Integración Numérica
Parte II

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
Auxiliares: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Srta. Amalia Rueda

Nociones Generales

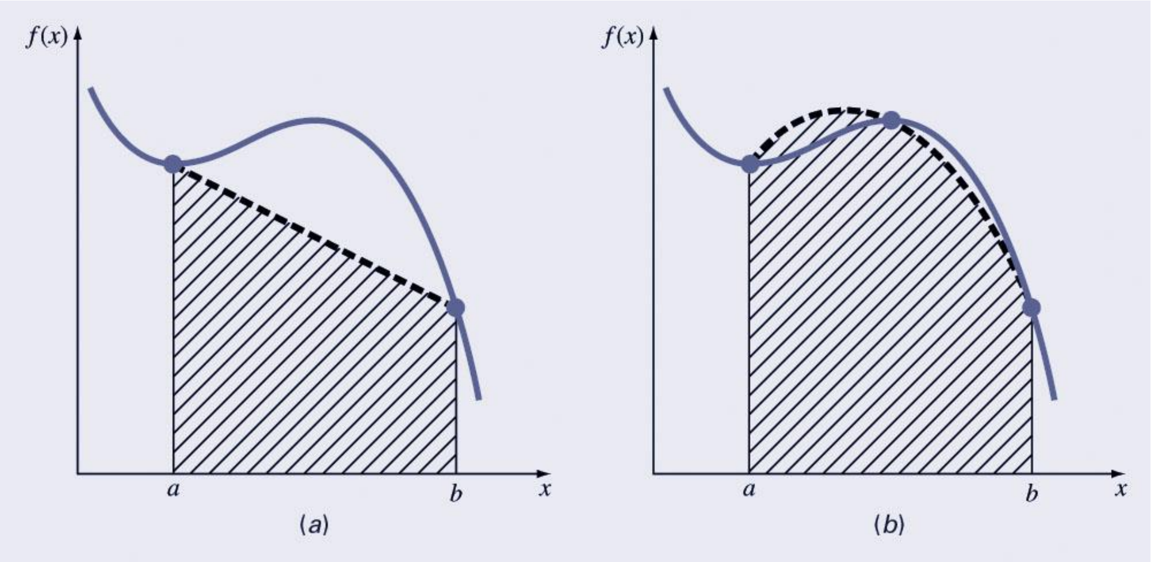
- Fórmulas de Newton-Cotes
  - (2) Regla de Simpson's 1/3
    - Aplicaciones simple y compuesta de la regla de Simpson's 1/3
- Integración con segmentos desiguales
  - Ejemplo: A mano e implementación en programa de MATLAB y/o Scilab

Reglas de Simpson's: En general

- Reglas generales de Simpson: Utilizan polinomios de orden superior para conectar los puntos. Las fórmulas que resultan de tomar las integrales bajo estos polinomios se llaman reglas de Simpson.

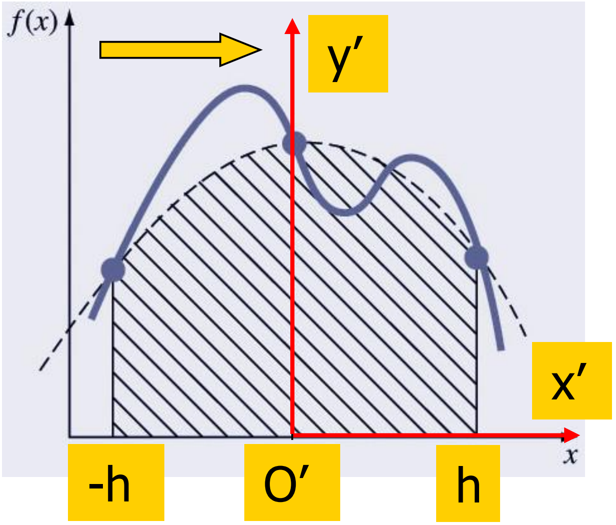
(a) Regla del trapecio

(b) Regla de Simpson's



Regla de Simpson's 1/3

Trasladar el eje x



h = (b – a)/2

Regla de Simpson's 1/3: Consiste en considerar el área bajo la parábola que conecta tres puntos.

- Regla de Simpson' 1/3: Corresponde al uso de polinomios de segundo orden. Derivación de la fórmula:
  - Trasladar el eje x
  - Utilizar la forma del polinomio de Lagrange para el ajuste cuadrático de 3 puntos:

    $[-h,f(x_0)]$, $[0,f(x_1)]$, $[h,f(x_2)]$

$$f_2(x') = a_0 x'(x'-h) + a_1(x'+h)(x'-h) + a_2(x'+h)x'$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2}\left(x'^2 - hx'\right) - \frac{f(x_1)}{h^2}\left(x'^2 - h^2\right) + \frac{f(x_2)}{2h^2}\left(x'^2 + hx'\right)$$

  - Integración sobre el intervalo [-h, h]:

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \int_{-h}^{h} f_2(x')\,dx' = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \\ &= (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \end{aligned}}$$

Error en la Regla de Simpson's 1/3

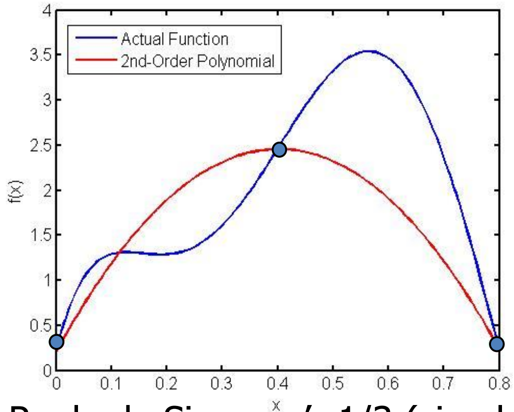
- Para una sola aplicación de la regla 1/3 de Simpson:

$$E_t = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi) \text{ or } E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

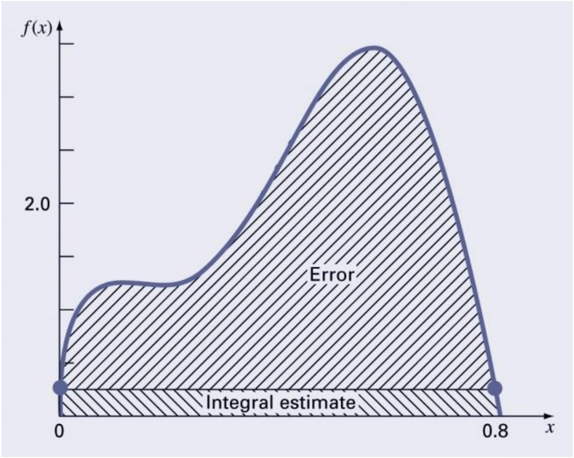
ξ se encuentra en algún lugar en el intervalo [a b].

- El error es proporcional a h^5 (en lugar de h^3 para la regla trapezoidal).
- La regla 1/3 de Simpson es más precisa que la regla del trapecio.
- El error es proporcional a la derivada cuarta de la función real; <u>si f (x) es un polinomio cúbico</u>, $E_t = 0$.

Aplicación Simple de la Regla de Simpson's 1/3



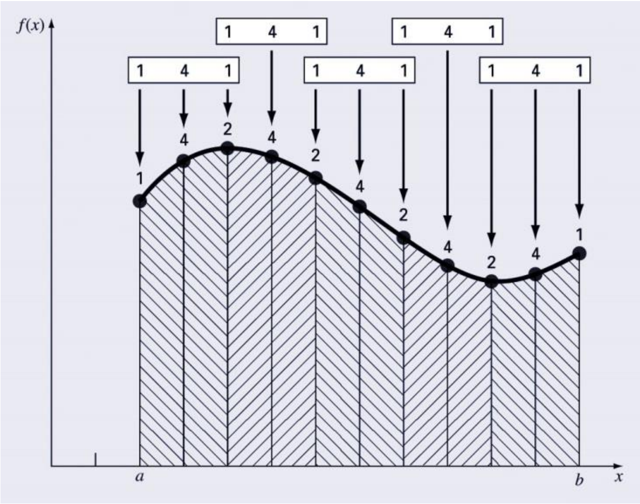
Regla de Simpson's 1/3 (simple).



Regla del trapecio (simple).

- Utilice la regla 1/3 de Simpson para integrar
  $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
  de $a = 0$ a $b = 0.8$.
- Además, encuentre el error E_t y ε_t.
- Compare el resultado con el encontrado usando la regla del trapecio ($I_{true} = 1.640533$).
  - Manualmente
  - Resultad os: $\varepsilon_t = 16.6\%$ para la regla 1/3 de Simpson; $\varepsilon_t = 89.5\%$ para la regla del trapecio.

Regla de Simpson's 1/3 Compuesta



Regla de Simpson's 1/3 compuesta.

- La regla de Simpson se puede mejorar dividiendo el intervalo de integración en varios segmentos de igual amplitud.
- Nota: El número de segmentos tiene que ser par.
- h = tamaño del paso = (b-a) / n; n = el número de segmentos.

$$I = 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \cdots$$

$$+ 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$

$$= (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5\cdots}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6\cdots}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}$$

Error en la Regla Compuesta de Simpson's 1/3

- Para la aplicación de la regla compuesta de Simpson's 1/3:

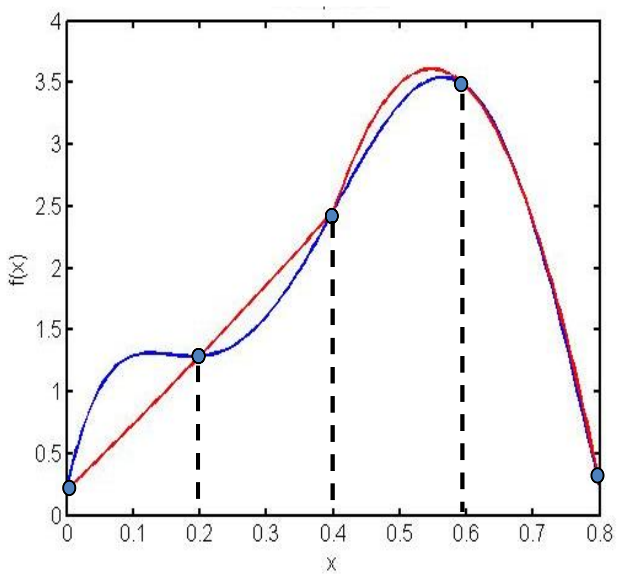
$$E_t = \sum_{i=1}^{n/2} E_{t,i} = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{(b-a)^5}{90n^5}\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i);$$

$$\boxed{E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\,\bar{f}^{(4)}}$$

  - El error es proporcional a $1/n^4$ (en lugar de $1/n^2$ como en la regla compuesta del trapecio).
  - El valor medio de $f^{(4)}(x)$ para el intervalo [a b]:

$$\bar{f}^{(4)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx$$

Ejemplo: Aplicación de la Regla Compuesta de Simpson's 1/3



$n = 4; h = 0.2$

- Use la regla 1/3 de Simpson compuesta con $n = 4$ para estimar la integral de:
  $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
  desde $a = 0$ a $b = 0.8$.
- Encuentre el error E_t y ε_t
  $(I_{true} = 1.640533)$
  - A mano.
  - Resultados: $\varepsilon_t = 1.04\%$ para la regla compuesta de Simpson's 1/3.

Integración con Segmentos Desiguales

- En la práctica, los puntos de datos pueden estar desigualmente espaciados. Por ejemplo, datos obtenidos experimentalmente.
- Integración numérica: un método es aplicar la regla trapezoidal a cada segmento y sumar los resultados:

$$\boxed{I = h_1 \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}}$$

  - h_i = ancho (tamaño del paso) del segmento i.

Integración con Segmentos Desiguales

- Ejemplo: Determinar la integral para los datos dados en la Tabla de abajo. Escribir un programa en MATLAB o Scilab llamado:

`Int_Unequal_Segments.m o Int_Unequal_Segments.sce`

$$(I_{true} = 1.640533)$$

Datos del polinomio $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ para valores de x que no están igualmente espaciados

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.00	0.200000	0.44	2.842985
0.12	1.309729	0.54	3.507297
0.22	1.305241	0.64	3.181929
0.32	1.743393	0.70	2.363000
0.36	2.074903	0.80	0.232000
0.40	2.456000		