Solución de Ecuaciones Algebraicas Lineales
Parte (III)

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

Eliminación de Gauss: El Algoritmo General

<u>Problema</u>: Resolver un SEAL de n ecuaciones:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1\ (1)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2\ (2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n=b_n\ (n)$$

(I) Eliminación de incógnitas

<u>Paso 1</u>: Eliminar x_1 de la Ec. (2) hasta la Ec.(n).

$$Eq.\ (2) - (a_{21}/a_{11}) \times Eq.\ (1)$$
$$\vdots$$
$$Eq.\ (n) - (a_{n1}/a_{11}) \times Eq.\ (1)$$

<u>Sistema modificado</u>

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1 \qquad (1')$$
$$a'_{22}x_2+\ \dots\ +a'_{2n}x_n=b'_2 \qquad (2')$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a'_{n2}x_2+\ \dots\ +a'_{nn}x_n=b'_n \qquad (n')$$

Eliminación de Gauss: El Algoritmo General

Paso 2: Eliminar x_2 desde la Ec. (3') hasta la Ec. (n').

$$Ec.\ (3') - (a'_{32}/a'_{22}) \times Ec.\ (2')$$

$$\vdots$$

$$Ec.\ (n') - (a'_{n2}/a'_{22}) \times Ec.\ (2')$$

Sistema modificado:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ \dots\ +a_{1n}x_n&=b_1 \quad (1'') \\
a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ \dots\ +a'_{2n}x_n&=b'_2 \quad (2'') \\
a''_{33}x_3+\ \dots\ +a''_{3n}x_n&=b''_3 \quad (3'') \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a''_{n3}x_3+\ \dots\ +a''_{nn}x_n&=b''_n \quad (n'')
\end{aligned}$$

Repetir el procedimiento …

Paso n-1: Eliminar x_{n-1} de la ecuación enésima.

$$Ec.\ (n) - (a_{nn-1}/a_{n-1n-1}) \times Ec.\ (n-1)$$

Sistema modificado:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ \dots\ +a_{1n}x_n&=b_1 \\
a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ \dots\ +a'_{2n}x_n&=b'_2 \\
a''_{33}x_3+\ \dots\ +a''_{3n}x_n&=b''_3 \\
\vdots \qquad & \\
\boxed{a^{(n-1)}_{nn}x_n=b^{(n-1)}_n}
\end{aligned}$$

Eliminación de Gauss: El Algoritmo General (cont.)

(II) Sustitución hacia Atrás

<u>Paso 1</u>: Resolver x_n desde la última ecuación $a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}$

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}$$

- Observación: El supraíndice (n-1) indica que los elementos han sido modificado (n-1) veces.

<u>Paso 2</u>: Sustituir hacia atrás el resultado de la ecuación (n-1) para obtener x_{n-1}; repetir para $x_{n-2}, \ldots, x_1$.

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

$$para\ i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Por ejemplo: Después que se obtuvieron x_n and x_{n-1}, :x_{n-2} viene dado por

$x_{n-2}=(b_{n-2}-a_{n-2\ n-1}x_{n-1}-a_{n-2\ n}x_n)/a_{n-2\ n-2}$, or

$x_{n-2}=(b_{n-2}-[a_{n-2\ n-1}\ a_{n-2\ n}]*[x_{n-1}\ x_n]')/a_{n-2\ n-2}$ (*)

<u>Observación</u>: (*) Resultará útil cuando la sustitución hacia atrás se implemente en la computadora.

Resumen

- Proceso que se efectúa en dos fases:
  - Fase de eliminación hacia adelante.
  - Fase de sustitución hacia atrás.
- Resultado final: Un sistema triangular superior.
- Tu turno: Cómo implementarías el método de eliminación de Gauss sobre una computadora?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

(*a*) Forward elimination

$$\downarrow$$

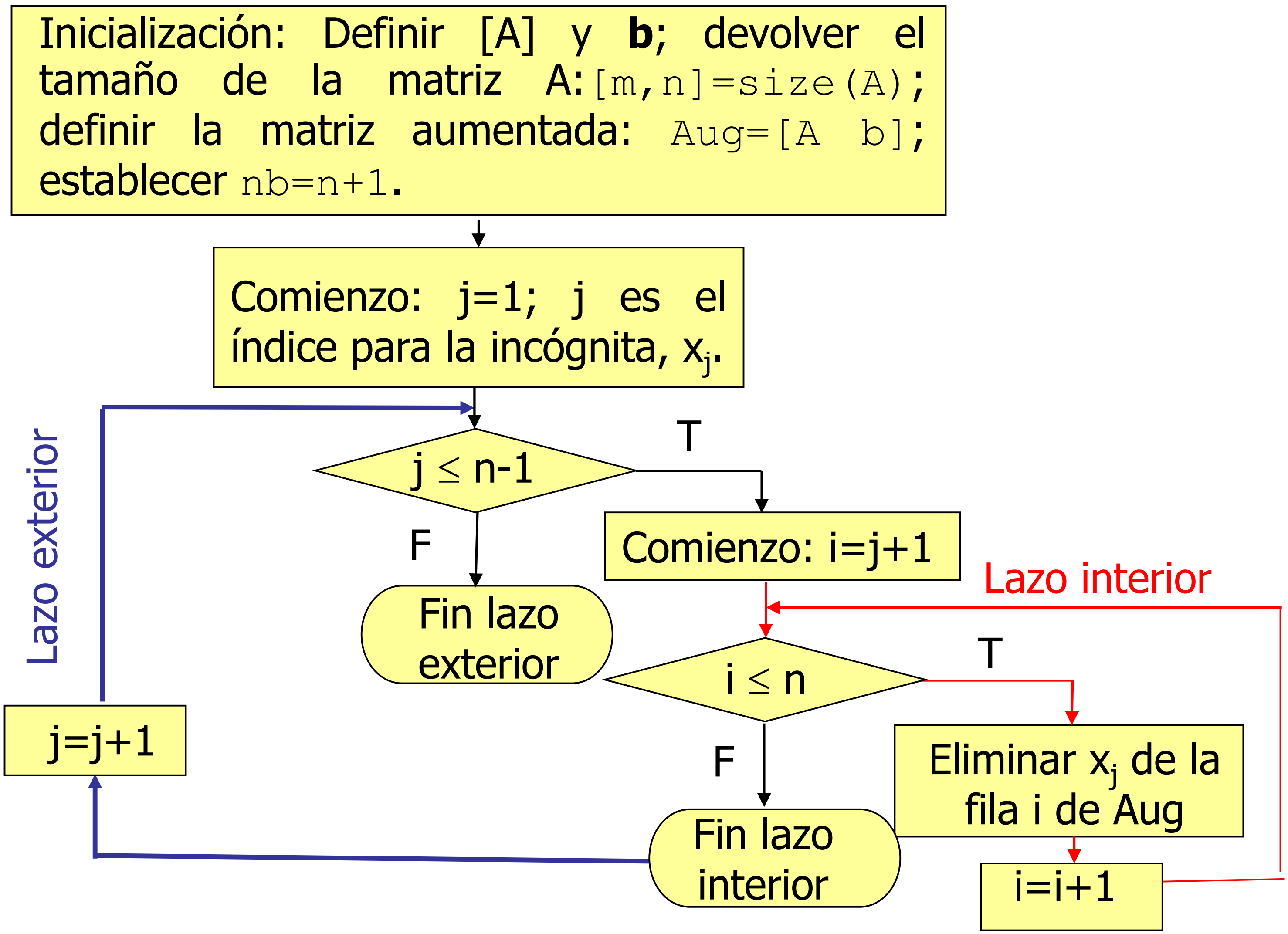
$$x_3 = b''_3/a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11}$$

(*b*) Back substitution

Matemática Superior Aplicada



Ejercicio

- Utilice el método de eliminación de Gauss para resolver:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2\,x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7\,x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

(a) A mano. Mostrar trabajo detallado paso a paso.
(b) Escriba un archivo de Scilab, MyGaussElimination.sce. Luego entregará una copia del código.