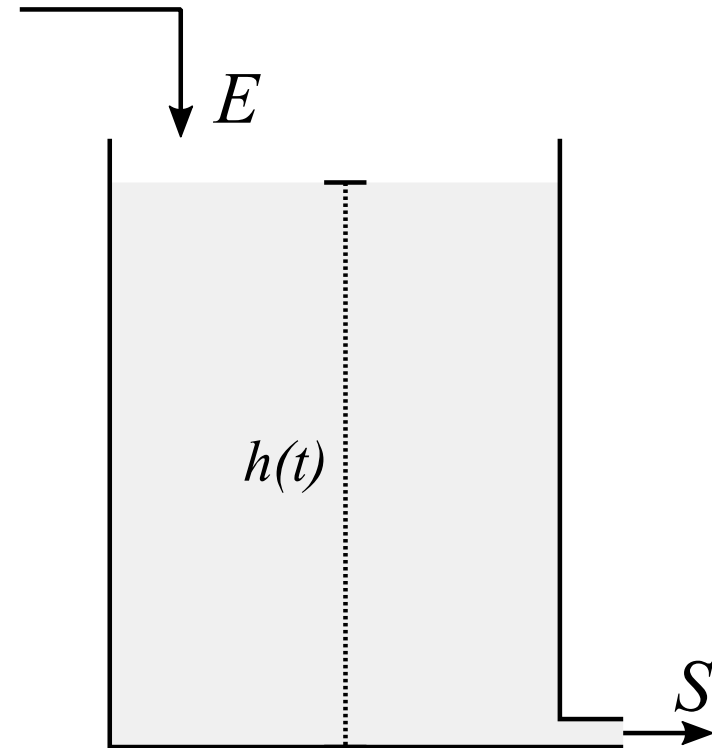
$$\left[ \begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right]$$

Las unidad de esta ecuación es moles/tiempo

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

*Hipótesis:*

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



- Balance de materia en el tanque: **Acumulación = Entrada – Salida**

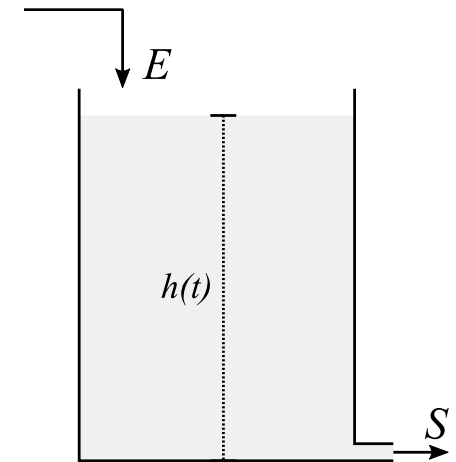
$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

$M \rightarrow$  Masa de fluido dentro del tanque  
 $m_e \rightarrow$  Flujo masico de entrada de fluido  
 $m_s \rightarrow$  Flujo masico de salida de fluido

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

$\rho$  cte  
 $A_T$  cte



$$m_e = \rho E \quad E \rightarrow \text{Caudal volumetrico de entrada}$$

$$m_s = \rho S \quad S \rightarrow \text{Caudal volumetrico de salida}$$

$$m_s = \rho A_s v_s \quad A_s \rightarrow \text{Area de salida del tanque}$$

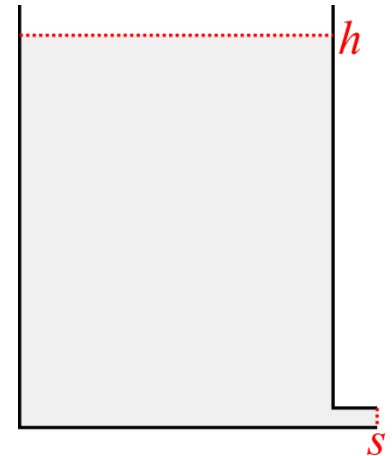
$$v_s \rightarrow \text{velocidad de salida del tanque}$$

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{v_h^2 \rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho gh = \frac{v_s^2 \rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho gh_s}$$

$v_h = 0$        $P_h = P_s$        $h_s = 0$

$$\rho gh = \frac{v_s^2 \rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$



Luego:  $\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

**EDO**

$t \rightarrow$  Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$  Variable dependiente (altura)

$t = 0 \rightarrow h = h_0$  (problema de valor inicial)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

function **f**=EDO1(**t**, **h**, **E**, **At**, **As**)

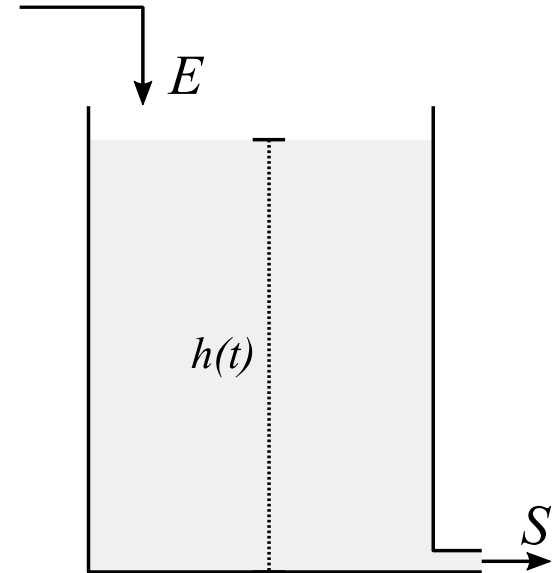
**g**=9.8; *//m.sec-2*

**f**=**E/At** - **As/At**\*sqrt(2\***g**\***h**);

endfunction

Ejemplo practico:

- Vaciado del tanque ( $E=0$ )
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos



$$A_T = \frac{\pi D_T^2}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_T \frac{dh}{dt} = -A_s \sqrt{2gh} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi D_T^2}{4} \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^2}{4} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^2}{D_T^2} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

Solución Utilizando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$$

$x \rightarrow$  Variable independiente

$y \rightarrow$  Variable dependiente

$\Delta x \rightarrow$  Incremento o salto

$$\frac{dh}{dt} = - \underbrace{2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}}_{f(x,y)}$$

Diagrama de anotaciones para la ecuación anterior:

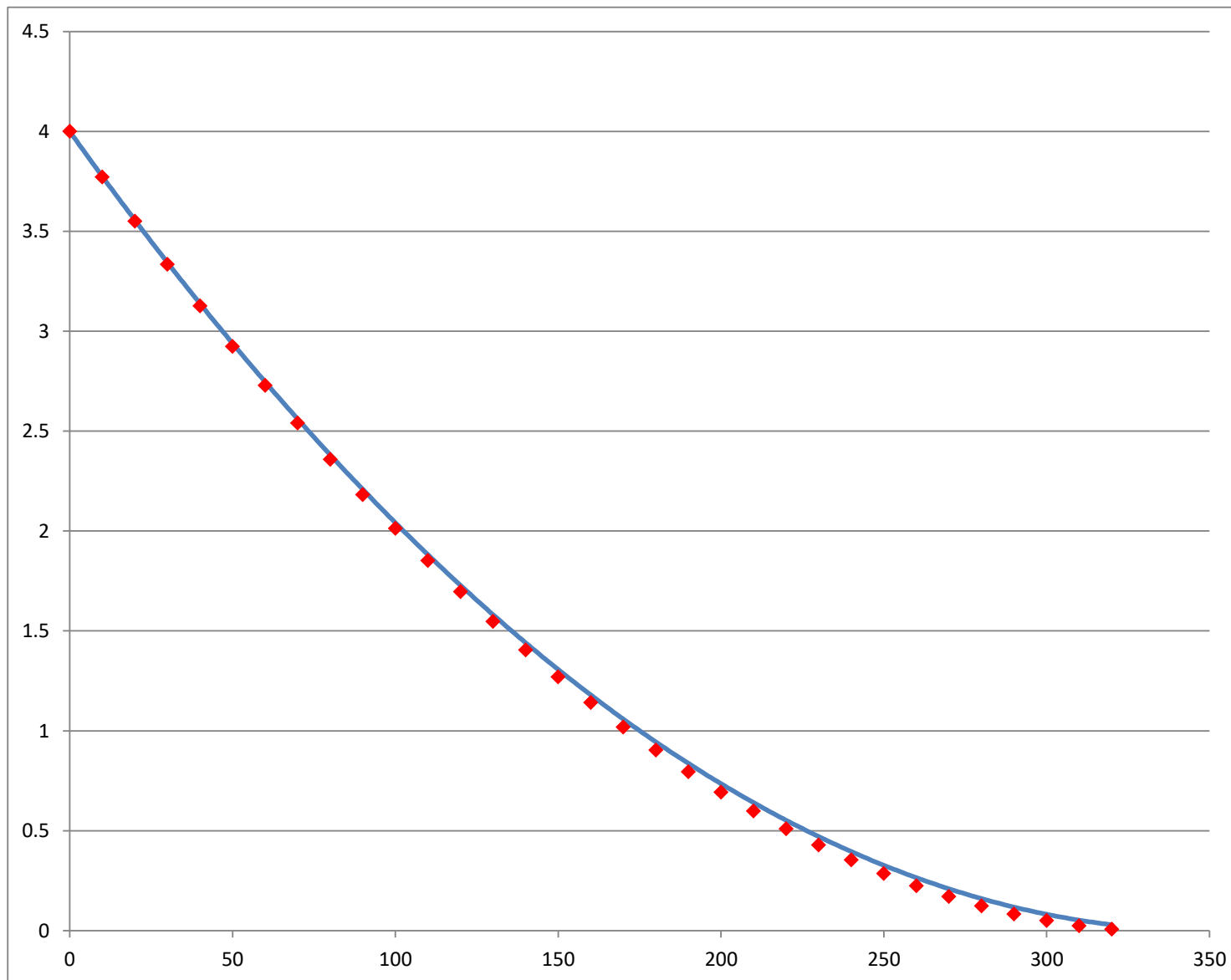
- Una flecha verde apunta desde el símbolo  $h$  en el numerador de  $\frac{dh}{dt}$  hacia el símbolo  $y$  en la ecuación general  $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x$ .
- Una flecha verde apunta desde el símbolo  $t$  en el denominador de  $\frac{dh}{dt}$  hacia el símbolo  $x$  en la ecuación general.
- Una corcheta verde subraya la expresión  $2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$ , con una flecha verde que apunta hacia el símbolo  $f(x,y)$  en la ecuación general.

$$h_{i+1} = h_i + f(t_i, h_i) \Delta t$$

Solución Utilizando el método de Euler ( $\Delta t = 10 \text{ seg}$ ):

| $i$ | $t$ | $h$ | $f$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 4   |     |

$$f(t, h) = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$



```
Dt= 1; //m
At=%pi*Dt*Dt/4; //m2
Ds= 0.0508; //m
As=%pi*Ds*Ds/4; //m2
E=0; //m3/seg
dt=10; //seg
tf= 320; //seg
t=0:dt:tf;
h_0=4; //m

h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
    h(i+1)=h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
end
```

- Los métodos Runge-Kutta introducen varios parámetros a determinar, y hacen un promedio pesado de la función  $f(x,y)$  evaluada en diferentes puntos.
- Son más precisos que los métodos de Euler.
- En general los métodos Runge – Kutta tienen algoritmos de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \phi \Delta x$$

Incremento

- Según se defina el incremento tenemos R-K de 2º, 3º o 4º orden.

- Dada la siguiente EDO:  $y' = f(x, y)$
- Runge-Kutta de 2do orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \phi \Delta x$$

Donde:

$$\phi = k_2$$

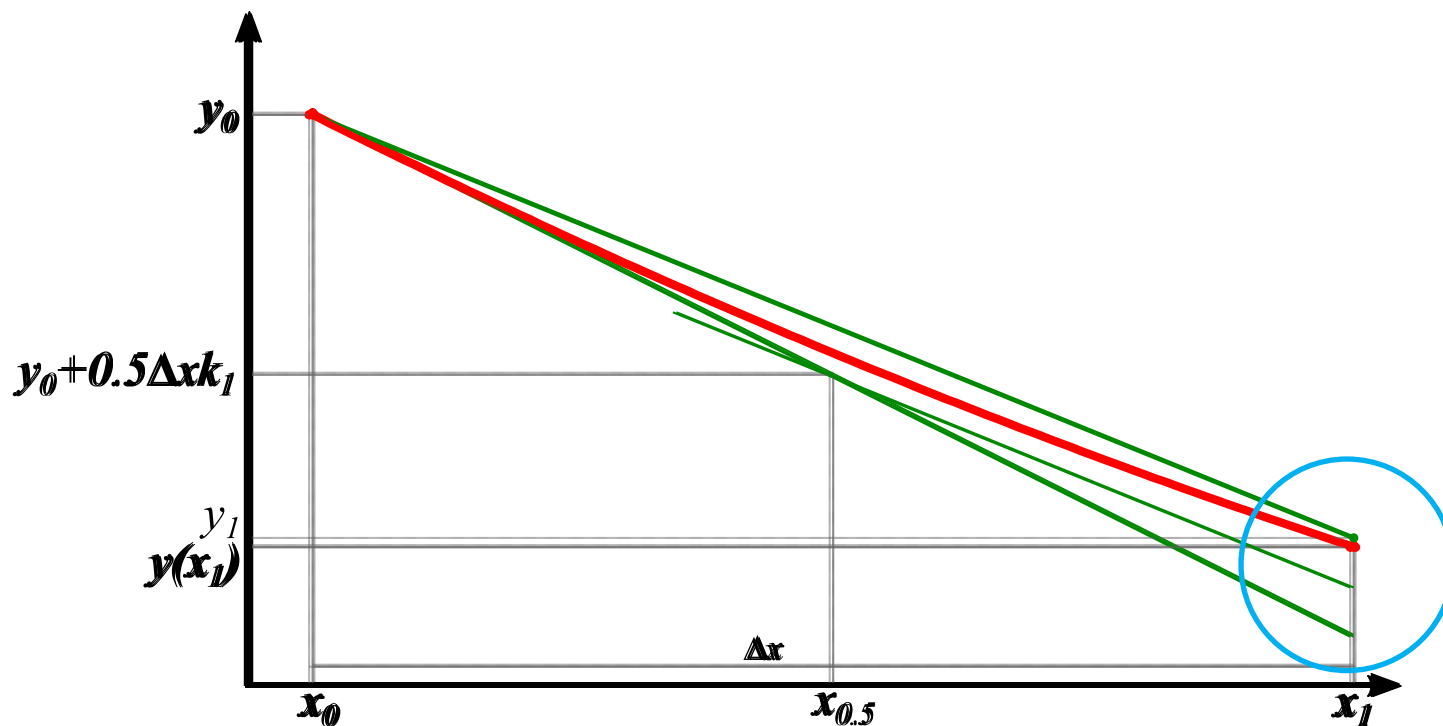
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1)$$

$$\emptyset = k_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset \Delta x \quad k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1)$$



- Runge-Kutta de 3er orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

$$\text{Donde: } \varnothing = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1)$$

$$k_3 = f(x_{i+1}, y_i + 2\Delta x k_2 - \Delta x k_1)$$

- Runge-Kutta de 4to orden (mas difundido) corresponde a:

$$\varnothing = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1)$$

$$k_3 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_2)$$

$$k_4 = f(x_{i+1}, y_i + \Delta x k_3)$$

Solución Utilizando Runge-Kutta de 4er orden :

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh} \rightarrow f(t, h) = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \varnothing \Delta t \quad \varnothing = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, h_i)$$

$$k_2 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta tk_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta tk_2) \quad k_4 = f(t_{i+1}, h_i + \Delta tk_3)$$

| $i$ | $t$ | $h$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ |
|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| 0   | 0   | 4   |       |       |       |       |
| 1   | 1   |     |       |       |       |       |

Ejemplo para  $t=0$  ( $i=0$ ):

$$\begin{cases} \varnothing = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ h_1 = h_0 + \varnothing \Delta t \end{cases}$$

$$f(t, h) = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$k_1 = f(t_i, h_i) \rightarrow k_1 = f(0, 4)$$

$$k_2 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1) \rightarrow k_2 = f(0.5, 4 + 0.5 \times 1 \times k_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2) \rightarrow k_3 = f(0.5, 4 + 0.5 \times 1 \times k_2)$$

$$k_4 = f(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3) \rightarrow k_4 = f(1, 4 + 1 \times k_3)$$

$$k_1 = f(t_i, h_i) \quad k_2 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2) \quad k_4 = f(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3)$$

$h(1) = h_0;$

for  $i = 1 : \text{length}(t) - 1$

$k1 = \text{EDO1}(t(i), h(i), E, At, As);$

$k2 = \text{EDO1}(t(i) + 0.5 * dt, h(i) + 0.5 * dt * k1, E, At, As);$

$k3 = \text{EDO1}(t(i) + 0.5 * dt, h(i) + 0.5 * dt * k2, E, At, As);$

$k4 = \text{EDO1}(t(i) + dt, h(i) + dt * k3, E, At, As);$

$\text{delta} = (1/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);$

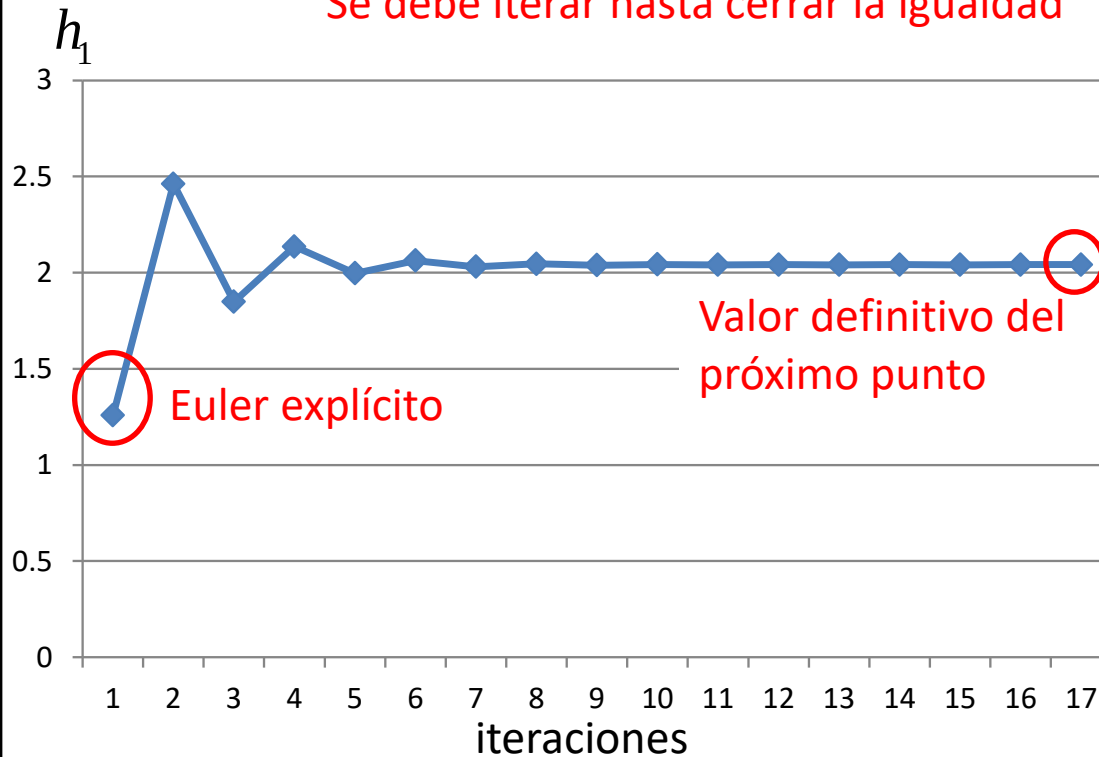
$h(i+1) = h(i) + dt * \text{delta};$

end

- El avance se realiza paso a paso en el tiempo pero se realiza un proceso iterativo para dar por finalizado el paso.
- Métodos más difundidos:
  - Euler implícito
  - Euler-Gauss

Algoritmo:  $y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \Delta x$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad



$$\frac{dh}{dt} = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + f_i(t_{i+1}, h_{i+1}) \Delta t$$

$$h_0 = 4 \text{ m}$$

$$\Delta t = 120 \text{ seg}$$

$$h_{i+1} = h_i - 2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh_{i+1}} \Delta t$$

$$h_{i+1} = h_i + f(t_{i+1}, h_{i+1}) \Delta t$$

```
function h1=EULERIMP(h1)
```

```
    f1=EDO1(t1,h1,E,At,As)
```

```
    h1 = h0 + f1*dt;
```

```
endfunction
```

```
h(1)=h_0;
```

```
for i=1:length(t)-1
```

```
    h(i+1) = h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
```

```
    t1 = t(i) + dt;
```

```
    h0 = h(i);
```

```
    h(i+1) = wegstein(EULERIMP,h(i+1),1e-6);
```

```
end
```

Algoritmo:

$$\underline{y_{i+1}} = y_i + \frac{\Delta x}{2} \left[ f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \underline{y_{i+1}}) \right]$$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

Análisis:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta x}{2} \left[ f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} \left[ \boxed{y_i + f(x_i, y_i)} + \boxed{y_i + f(x_{i+1}, y_{i+1})} \right]$$

Euler explícito

Euler implícito

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{2} \left( -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh_i} - 2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh_{i+1}} \right)$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{2} \left[ f(t_i, h_i) + f(t_{i+1}, h_{i+1}) \right]$$

```
function h1=EULERGAUSS(h1)
    f1=EDO1(t1,h1,E,At,As)
    f0=EDO1(t0,h0,E,At,As)
    h1 = h0 + (f1 + f0)*dt/2;
endfunction
```

```
h(1)=h_0;
```

```
for i=1:length(t)-1
```

```
    h(i+1) = h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
```

```
    t1 = t(i) + dt;
```

```
    h0 = h(i);
```

```
    t0 = t(i);
```

```
    h(i+1) = wegstein(EULERGAUSS,h(i+1),1e-5);
```

```
end
```

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^2 \ln y$$

- Identificar la variable independiente y dependiente.
- Resolver en el intervalo  $[0,1]$ .
- $\Delta t=0.1$  e  $y(0)=1.1$ .

**22.16** A spherical tank has a circular orifice in its bottom through which the liquid flows out (Fig. P22.16). The flow rate through the hole can be estimated as

$$Q_{\text{out}} = C A \sqrt{2gh}$$

where  $Q_{\text{out}}$  = outflow ( $\text{m}^3/\text{s}$ ),  $C$  = an empirically derived coefficient,  $A$  = the area of the orifice ( $\text{m}^2$ ),  $g$  = the gravitational constant ( $= 9.81 \text{ m/s}^2$ ), and  $h$  = the depth of liquid in the tank. Use one of the numerical methods described in this chapter to determine how long it will take for the water to flow out of a 3-m diameter tank with an initial height of 2.75 m. Note that the orifice has a diameter of 3 cm and  $C = 0.55$ .

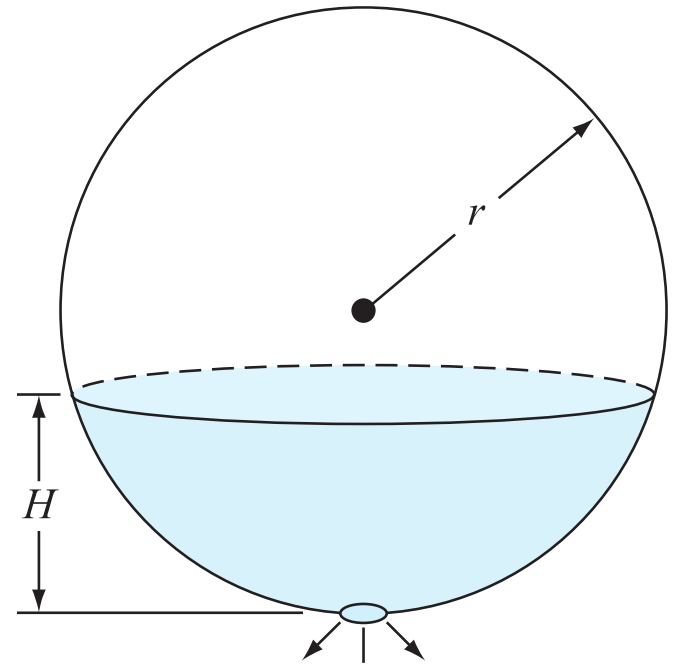
$$\frac{dM}{dt} = \cancel{m_{in}} - m_{out}$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 3r - \rho \frac{1}{3} \pi H^3$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{1}{3} \pi 3r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \frac{1}{3} \pi 3H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$



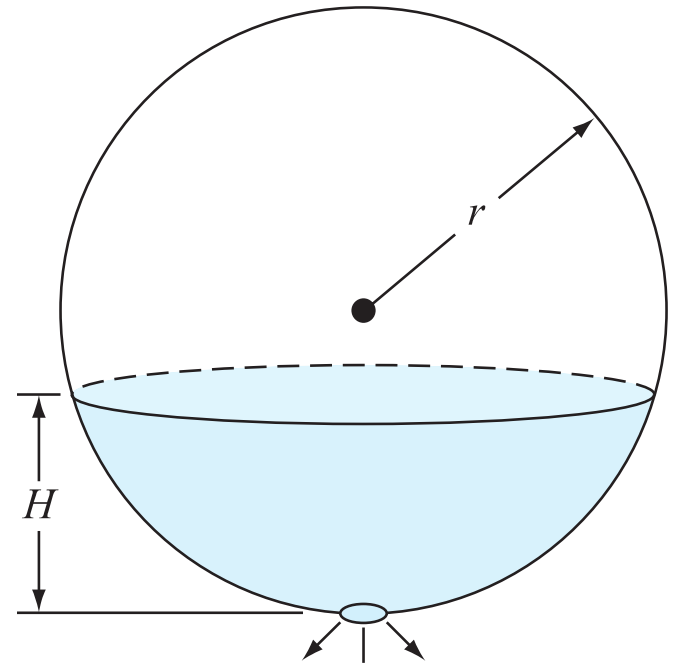
$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r^2 H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi (2rH - H^2) \frac{dH}{dt}$$

$$m_{out} = \rho Q_{out} = \rho C A \sqrt{2gH}$$

$$m_{out} = \rho C \pi \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

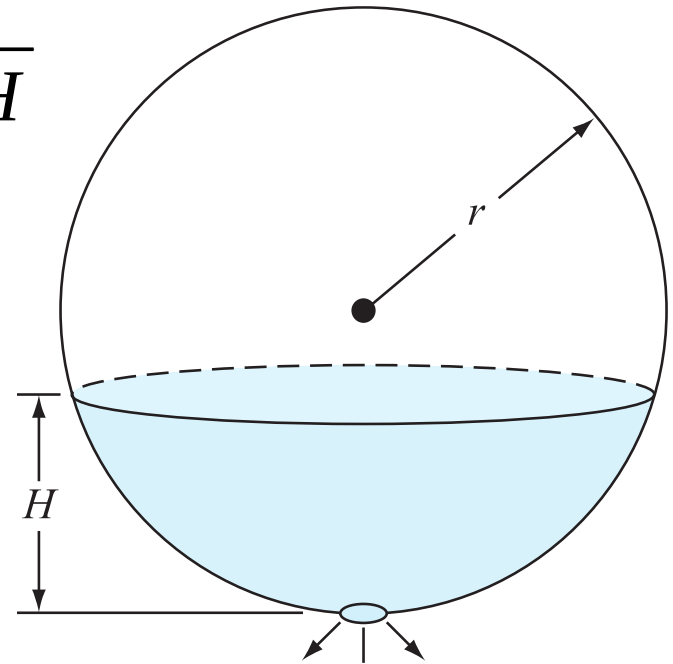
$$\rho \pi (2rH - H^2) \frac{dH}{dt} = -\rho C \pi \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$



$$\cancel{\rho} \pi (2rH - H^2) \frac{dH}{dt} = -\cancel{\rho} C \cancel{\pi} \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

$$(2rH - H^2) \frac{dH}{dt} = -C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}}{(2rH - H^2)}$$



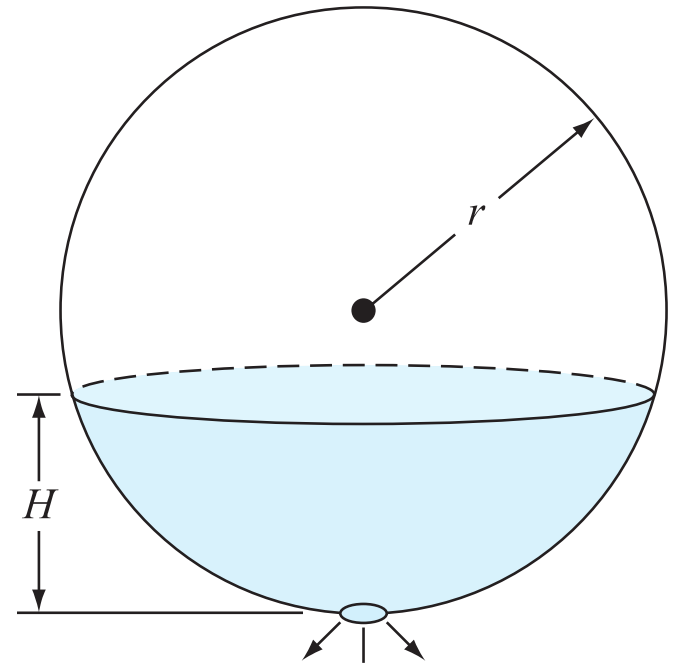
$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C \frac{D_o^2}{4} \sqrt{2gH}}{(2rH - H^2)}$$

$C : 0.55$

$D_o : 0.03\text{m}$

$r : 1.5\text{m}$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-1.2375 \times 10^{-4} \sqrt{19.6H}}{(3H - H^2)}$$



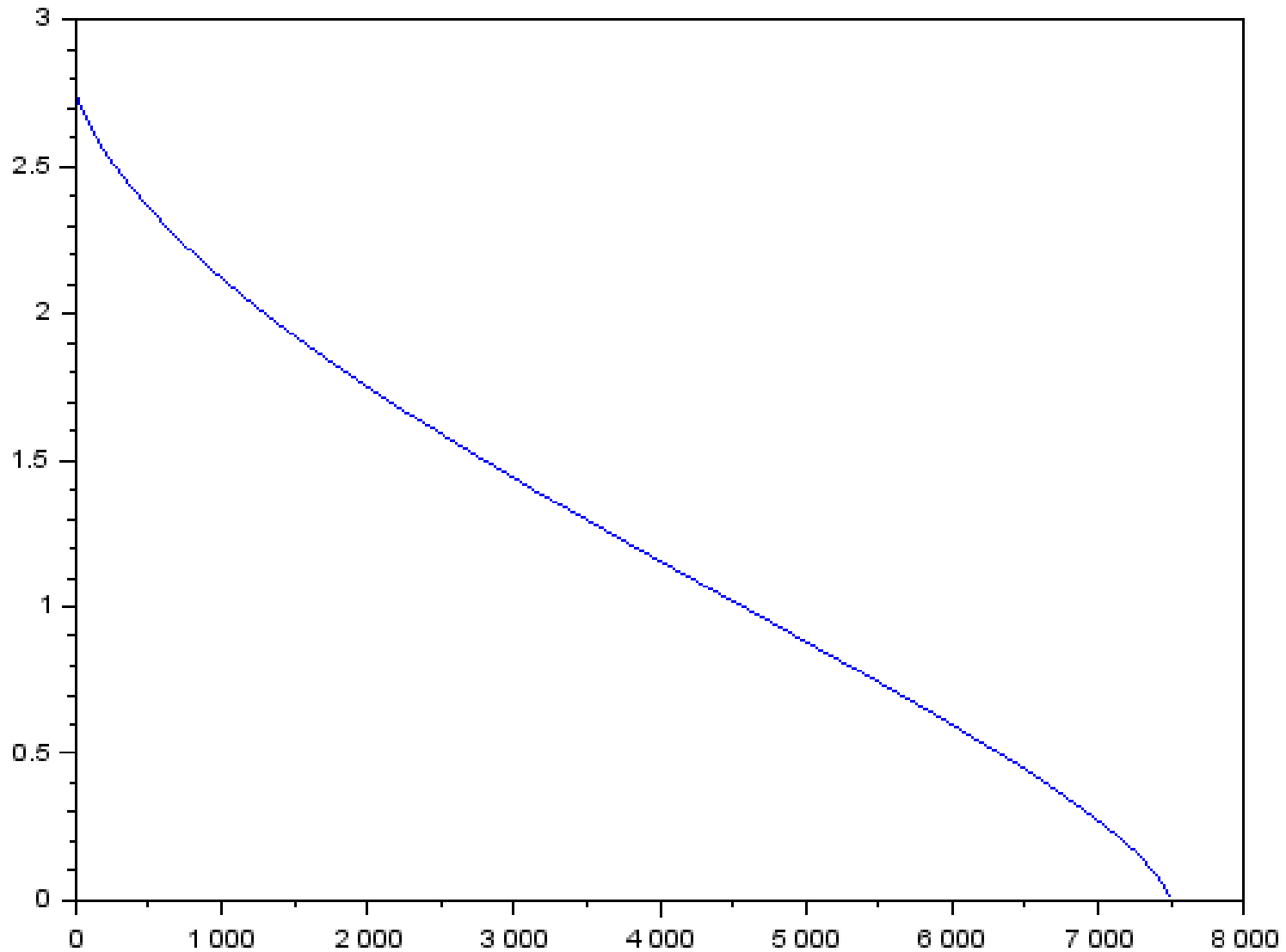
Solución Utilizando el método de Euler:

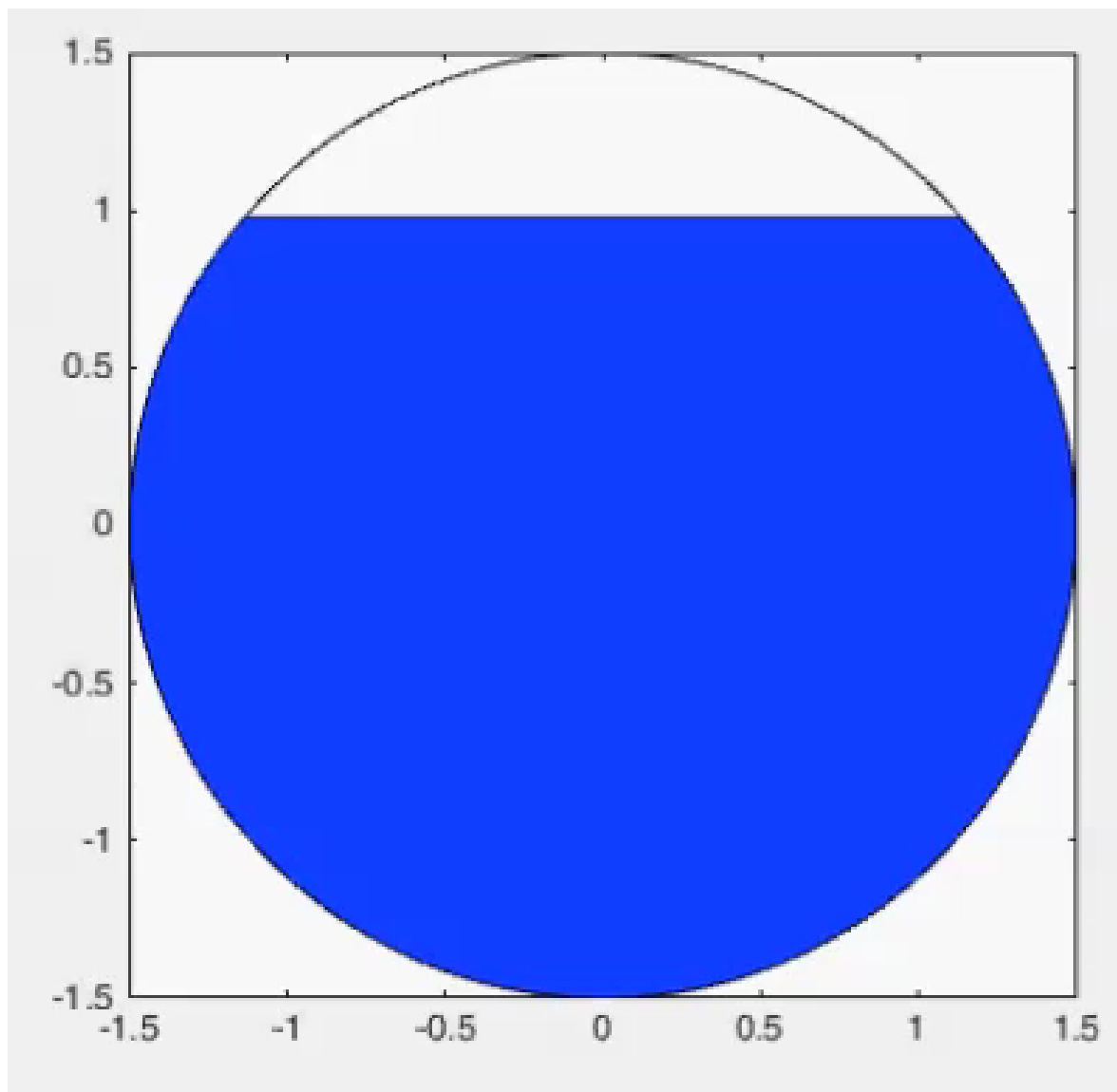
| $i$ | $t$ | $h_i$ | $f(t_i, H_i)$ |
|-----|-----|-------|---------------|
|     |     |       |               |
|     |     |       |               |
|     |     |       |               |
|     |     |       |               |

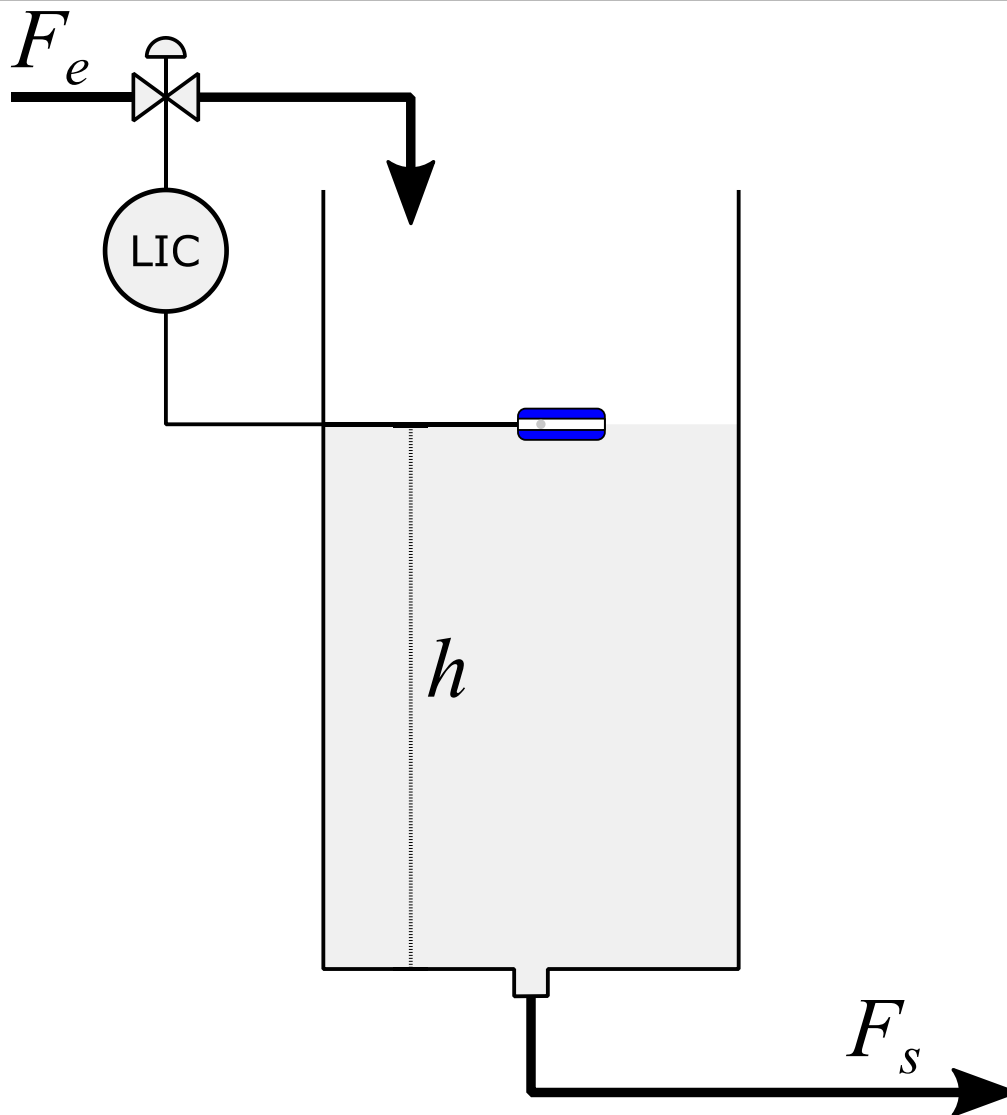
$$f(t, H) = \frac{-1.2375 \times 10^{-4} \sqrt{19.6H}}{(3H - H^2)}$$

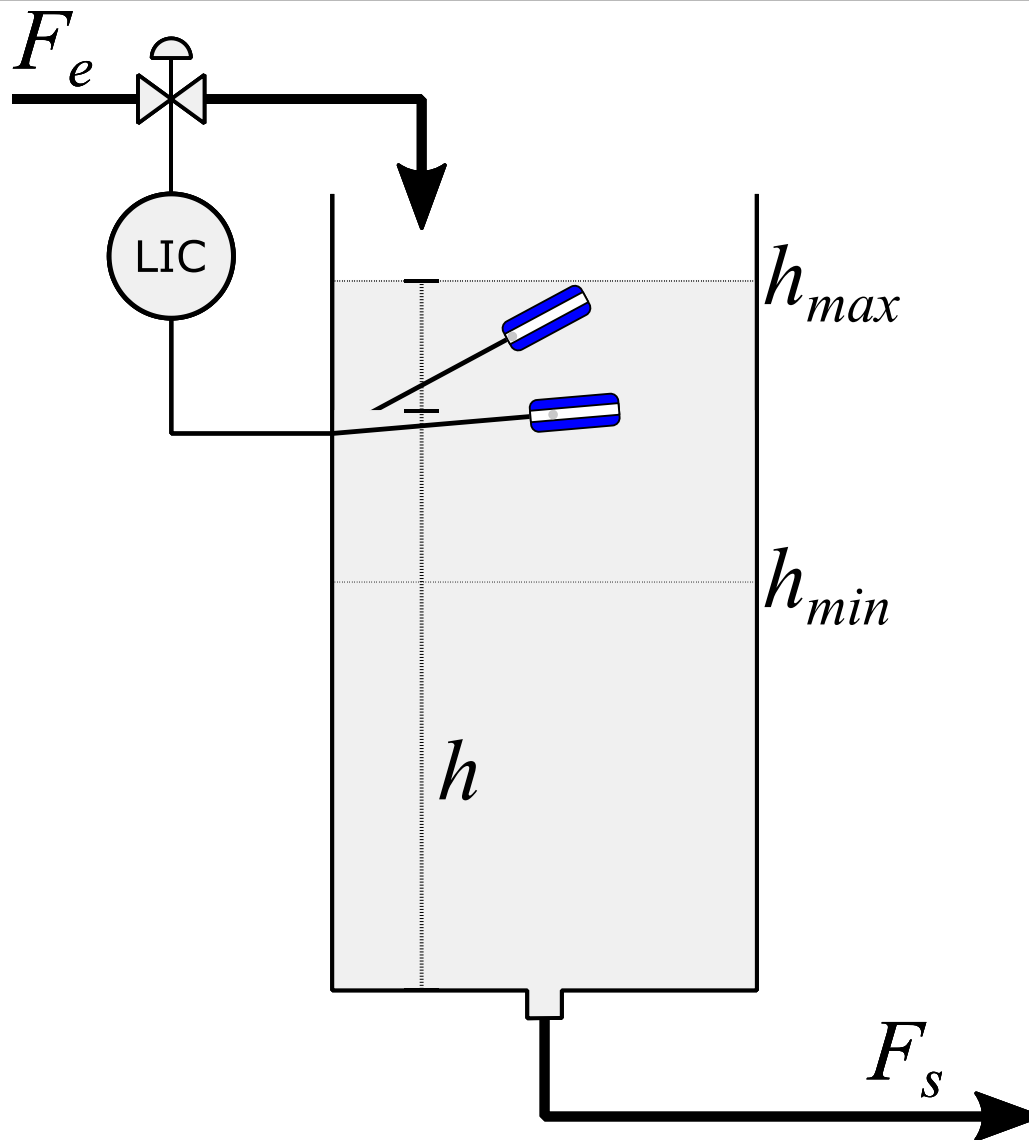
```
clear
clc
function y=f(H)
y=-1.2375e-4*sqrt(19.6*H)/(3*H-(H^2));
endfunction

H(1)=2.75;
t(1)=0;
dt=1;
i=1;
while H(i) > 0.01
H(i+1) = H(i) + f(H(i))*dt;
t(i+1) = t(i) + dt;
i=i+1;
end
plot(t,H)
tiempo=t(i)/3600 → 2.08 horas
```



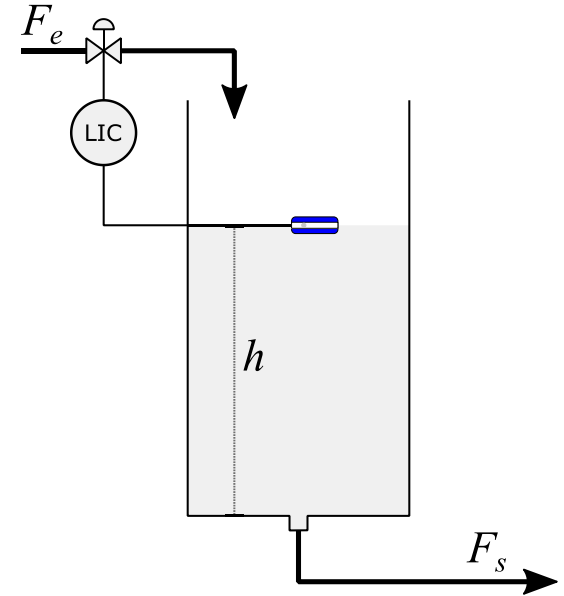






## *Hipótesis:*

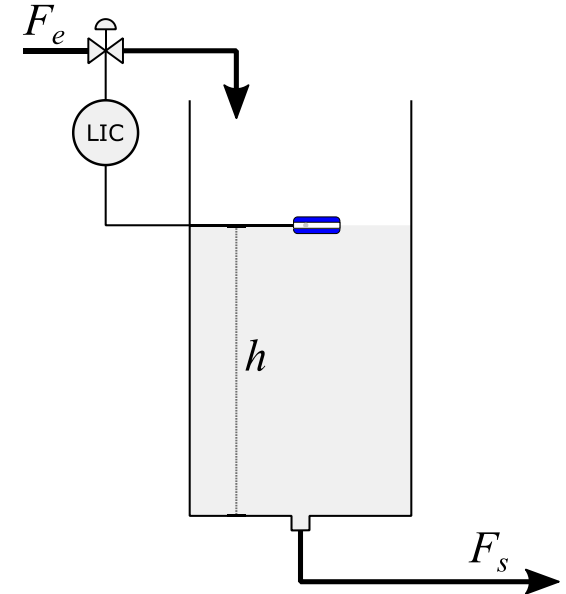
- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Control on/off mediante un flotante



- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

Similar al tanque abierto con salida gravitatoria



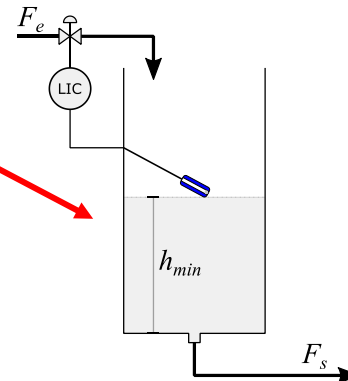
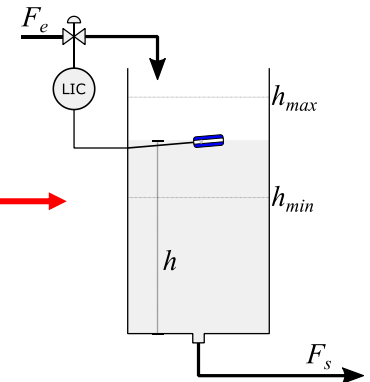
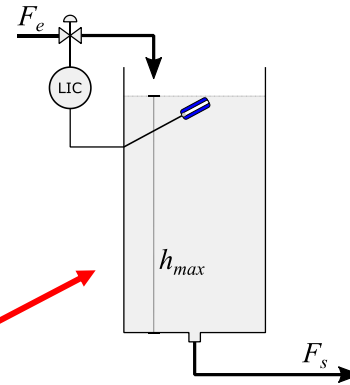
- Caudal de entrada:

$F_{e_i}$  {

*si*  $h_i \geq h_{\max}$

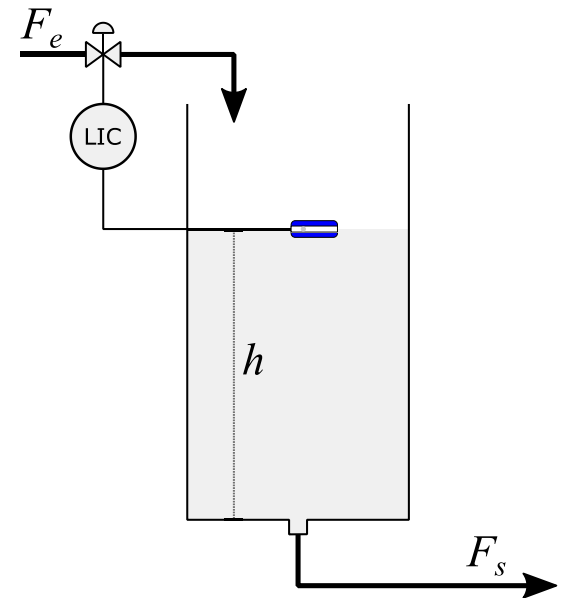
*si*  $h_{\min} < h_i < h_{\max}$

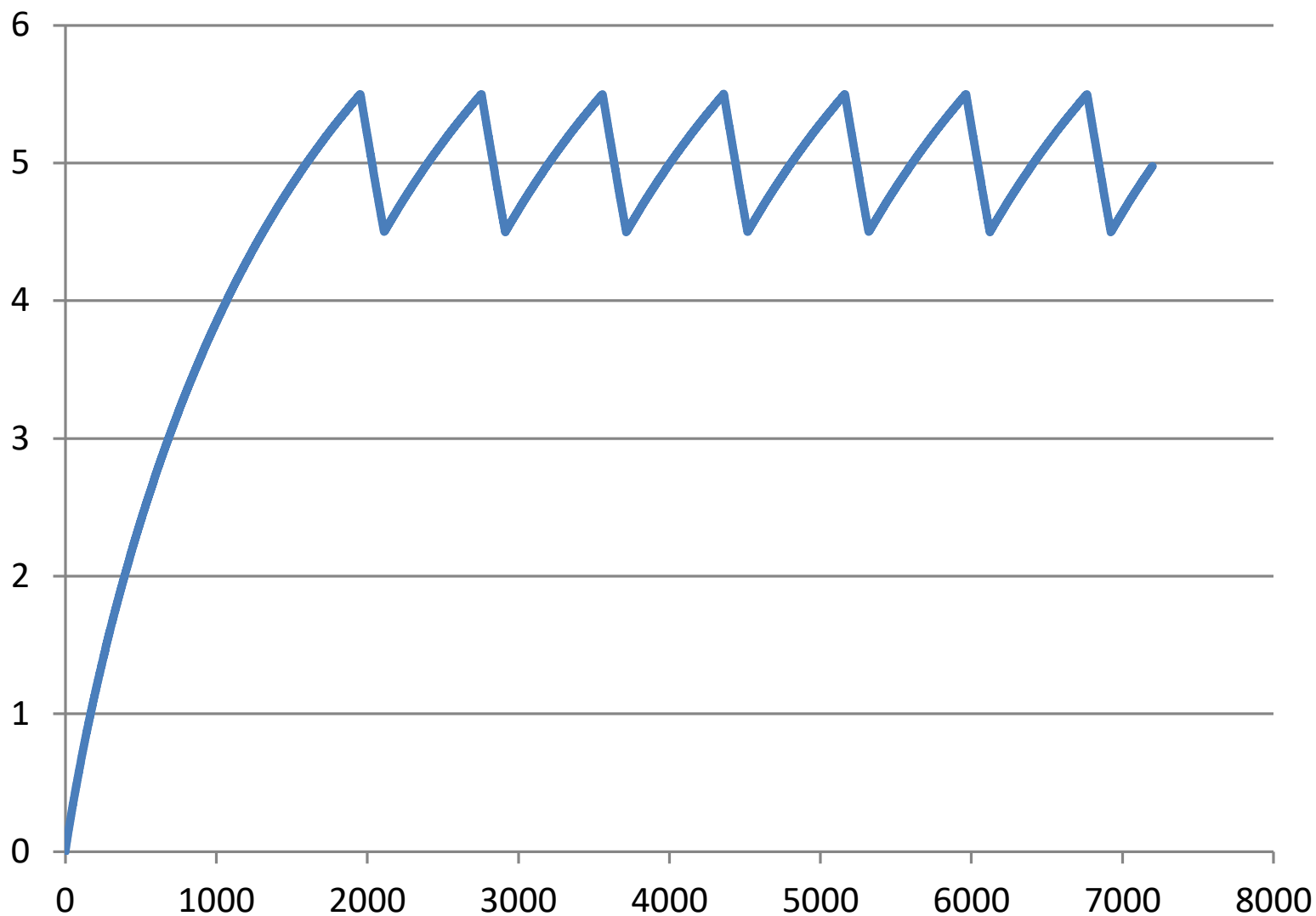
*si*  $h_i \leq h_{\min}$

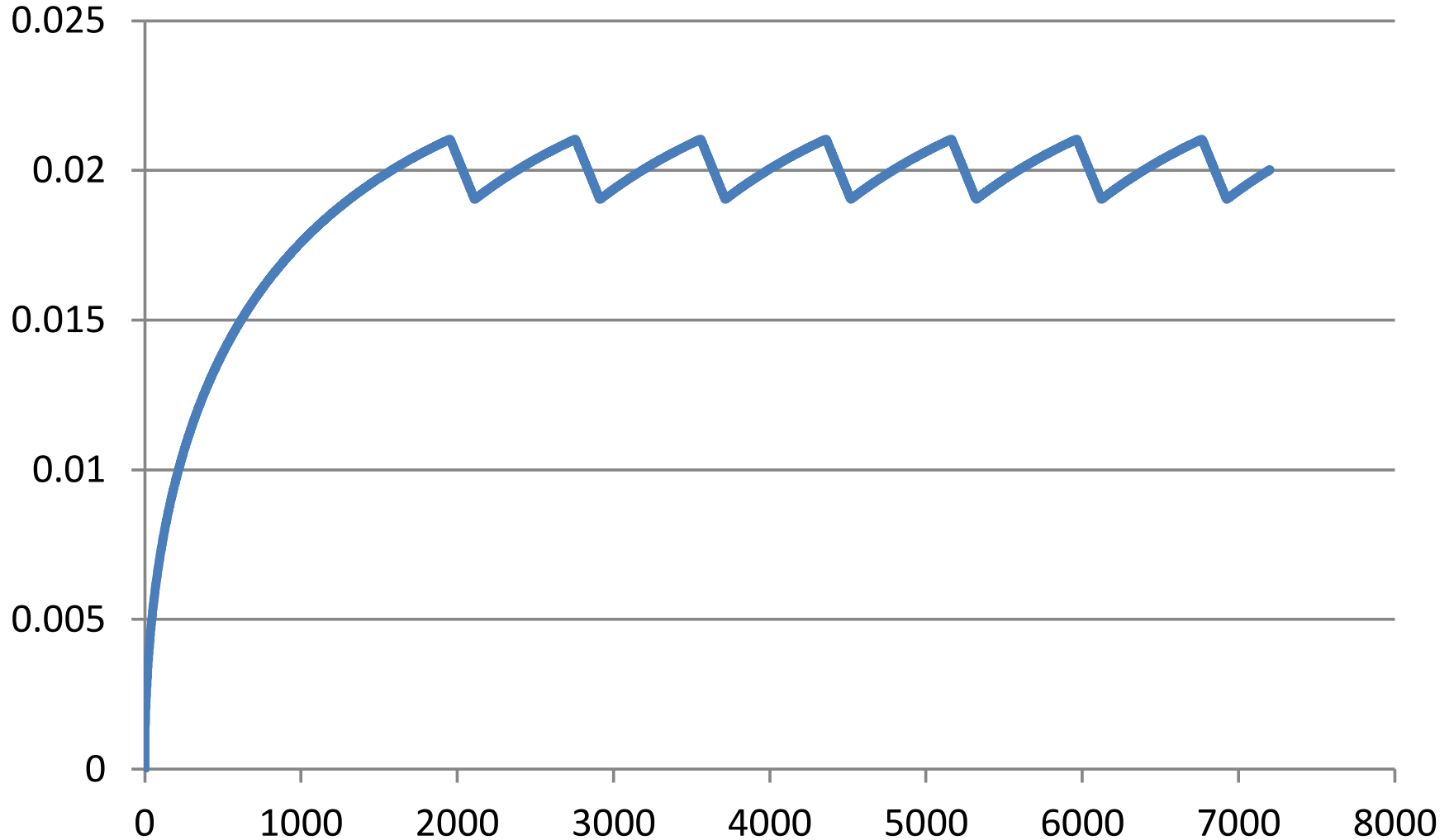


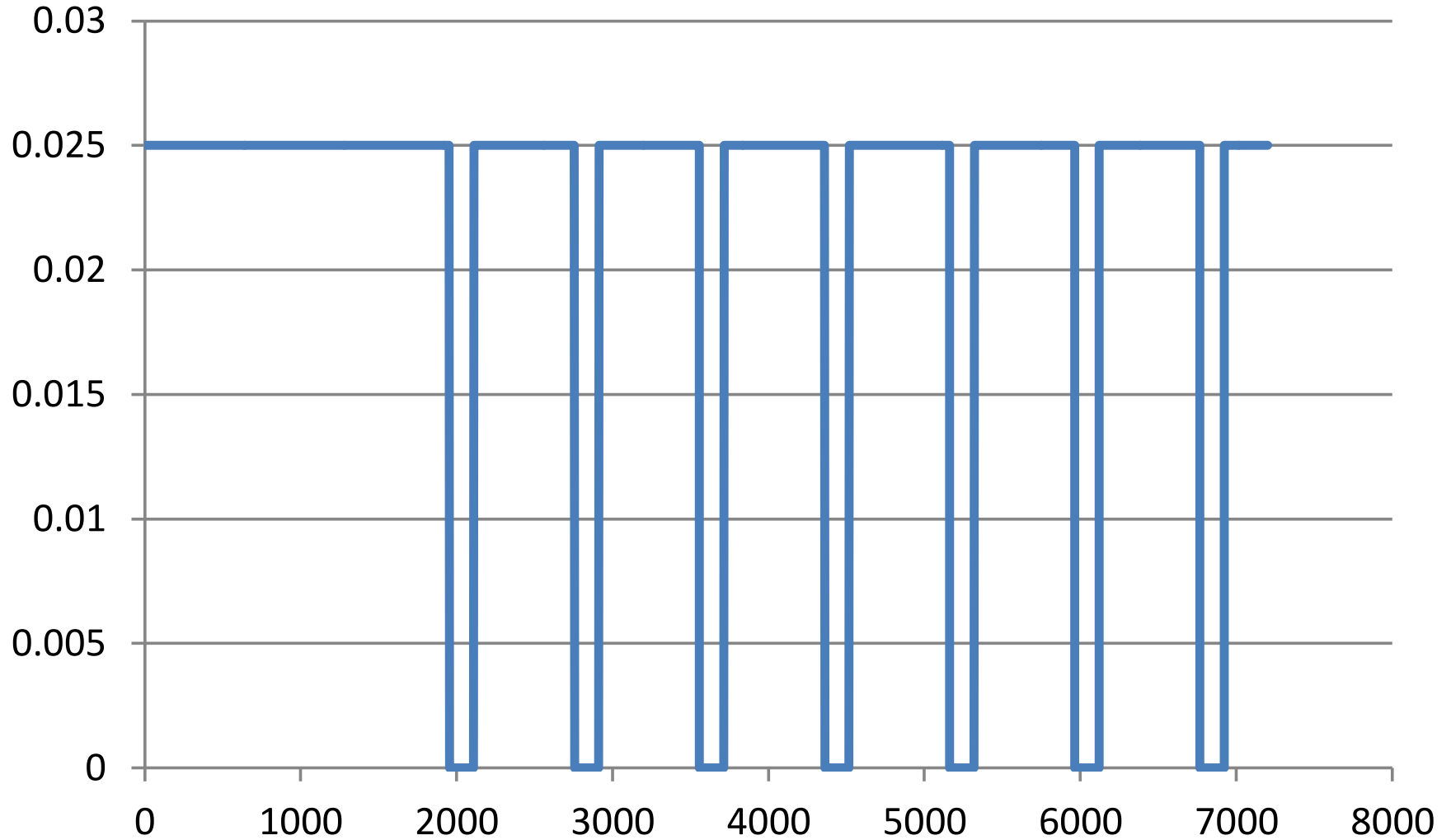
## Ejemplo practico:

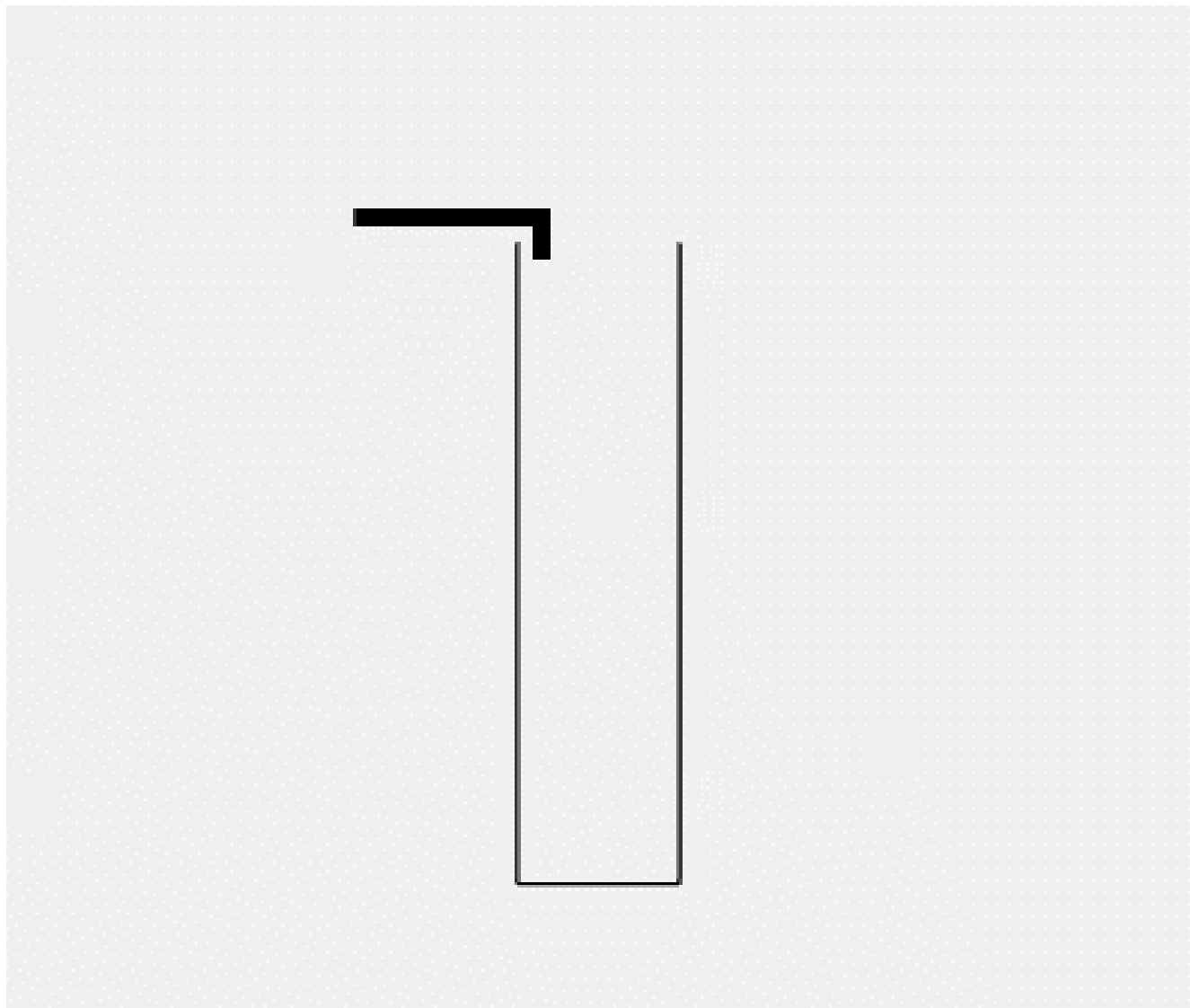
- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Diámetro del orificio de salida tanque: 0.0508 m
- Caudal de entrada al activarse la válvula:  $F=0.025 \text{ m}^3/\text{seg}$
- Rango del flotante:  $h_{min} = 4.5 \text{ m}$  y  $h_{max} = 5.5 \text{ m}$











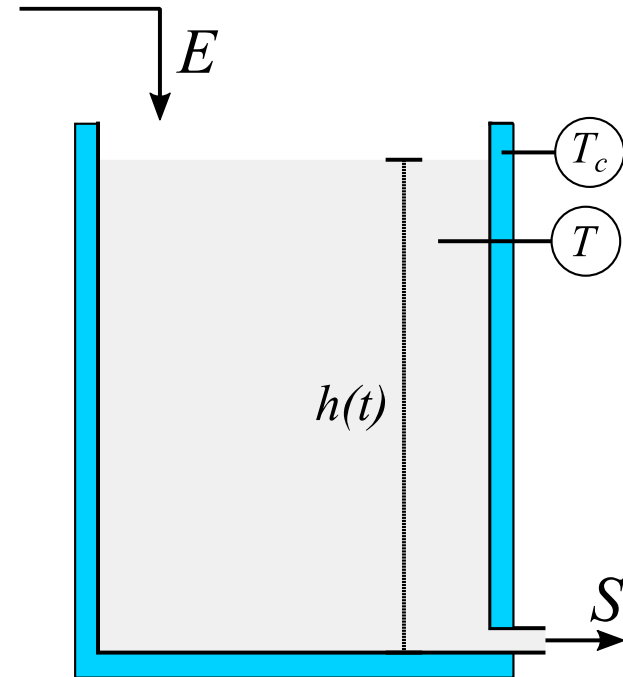
- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna, cinética y/o potencial} \\ \text{que ingresa al sistema} \\ \text{por conveccion o difusion} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna, cinética y/o potencial} \\ \text{que abandona el sistema} \\ \text{por conveccion o difusion} \end{array} \right] \\
 & \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Calor que ingresa al sistema} \\ \text{por conduccion, radiacion y/o reacción} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Trabajo realizado por el sistema} \\ \text{sobre sus alrededores} \\ \text{(Trabajo de Eje o mecanico y PV)} \end{array} \right] \\
 & = \left[ \begin{array}{l} \text{velocidad de variación de la energía} \\ \text{interna, cinética y/o potencial} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Las unidad de esta ecuación es energía/tiempo

## *Hipótesis asumida:*

- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Altura inicial conocida
- Temperatura inicial conocida
- Líquido perfectamente mezclado
- Se supone constante la temperatura de la camisa de calentamiento
- Calor específico del fluido constante



- Balance de materia en el tanque:

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_E - m_S$$

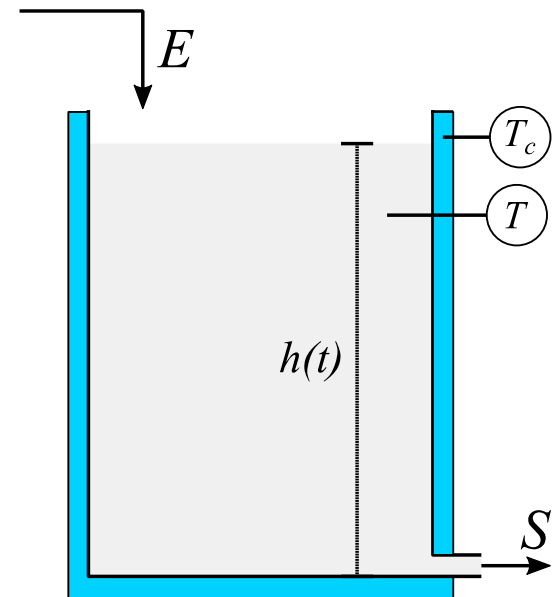
HOLDUP materia del tanque

$$\frac{dM_T}{dt} = m_E - m_S$$

Flujo másico de cada corriente

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

EDO 1



- Balance de energía en el tanque:

HOLDUP de materia

Las propiedades de salida son idénticas a la del interior del tanque

$$\frac{dM(U + \cancel{K} + \cancel{\phi})}{dt} = Q + m_E(U_E + \cancel{K_E} + \cancel{\phi_E}) - m_S(\cancel{U} + \cancel{K} + \cancel{\phi}) + m_E P_E v_E - m_S P_S v$$

$$\frac{dMU}{dt} = Q + m_E(U_E + P_E v_E) - m_S(U + P_S v)$$

$$\frac{dMU}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$\frac{dMH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

Para líquidos el termino  $Pv$  es despreciable frente a  $U$  por lo que se sigue la evolución de la entalpía del sistema

HOLDUP de energía

$MH \rightarrow$  Entalpía total del fluido dentro del tanque

$m_e H_e \rightarrow$  Entalpía total de entrada de fluido

$m_s H_s \rightarrow$  Entalpía total de salida de fluido

$Q \rightarrow$  Calor que ingresa por la camisa

$$\frac{dMH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$\frac{dM}{dt} H + M \frac{dH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$m_E = \rho F_E$$

$$m_S = \rho F_S = \rho A_s \sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_e - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

EDO 1

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

EDO 2

$$H = f(T)$$

$Q$  = Constante o ley funcional

2 EDOS

2 Ecuaciones Algebraicas

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$H = cp(T - T_0) \quad cp \rightarrow \text{Calor específico del fluido}$$

$$dH = cp dT \quad T_0 \rightarrow \text{Temperatura inicial tomada como referencia}$$

$$\rho A_T \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

$$\rho A_T \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) cp(T - T_0) + \rho A_T h cp \frac{dT}{dt} = Q + \rho F_E cp(T_E - T_0) - \rho A_s \sqrt{2gh} cp(T - T_0)$$

La temperatura de salida corresponde  
a la del fluido dentro del tanque

$$Q = UA_L (T_c - T)$$

$U \rightarrow$  Coeficiente de intercambio de calor  
 $T_c \rightarrow$  Temperatura de la camisa de calentamiento

$$A_L = A_T + \pi D_T h$$

$A_L \rightarrow$  Área de contacto del liquido con la camisa

$$\begin{aligned} & \rho A_T \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) cp(T - T_0) + \rho A_T h cp \frac{dT}{dt} \\ &= UA_T (T_c - T) + U \pi D_T h (T_c - T) + \rho F_E cp(T_E - T_0) - \rho A_s \sqrt{2gh} cp(T - T_0) \end{aligned}$$

$$\rho A_T \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) cp (T - T_0) + \rho A_T h cp \frac{dT}{dt}$$

$$= UA_T (T_c - T) + U \pi D_T h (T_c - T) + \rho F_E cp (T_E - T_0) - \rho A_s \sqrt{2gh} cp (T - T_0)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{UA_T}{\rho A_T h cp} (T_c - T) + \frac{U \pi D_T h}{\rho A_T h cp} (T_c - T)$$

$$+ \frac{\rho F_E cp}{\rho A_T h cp} (T_E - T_0) - \frac{\rho A_s \sqrt{2gh} cp}{\rho A_T h cp} (T - T_0) - \frac{\rho A_T cp}{\rho A_T h cp} \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U}{\rho h cp} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T cp} (T_c - T)$$

$$+ \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0)$$

Sistema de EDOs obtenido:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

2 EDOS

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{U}{\rho h c_p} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T c_p} (T_c - T) \\ & + \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0) \end{aligned}$$

$t \rightarrow$  Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$  Variable dependiente (altura)

$T \rightarrow$  Variable dependiente (temperatura)

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{U}{\rho h c_p} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T c_p} (T_c - T) + \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0) \end{cases}$$

Resolución utilizando Euler:

$$f_1(t, T, h) = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

$$f_2(t, T, h) = \frac{U}{\rho h c_p} (T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T c_p} (T_c - T)$$

$$+ \frac{F_E}{A_T h} (T_E - T_0) - \frac{A_s \sqrt{2g}}{A_T \sqrt{h}} (T - T_0) - \frac{1}{h} \left( \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh} \right) (T - T_0)$$

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = f_1(t, T, h) \\ \frac{dT}{dt} = f_2(t, T, h) \end{cases}$$

Formula recursiva utilizando Euler:

$$h_{i+1} = h_i + f_1(t_i, T_i, h_i) \Delta t$$

$$T_{i+1} = T_i + f_2(t_i, T_i, h_i) \Delta t$$

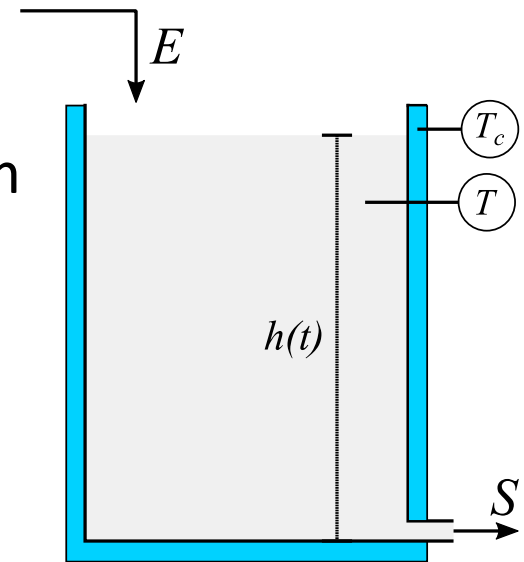
Condiciones iniciales :

$$t = 0 \rightarrow h = h_0; t = 0 \rightarrow T = T_0$$

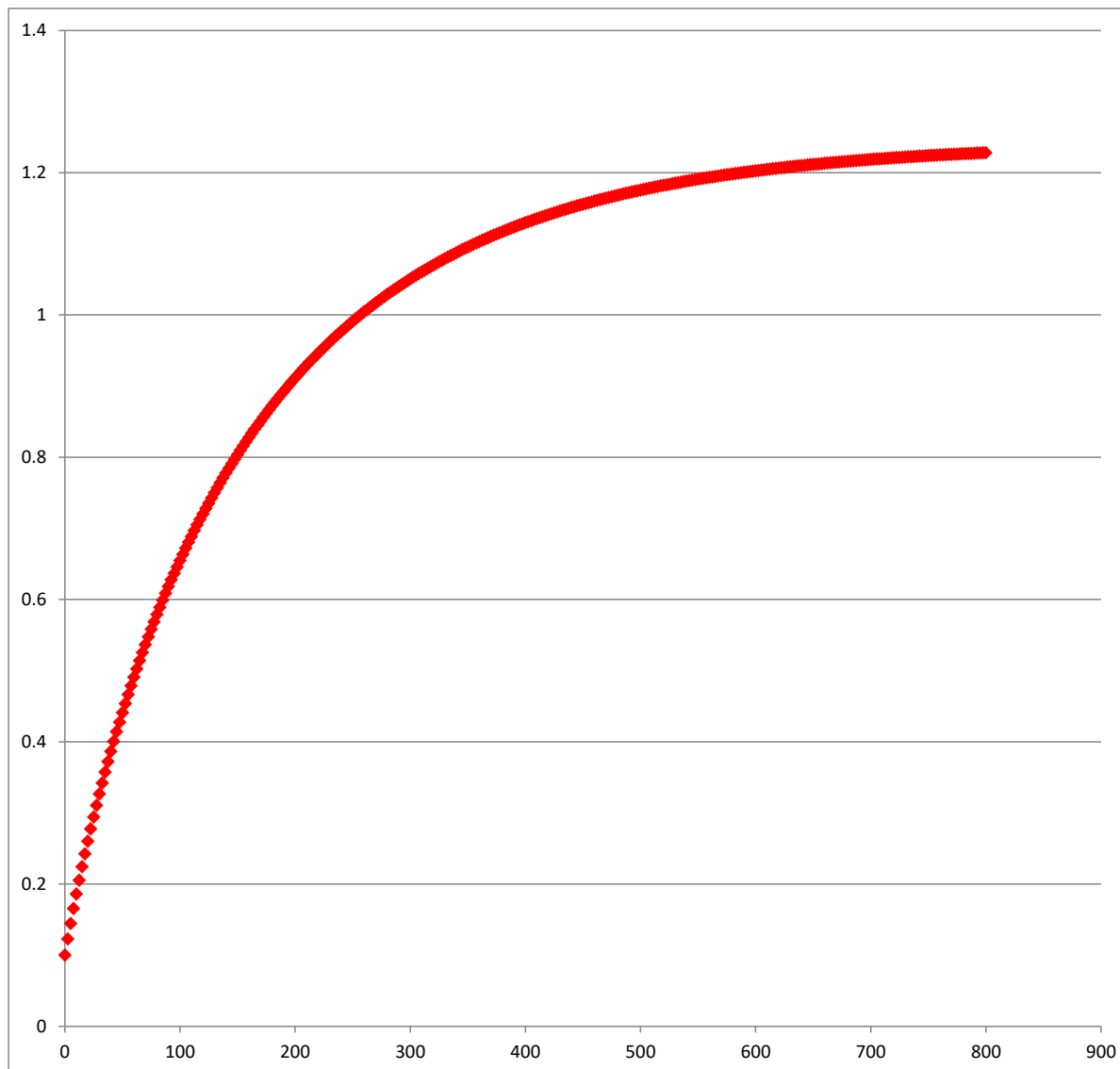
| $i$ | $t_i$ | $h_i$ | $T_i$ | $(dh/dt)_i$        | $(dT/dt)_i$        |
|-----|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| 0   | 0     | $h_0$ | $T_0$ | $f_1(0, T_0, h_0)$ | $f_2(0, T_0, h_0)$ |
|     |       |       |       |                    |                    |

### Ejemplo practico:

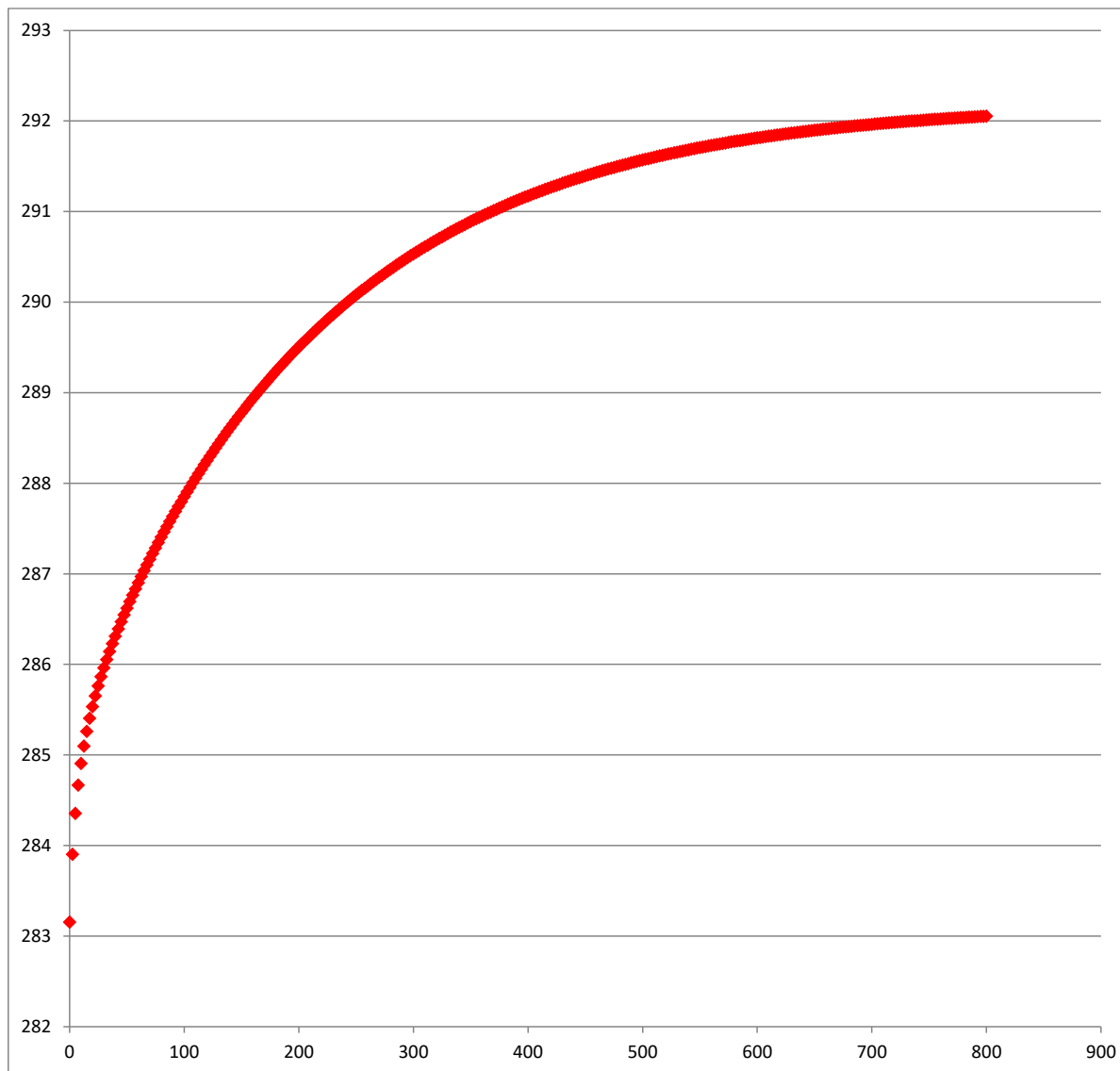
- Caudal constante de alimentación ( $F_E = 0.01 \text{ m}^3/\text{h}$ )
- Altura inicial del tanque:  $h_0 = 0.1 \text{ m}$
- Diámetro del tanque:  $D_T = 1 \text{ m}$
- Diámetro de orificio de salida:  $D_S = 0.0508 \text{ m}$
- Tiempo final 800 segundos
- Densidad del fluido  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Temperatura inicial  $T_0 = 283.15 \text{ K}$
- Temperatura de alimentación  $T_E = 283.15 \text{ K}$
- Temperatura de la camisa  $T_c = 373.15 \text{ K}$
- Calor especifico del fluido  $c_p = 4.2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
- Coeficiente de intercambio de calor  $U = 1 \text{ kW}/(\text{m}^2 \text{ K})$

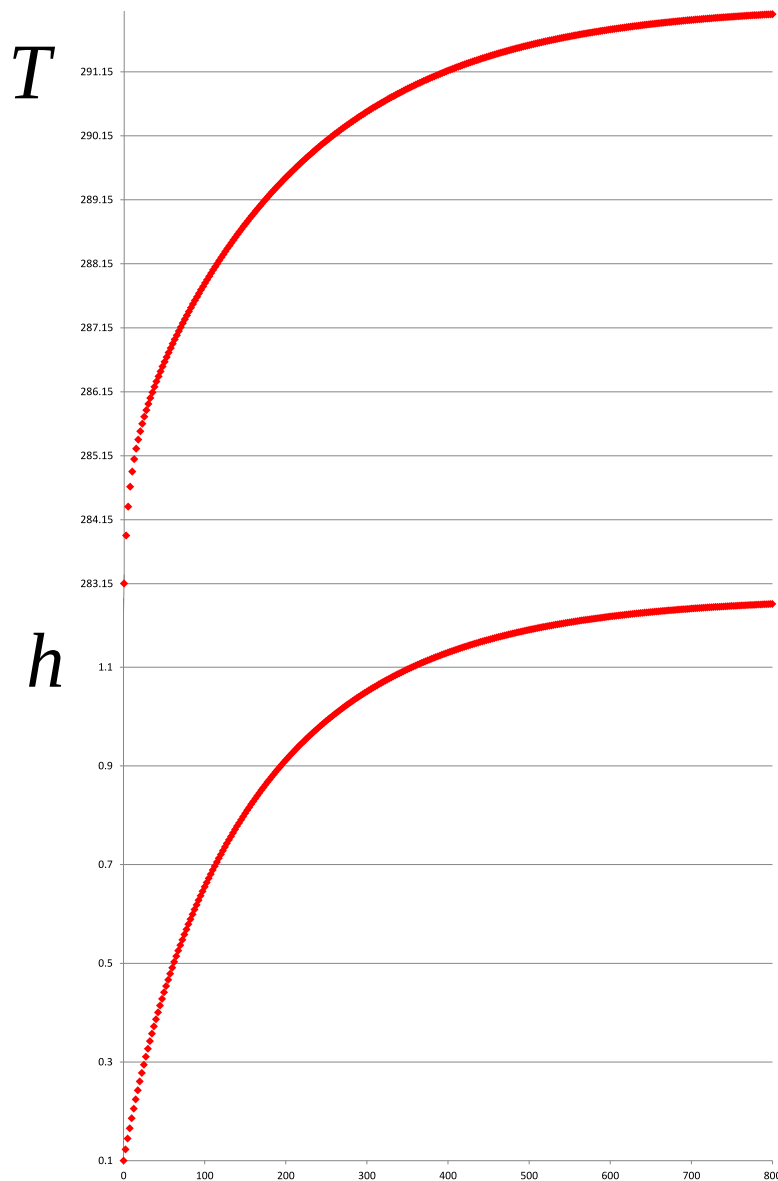


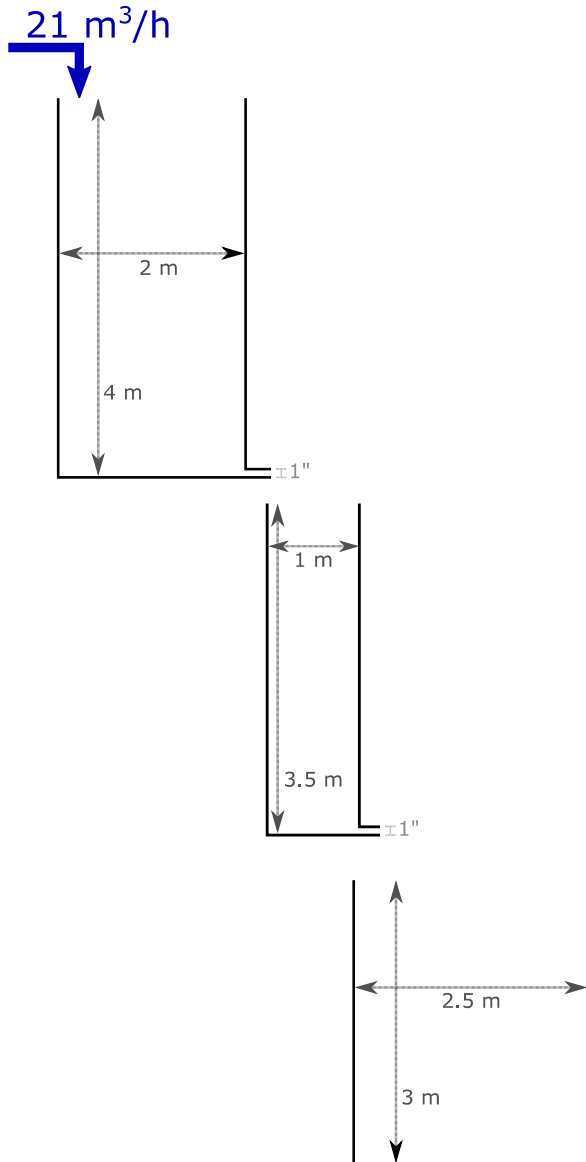
$h$

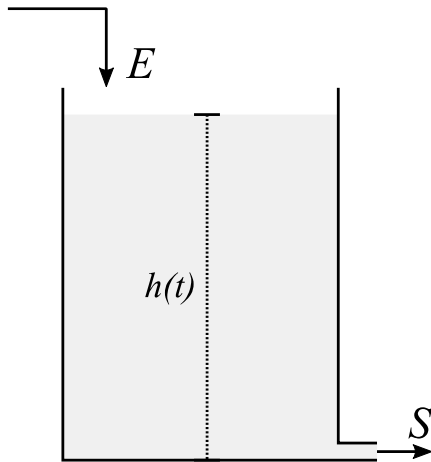


$T$









Tanque cilíndrico y densidad constante

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_E - Q_S}{A_T}$$

$$Q_S = A_s \sqrt{2gh}$$

$Q_E$ : Caudal volumétrico de entrada.

$Q_S$ : caudal volumétrico de salida.

$A_T$ : Área transversal del tanque.

$A_s$ : Área del orificio de salida.

Realizar el modelo para tres tanques

Solve the following initial value problem over the interval from  $t = 0$  to 2 where  $y(0) = 1$ .

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

| $i$ | $t$ | $y_i$ | $y' = f(t_i, y_i)$ |
|-----|-----|-------|--------------------|
|     |     |       |                    |
|     |     |       |                    |
|     |     |       |                    |
|     |     |       |                    |

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

| $i$ | $t$ | $y_i$ | $y' = f(t_i, y_i)$ |
|-----|-----|-------|--------------------|
| 0   | 0   | 1     |                    |
|     |     |       |                    |
|     |     |       |                    |

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

Solve the following initial value problem over the interval from  $t = 0$  to 2 where  $y(0) = 1$ .

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

| $i$ | $t$ | $y_i$ | $y' = f(t_{i+1}, y_{i+1})$ |
|-----|-----|-------|----------------------------|
|     |     |       |                            |
|     |     |       |                            |
|     |     |       |                            |
|     |     |       |                            |

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Delta t$$

Ejemplo de obtención de  $y(1)$  con  $\Delta t=0.1$

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

$$i = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow y_0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + f(t_1, y_1) \Delta t$$

$$y_1 = y_0 + (y_1 t_1^3 - 1.5y_1) \Delta t$$

$$y_1 = 1 + (y_1 0.1^3 - 1.5y_1) 0.1$$

$$y_1 = 0.869641$$

¡Cuidado!

- Puedo despejar porque la expresión lo permite.
- No siempre nos queda una expresión lineal.
- Conviene aplicar algún método de aproximaciones sucesivas

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

| $i$ | $t$ | $y_i$    | $y' = f(t_{i+1}, y_{i+1})$ |
|-----|-----|----------|----------------------------|
| 0   | 0   | 1        | -1.30359                   |
| 1   | 0.1 | 0.869641 |                            |
|     |     |          |                            |

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Delta t$$

Solve the following initial value problem over the interval from  $t = 0$  to 2 where  $y(0) = 1$ .

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta t \quad \varnothing = k_2$$

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad k_2 = f(t_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta tk_1)$$

| $i$ | $t$ | $y_i$ | $k_1$ | $t_{i+0.5}$ | $y_i + 0.5\Delta tk_1$ | $k_2$ |
|-----|-----|-------|-------|-------------|------------------------|-------|
|     |     |       |       |             |                        |       |
|     |     |       |       |             |                        |       |

Ejemplo de obtención de  $y(1)$  con  $\Delta t=0.1$

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

$$i = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow y_0 = 1$$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = y_0 t_0^3 - 1.5y_0 \rightarrow k_1 = 1 \times 0^3 - 1.5 \times 1 = -1.5$$

$$t_{0+0.5} = t_0 + 0.5\Delta t = 0 + 0.5 \times 0.1 = 0.05$$

$$y_0 + 0.5\Delta t k_1 = 1 + 0.5 \times 0.1 \times (-1.5) = 0.925$$

$$k_2 = f(t_{0+0.5}, y_0 + 0.5\Delta t k_1) = f(0.05, 0.925)$$

$$k_2 = 0.925 \times 0.05^3 - 1.5 \times 0.925 = -1.38738$$

$$y_1 = y_0 + k_2 \Delta t = 1 + (-1.38738)0.1 = 0.861262$$