

Descomposición LU de una Matriz

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

Descomposición LU

- La descomposición de LU es otro método para resolver un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas
- ¿Qué es mejor, el Método de Eliminación de Gauss o la descomposición LU?
- Para responder esto, se necesita una mirada más cercana a la descomposición LU de la matriz A .

¿Cómo Funciona la Descomposición LU?

Al resolver un SEAL:	$[A][X] = [C]$
Si $[A] = [L][U]$ entonces	$[L][U][X] = [C]$
Multiplicando miembro a miembro por	$[L]^{-1}$
Entonces:	$[L]^{-1}[L][U][X] = [L]^{-1}[C]$
Recordar que $[L]^{-1}[L] = [I]$, entonces:	$[I][U][X] = [L]^{-1}[C]$
Ahora, si $[I][U] = [U]$, luego:	$[U][X] = [L]^{-1}[C]$
Ahora, si establecemos:	$[L]^{-1}[C] = [Z]$
De donde:	$[L][Z] = [C] \quad (1)$
y	$[U][X] = [Z] \quad (2)$

¿Cómo Podemos Utilizar este Resultado?

Dado el SEAL: $[A][X] = [C]$

1. Descomponer $[A]$ en las matrices $[L]$ y $[U]$
2. Resolver $[L][Z] = [C]$ para $[Z]$
3. Resolver $[U][X] = [Z]$ para $[X]$

¿Es la Descomposición LU Mejor que el Método de Eliminación de Gauss para Resolver un SEAL?

$$[A][X] = [B]$$

T = tiempo de ciclo del reloj y $n \times n$ = tamaño de la matriz

Eliminación hacia Adelante

Descomposición LU

$$CT|_{FE} = T \left(\frac{8n^3}{3} + 8n^2 - \frac{32n}{3} \right)$$

$$CT|_{DE} = T \left(\frac{8n^3}{3} + 4n^2 - \frac{20n}{3} \right)$$

Sustitución hacia Atrás

Sustitución hacia Adelante

$$CT|_{BS} = T(4n^2 + 12n)$$

$$CT|_{FS} = T(4n^2 - 4n)$$

Sustitución hacia Atrás

$$CT|_{BS} = T(4n^2 + 12n)$$

¿Es la Descomposición LU Mejor que el Método de Eliminación de Gauss para Resolver un SEAL?

Para resolver $[A][X] = [B]$

Tiempo insumido:

Método de Eliminación de Gauss	Descomposición LU
$T\left(\frac{8n^3}{3} + 12n^2 + \frac{4n}{3}\right)$	$T\left(\frac{8n^3}{3} + 12n^2 + \frac{4n}{3}\right)$

T = tiempo de ciclo del reloj y nxn = tamaño de la matriz

Por lo tanto, ambos métodos son igualmente eficientes

Para encontrar la Inversa de A

Se requiere resolver n SEAL: $A \cdot A^{-1} = I$

$$[A] \cdot [x_1] = [e_1] ; [A] \cdot [x_2] = [e_2] ; \dots ; [A] \cdot [x_n] = [e_n]$$

donde los vectores $[x_i]$ con $i=1, 2, \dots, n$ representan a los vectores columna de $[A^{-1}]$

$$[A^{-1}] = [x_1] [x_2] \dots [x_n]$$

y

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [e_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad [e_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

representan a versores de la base canónica

Para encontrar la Inversa de A

Tiempo insumido por el MEG

$$= n(CT|_{FE} + CT|_{BS})$$

$$= T\left(\frac{8n^4}{3} + 12n^3 + \frac{4n^2}{3}\right)$$

Tiempo insumido por la descomposición LU

$$= CT|_{DE} + n \times CT|_{FS} + n \times CT|_{BS}$$

$$= T\left(\frac{32n^3}{3} + 12n^2 - \frac{20n}{3}\right)$$

Para encontrar la Inversa de A

Tiempo insumido por el MEG

Tiempo insumido por la descomposición LU

$$T\left(\frac{8n^4}{3} + 12n^3 + \frac{4n^2}{3}\right)$$

$$T\left(\frac{32n^3}{3} + 12n^2 - \frac{20n}{3}\right)$$

Tabla 1: Comparación de los tiempos computacionales que se requieren para encontrar la inversa de una matriz utilizando la descomposición LU y el método de eliminación de Gauss.

n	10	100	1000	10000
$CT _{\text{inversa MEG}} / CT _{\text{inversa LU}}$	3.288	25.84	250.8	2501

Para grandes n , $CT|_{\text{inversa MEG}} / CT|_{\text{inversa LU}} \approx n/4$

La matriz $[A]$ se descompone en dos matrices:
 $[L]$ y $[U]$

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$[U]$ es la misma matriz que la matriz de coeficientes al final del paso de eliminación directa del MEG.

$[L]$ se obtiene usando los multiplicadores que se usaron en el proceso de eliminación directa.

Determinación de la matriz [U]

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $\frac{64}{25} = 2.56$; $Fila_2 - Fila_1(2.56) = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{144}{25} = 5.76$; $Fila_3 - Fila_1(5.76) = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix}$

Determinación de la matriz [U] (cont.)

Matriz después del Paso 1:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix}$$

Paso 2: $\frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$; $Fila_3 - Fila_2(3.5) =$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Determinación de la matriz [L]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Usando los multiplicadores y utilizando el procedimiento de eliminación hacia adelante

A partir del 1er. Paso de eliminación hacia adelante

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \quad \ell_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{64}{25} = 2.56$$

$$\ell_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{144}{25} = 5.76$$

Determinación de la matriz [L] (cont.)

A partir del 2do. Paso de eliminación hacia adelante

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix} \quad l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L][U]=[A]$$

$$[L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} = ?$$

Utilización de la descomposición LU de la matriz A para resolver un SEAL

Resolver el siguiente SEAL utilizando la descomposición

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Utilizando el procedimiento para hallar las matrices $[L]$ and $[U]$

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea $[L][Z] = [C]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Resolver para $[Z]$

$$\begin{aligned} z_1 &= 106.8 \\ 2.56z_1 + z_2 &= 177.2 \\ 5.76z_1 + 3.5z_2 + z_3 &= 279.2 \end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Completamos la sustitución hacia adelante para resolver $[Z]$

$$z_1 = 106.8$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 177.2 - 2.56z_1 \\ &= 177.2 - 2.56(106.8) \\ &= -96.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 279.2 - 5.76z_1 - 3.5z_2 \\ &= 279.2 - 5.76(106.8) - 3.5(-96.21) \\ &= 0.735 \end{aligned}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (cont.)

$$\text{Sea } [U][X] = [Z] \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

Resolver para $[X]$

Las 3 ecuaciones resultan:

$$25x_1 + 5x_2 + x_3 = 106.8$$

$$-4.8x_2 - 1.56x_3 = -96.21$$

$$0.7x_3 = 0.735$$

Ejemplo (cont.)

De la 3er. Ecuación:

$$0.7x_3 = 0.735$$

$$x_3 = \frac{0.735}{0.7}$$

$$x_3 = 1.050$$

Sustituyendo en x_3 and usando la segunda ecuación

$$-4.8x_2 - 1.56x_3 = -96.21$$

$$x_2 = \frac{-96.21 + 1.56x_3}{-4.8}$$

$$x_2 = \frac{-96.21 + 1.56(1.050)}{-4.8}$$

$$x_2 = 19.70$$

Ejemplo (cont.)

Sustituyendo en x_3 y x_2 usando la primer ecuación:

De aquí que el vector solución es:

$$25x_1 + 5x_2 + x_3 = 106.8$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{106.8 - 5x_2 - x_3}{25} \\ &= \frac{106.8 - 5(19.70) - 1.050}{25} \\ &= 0.2900 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2900 \\ 19.70 \\ 1.050 \end{bmatrix}$$

Determinación de la inversa de una matriz cuadrada

La inversa $[B]$ de una matriz cuadrada $[A]$ no singular se define como:

$$[A][B] = [I] = [B][A]$$

Determinación de la inversa de una matriz cuadrada

¿Cómo se puede usar la descomposición LU para encontrar la inversa de la matriz A ?

Suponga que la primera columna de $[B]$ sea $[b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{n1}]^T$

Usando esto y la definición de multiplicación matricial, resulta:

Primera columna of $[B]$

$$[A] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segunda columna of $[B]$

$$[A] \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas restantes de $[B]$ pueden determinarse de la misma manera.

Ejemplo: Inversa de una matriz

Determinar la inversa de una matriz cuadrada $[A]$ no singular

$$[A] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizar el procedimiento de descomposición y las matrices $[L]$ y $[U]$ encontradas

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Inversa de una matriz

Resolver para cada vector columna de $[B]$ requiere de dos pasos:

1) Resolver $[L][Z] = [C]$ para $[Z]$

2) Resolver $[U][X] = [Z]$ para $[X]$

Paso 1: $[L][Z] = [C] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Esto genera las siguientes ecuaciones:

$$z_1 = 1$$

$$2.56z_1 + z_2 = 0$$

$$5.76z_1 + 3.5z_2 + z_3 = 0$$

Ejemplo: Inversa de una matriz

Resolviendo para $[Z]$

$$z_1 = 1$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 0 - 2.56z_1 \\ &= 0 - 2.56(1) \\ &= -2.56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 0 - 5.76z_1 - 3.5z_2 \\ &= 0 - 5.76(1) - 3.5(-2.56) \\ &= 3.2 \end{aligned}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Inversa de una matriz

Resolviendo $[U][X] = [Z]$ para $[X]$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

$$25b_{11} + 5b_{21} + b_{31} = 1$$

$$-4.8b_{21} - 1.56b_{31} = -2.56$$

$$0.7b_{31} = 3.2$$

Ejemplo: Inversa de una matriz

Usando sustitución hacia atrás

$$b_{31} = \frac{3.2}{0.7} = 4.571$$

$$\begin{aligned} b_{21} &= \frac{-2.56 + 1.560b_{31}}{-4.8} \\ &= \frac{-2.56 + 1.560(4.571)}{-4.8} = -0.9524 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1 - 5b_{21} - b_{31}}{25} \\ &= \frac{1 - 5(-0.9524) - 4.571}{25} = 0.04762 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la 1er. columna de la inversa de $[A]$ es:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04762 \\ -0.9524 \\ 4.571 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Inversa de una matriz

Repitiendo el procedimiento para la segunda y tercera columna de la inversa:

Segunda Columna

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08333 \\ 1.417 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Tercera Columna

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03571 \\ -0.4643 \\ 1.429 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Inversa de una matriz

La inversa de $[A]$ es

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04762 & -0.08333 & 0.03571 \\ -0.9524 & 1.417 & -0.4643 \\ 4.571 & -5.000 & 1.429 \end{bmatrix}$$

Para verificar su trabajo realice la siguiente operación:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

Pivoteo Parcial

- Los SEAL son útiles, pero, siempre producen la solución correcta?
- En algunas oportunidades los SEAL generan errores significativos en la solución. Veamos de donde provienen.
- Supongamos que tenemos el siguiente SEAL:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Resolvemos aplicando MEG

Pivoteo Parcial (cont.)

I. Eliminación hacia adelante

Paso 1:

$$-\frac{3}{10} = -0.3; \quad \text{Fila_2} - \text{Fila_1}(-0.3)$$

$$\frac{5}{10} = 0.5; \quad \text{Fila_3} - \text{Fila_1}(0.5)$$

Sistema resultante:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial (cont.)

I. Eliminación hacia adelante

Paso 2:

$$-\frac{2.5}{0.1} = -25; \text{ Fila_3} - \text{Fila_2}(-25)$$

Sistema resultante:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 155 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial (cont.)

II. Sustitución hacia atrás

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1$$

2da. Ecuación: $-0.1x_2 + 6x_3 = 6.1$

$$x_2 = \frac{6.1 - 6(1)}{(-0.1)} = -\frac{0.1}{0.1} = -1$$

1era. Ecuación: $10x_1 - 7x_2 = 7$

$$x_1 = \frac{7 + 7(-1)}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

Solución :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial (cont.)

- Obsérvese que los coeficientes de la matriz resultante están distribuidos en 3 órdenes de magnitud, de 10^{-1} a 10^2
- La dispersión numérica de los coeficientes podría conducir a serios errores de redondeo.
- Qué hubiese pasado si el coeficiente u_{22} de la matriz triangular superior [U] fuese igual a 0?
- Para evitar esa situación debemos implementar la técnica de pivoteo parcial.

Pivoteo Parcial (cont.)

- La técnica consiste en elegir como ecuación pivote, aquella cuya incógnita a eliminar en las ecuaciones siguientes tenga el coeficiente de mayor valor absoluto.
- En el proceso de eliminación hacia adelante, la 1er. Ecuación cumple con esa condición. Por lo tanto, el sistema equivalente es el que obtuvimos anteriormente.

Paso 1:

Sistema resultante:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial (cont.)

- En el Paso 2, la fila con el coeficiente de x_2 de mayor valor absoluto es la fila 3.
- Debemos proceder a intercambiar la fila 2 con la fila 3, de manera que ahora la fila pivote es la 3.

Paso 2 :

Definimos el multiplicador:

Intercambiamos fila 2 con la fila 3 $-\frac{0.1}{2.5} = -0.04$; *Fila_3 - Fila_2(-0.04)*

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.1 \end{bmatrix}$$

Sistema resultante:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que ahora los coeficientes se hallan dispersos en un orden de magnitud

Pivoteo Parcial (cont.)

- Ahora procedemos a resolver hacia atrás:

$$x_3 = \frac{6.2}{6.2} = 1$$

2da. Ecuación: $2.5x_2 + 5x_3 = 2.5$

$$x_2 = \frac{2.5 - 5(1)}{2.5} = -\frac{2.5}{2.5} = -1$$

1era. Ecuación: $10x_1 - 7x_2 = 7$

$$x_1 = \frac{7 + 7(-1)}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

Solución :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial (cont.)

- En general, en la etapa k-ésima del proceso de eliminación, intercambiamos filas de manera que el coeficiente de mayor valor absoluto de la k-ésima columna y de las filas $i \geq k$ se encuentre en la fila k-ésima, entonces:

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \left(\frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \right) a_{k,j}^{(k)} \text{ para } (i, j) \succ k$$

- El supraíndice menos 1 indica el número de veces que el coeficiente ha sido modificado

Factorización $[P][L][U]$ de $[A]$

- Lo que hicimos anteriormente es equivalente a efectuar la factorización $[P][L][U]$ de la matriz de coeficientes $[A]$
- $[L]$: Matriz triangular inferior
- $[U]$: Matriz triangular superior
- $[P]$: Matriz de permutación (lleva el registro de los intercambios de fila)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{[A]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[P]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{bmatrix}}_{[L]} \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}}_{[U]}$$

Factorización $[P][L][U]$ de $[A]$ (cont.)

- Una vez que obtenemos la factorización $[P][L][U]$ de la matriz de coeficientes $[A]$ es fácil encontrar la solución.
- Teníamos: $[A][X] = [B]$
- O, $[P][L][U][X] = [B]$
- Sea $[Z]$ un arreglo (vector) tal que: $[P][Z] = [B]$
- Sea $[Y]$ un arreglo (vector) tal que: $[L][Y] = [Z]$

Factorización $[P][L][U]$ de $[A]$ (cont.)

- Tenemos una serie de SEAL a resolver:
 1. $[P][Z] = [B]$ (reordenamos las componentes de $[B]$)
 2. $[L][Y] = [Z]$ (resolvemos por sustitución hacia adelante para $[Y]$)
 3. $[U][X] = [Y]$ (resolvemos por sustitución hacia atrás para $[X]$)
- Sólo tenemos que factorizar $[A]$ una vez, luego podemos resolver para diferentes $[B]$