Solución de Ecuaciones Algebraicas Lineales
Parte (I)

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

Esquema

- Ecuaciones algebraicas lineales simultáneas?
- Aplicaciones científicas y de ingeniería
  - Estática: Análisis de fuerza
  - Análisis de circuitos: Corrientes y tensiones
  - Configuración de reactores: Balance de materia
- Introducción a
  - (1) álgebra matricial y
  - (2) funciones incorporadas (built-in) de Scilab

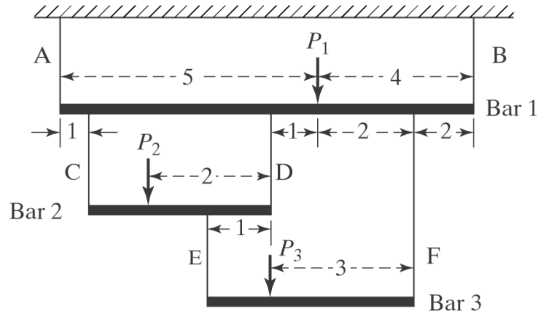
Introducción

- Qué son las ecuaciones algebraicas lineales?
  - Forma general:

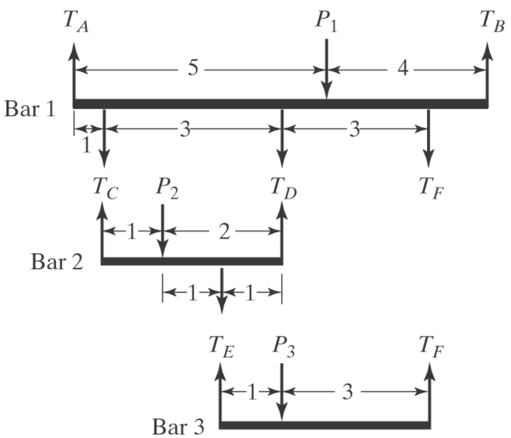
$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Aplicaciones Científicas y de Ingeniería

Estática



(a)



(b)

Diagrama de cuerpo libre

Sistema de andamios

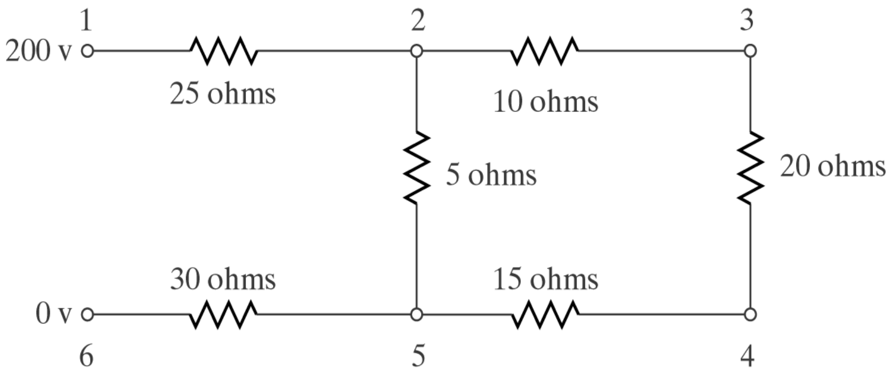
- Ejemplo 1: Se utiliza un sistema de andamios, que consta de tres barras rígidas y seis cables, para soportar las cargas P1, P2 y P3 como se muestra en la Figura (a).
  - Encuentre las tensiones desarrolladas en las cuerdas A, B, C, D, E y F donde:

    P1 = 2000 lb, P2 = 1000 lb y P3 = 500 lb.

Aplicaciones Científicas y de Ingeniería

Análisis de circuitos

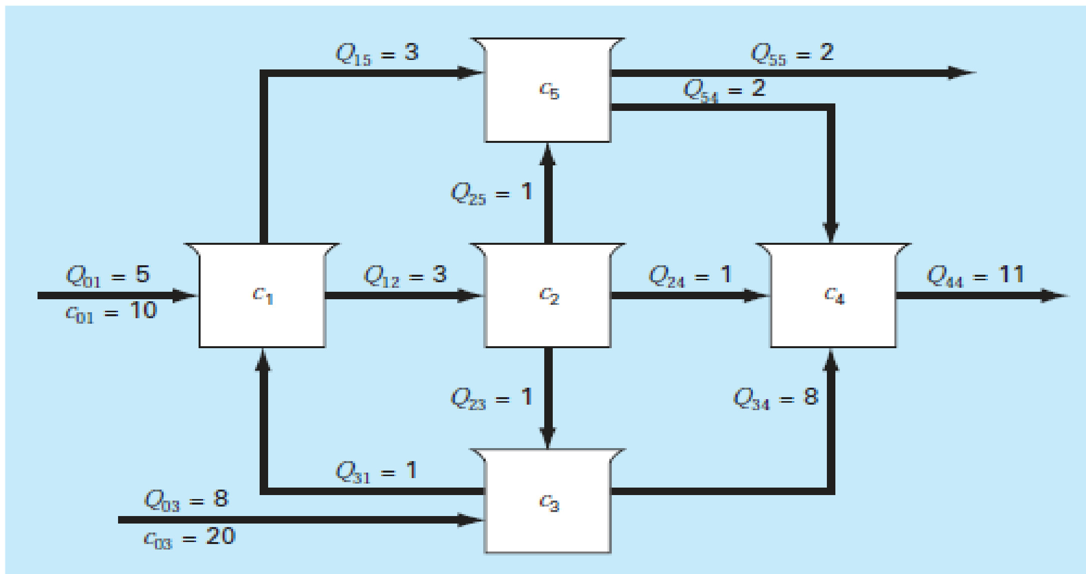
- Ejemplo 2: Una red eléctrica consta de seis resistencias como se muestra en la Figura. Si los voltajes en los nodos 1 y 6 se especifican como 200 y 0 voltios, respectivamente, determine los voltajes en los nodos 2, 3, 4 y 5.



Red eléctrica

Aplicaciones Científicas y de Ingeniería
Balance de materia

- Ejemplo 3: Dada la configuración de reactores de la Figura:



con dos tubos de entrada y dos tubos de salida donde los caudales *Q* están en metros cúbicos por minuto, y las concentraciones *c* están en miligramos por metro cúbico. Realizar un balance de materia suponiendo mezcla perfecta y que los reactores operan en estado estacionario.

Introducción al Álgebra Matricial

- Sea A la matriz:

$$\begin{array}{ccl} & \text{Column 3} \downarrow & \\ [A] = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow \text{Row 2} \end{array}$$

  - Vectores fila: matrices $1 \times n$
  - Vectores columna: matrices $m \times 1$

Tipos de Matrices

(1) Matriz cuadrada:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

(2) Matriz simétrica:

$$[A]=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

(3) Matriz diagonal: $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$

(4) Matriz identidad[I]: Es una matriz diagonal donde todos los elementos diagonales son iguales a 1.

5) Matriz triangular superior:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

(6) Matriz en banda: $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Ancho de banda: 3

Reglas de Operación de Matrices

- Suma de dos matrices [C] = [A]+[B]:
  - $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Multiplicación de una matriz por un escalar [D] = g[A]:
  - $d_{ij} = ga_{ij}$
- Producto de dos matrices [C] = [A][B]:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

  - [A]: $m \times n$; [B]: $n \times l$; [C]: $m \times l$
  - $[A][B] \neq [B][A]$

Reglas de Operación de Matrices (cont.)

- Inversa de una matriz $[A]^{-1}$:
  - Definición: $[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$
  - Inversa de una matriz 2x2:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

- Para matrices de orden superior, el cálculo es mucho más complicado:

$$[A]^{-1} = \frac{\left[adj\left([A]\right)\right]^T}{det\left([A]\right)}$$

- Transpuesta de una matriz $[A]^T$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Manipulaciones Matriciales con Scilab

- Ejercicio práctico: Escriba lo siguiente en la ventana de comandos de Scilab:

(1) A=[1 5 6;7 4 2;-3 6 7]

(2) A’

(3) x=[8 6 9];

y=[-5 8 1];

z=[4 8 2];

B=[x; y; z]

(4) C=A+B

(5) D=C-B

(6) A*B

(7) A.*B

(8) AI=inv(A)

(9) A*AI

(10) I=eye(3)

Representación de un Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales en Forma Matricial

- Ecuaciones algebraicas lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

- Forma matricial: [A]**x** = **b**

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Una manera formal de resolver [A]**x** = **b**:
  - $\mathbf{x}=[A]^{-1}\mathbf{b}$;
  - <u>Involucra el cálculo de $[A]^{-1}$; muy ineficiente</u>.

Resolución de un SEAL con Scilab

- Scilab suministra dos formas directas:

  (1) Utilizando la división izquierda (backslash): x=A\b

  (2) Utilizando la inversa de A: x=inv(A)*b

- El método (1) es de 2 a 3 veces más rápido.