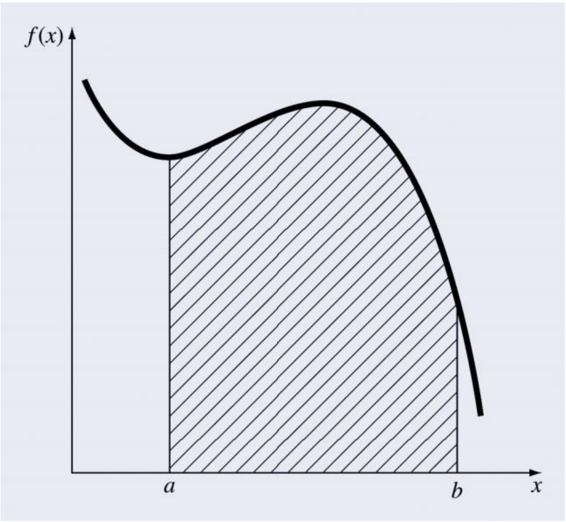
Integración Numérica
Parte I

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
Auxiliares: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Srta. Amalia Rueda

Nociones Generales

- Introducción
  - Qué es la integración numérica?
  - Cuando se necesita la integración numérica?
- Aplicaciones de integración en ingeniería y en ciencias
- Fórmulas de Newton-Cotes
  - (1) Regla del Trapecio
    - Error de la regla del trapecio
    - La regla del trapecio compuesta
    - Implementación en MATLAB o en Scilab

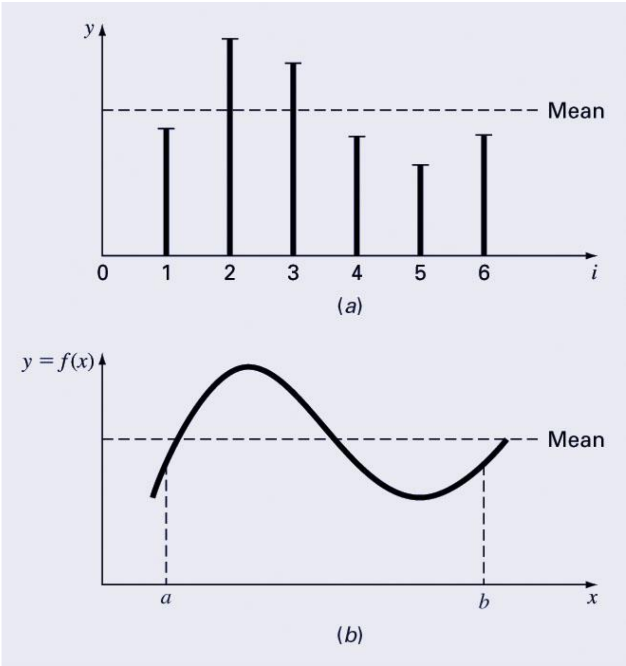
Introducción



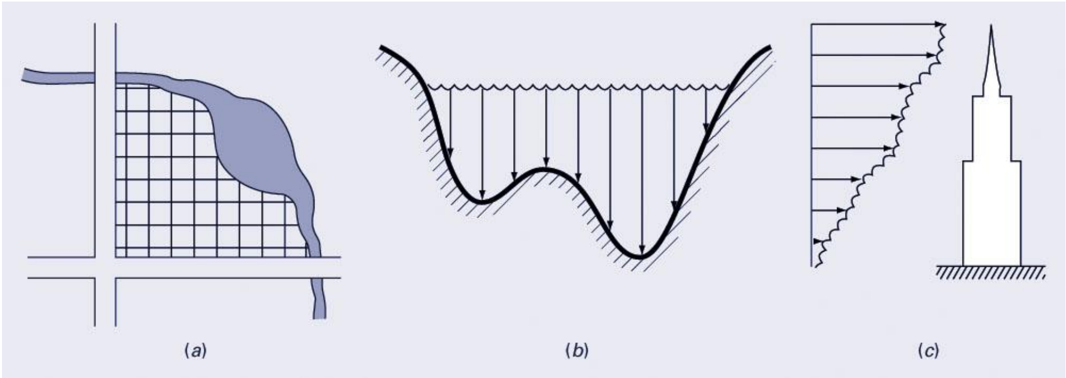
Representación gráfica de la integral de la función f(x).

- Qué es la integración numérica?
  - Matemáticamente: Una integral definida se representa como: $I = \int_a^b f(x)dx$
  - Esto significa: El valor total o la suma de f(x)dx sobre el dominio [a b].
  - Representación gráfica: Para funciones que yacen sobre el eje x, la integral corresponde al área debajo de la curva. Para funciones que yacen debajo del eje x, la integral corresponde al área encima de la curva de f(x) entre x = a y x = b.
- Cuando necesitamos realizar una integración numérica (también referida como cuadratura)?
  - Funciones que son difíciles o que no pueden integrarse analíticamente.
  - Sólo se dispone de una tabla de valores discretos de la función.

Aplicaciones de Integración Numérica en Ingeniería y Ciencias

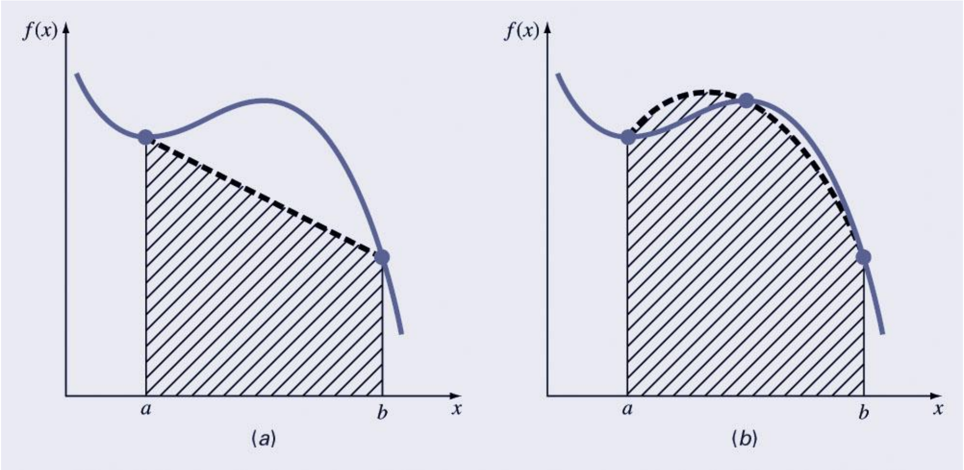


- Ejemplos que relacionan a la integral de una función como el *área bajo la curva*:

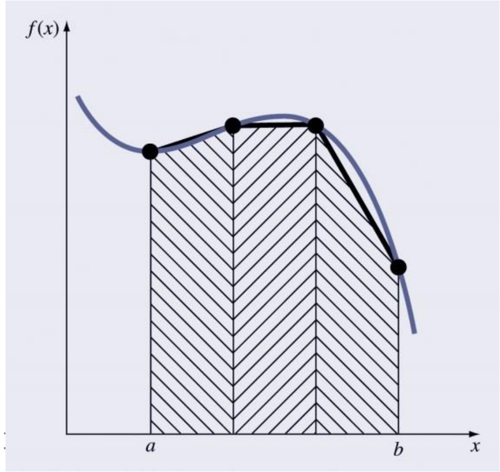


- Ejemplos vinculados a la analogía entre integración y suma:
  - Ejemplo: Determinar el valor medio de una función continua.

Fórmulas de Newton-Cotes



Aproximación de una integral por el área bajo la curva de: (a) una línea recta y (b) una parábola.



Aproximación de una integral mediante el área bajo tres segmentos de recta.

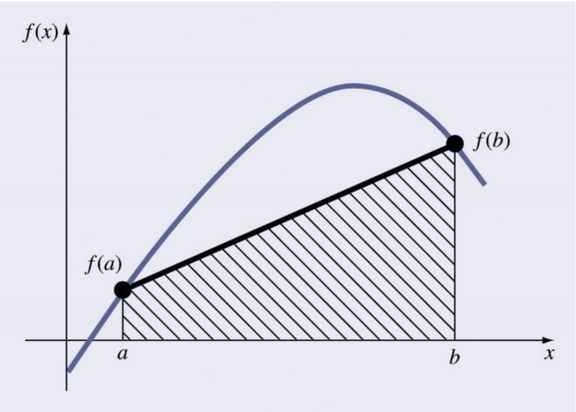
- <u>Estrategia básica</u>:

  Reemplazar una función complicada o datos tabulados de una función con un polinomio fácil de integrar.

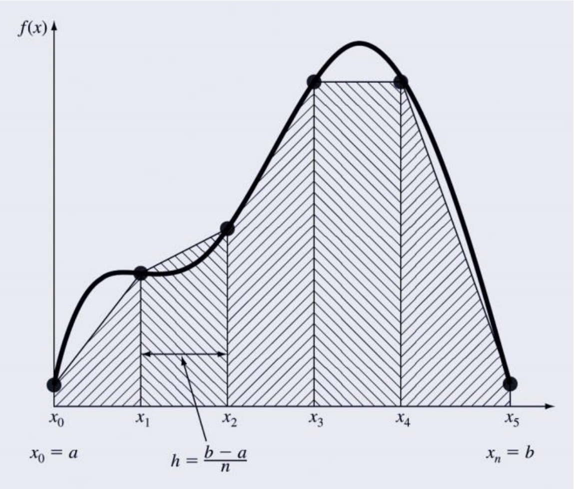
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

- $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$
- n: Orden del polinomio.

Fórmulas de Newton-Cotes: (1) La Regla del Trapecio



Aplicación simple.



Aplicación compuesta.

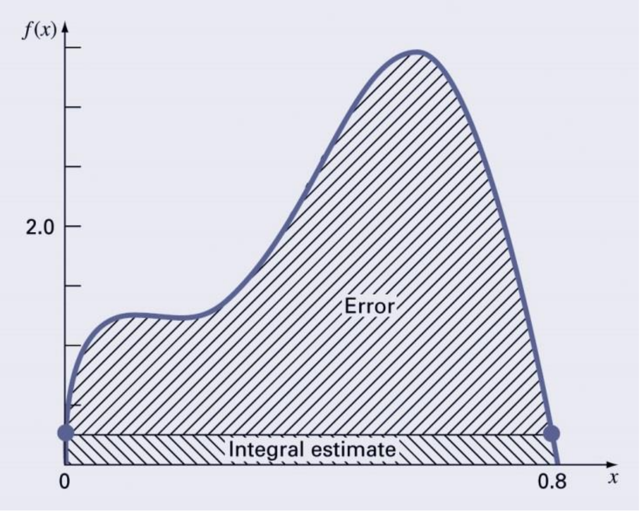
- <u>Idea básica</u>: Reemplazar la función complicada o datos tabulados con un polinomio o una serie de polinomios de **1er. Orden** (lineales).
- <u>Aplicaciones simples y compuestas</u>
  - Fórmula de aplicación simple:

$$\boxed{I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}}\underbrace{\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{Average Height}}}$$

  - Fórmula de aplicación compuesta:

$$\boxed{I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}}\underbrace{\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}}_{\text{Average Height}}}$$

Error de la Regla del Trapecio



Error de truncamiento para una aplicación simple de la regla del trapecio.

- Para aplicaciones simples, una estimación del error es:

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \,;\, E_a = -\frac{1}{12} \bar{f}''(b-a)^3$$

  - Si la función que está siendo integrada es lineal, $E_t = 0$; de otro modo, $E_t \neq 0$.

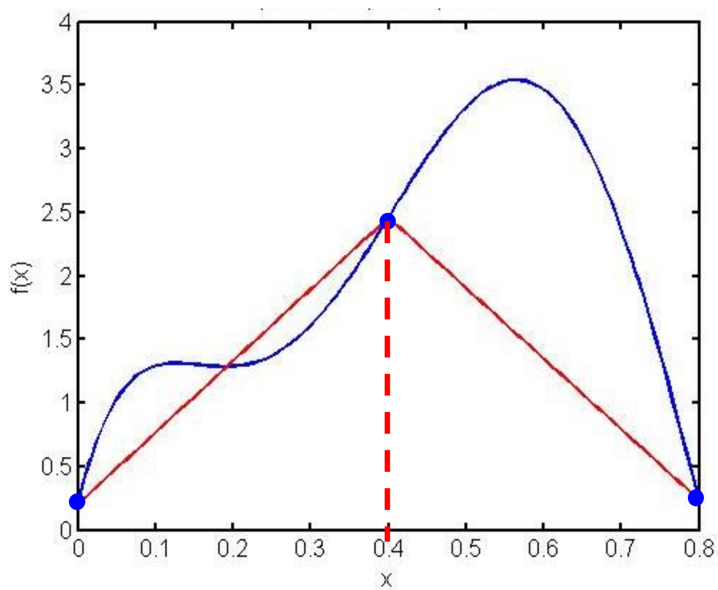
- Para aplicaciones compuestas, una estimación del error es:

$$E_t = \sum_{i=1}^{n} E_{t,i} = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) ; E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''$$

  - Si se duplica el número de paneles, E_t se reduce por 4 aproximadamente . Aquí,

$$\bar{f}'' = \frac{1}{b-a} \int_a^b f''(x) dx$$

Ejemplo: Aplicación Compuesta de la Regla del Trapecio



$x_0 = a$ x_1 $x_2 = b$

Dos paneles, n = 2

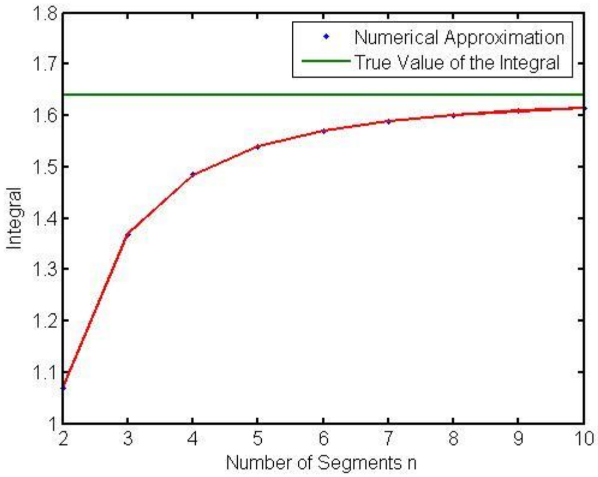
- Utilice la <u>regla del trapecio de 2 paneles para estimar la integral</u> de

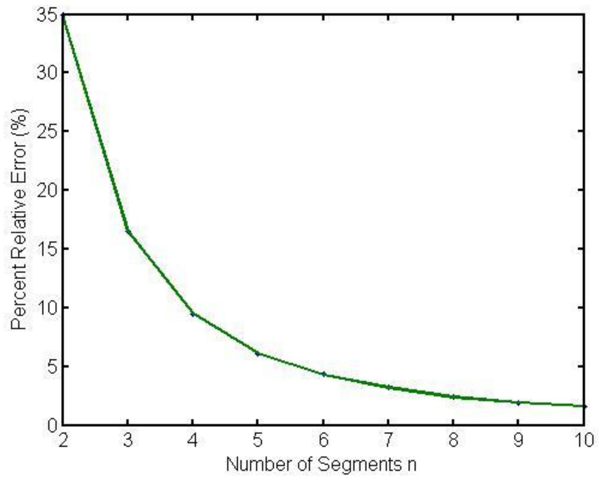
  $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

  desde a = 0 a b = 0.8.

- Además, encuentre el <u>error verdadero</u>, E_t y el <u>error aproximado</u>, E_a.
  - (1) A mano
  - (2) Implementando un archivo de comandos de MATLAB o de Scilab

Resultados





n	h	I	ε_t (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

Implementación Computacional de la Regla del Trapecio Compuesta

- Escribir el programa mi_regla_del_trapecio.m (MATLAB) o mi_regla_del_trapecio.sce (Scilab) para calcular el ejemplo anterior.
- Una copia del mismo será enviada a posteriori.