

Raíces de ecuaciones no lineales

Prof.: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz

J.T.P.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

Aux. 2^{da}: Sra. Amalia Rueda

Una ecuación trascendente es una igualdad entre dos expresiones matemáticas en las que aparecen una o más incógnitas relacionadas mediante operaciones matemáticas (que no son únicamente algebraicas) y cuya solución no puede obtenerse empleando solo las herramientas propias del álgebra.

El término trascendente se refiere a que la ecuación o su resolución va más allá del álgebra; trasciende el álgebra

Encontrar el valor de x /

$$\sqrt{x} + \ln(x) - 4 = 0$$

Acotados

Gráfico

Bisección

Regla
falsa

Abiertos

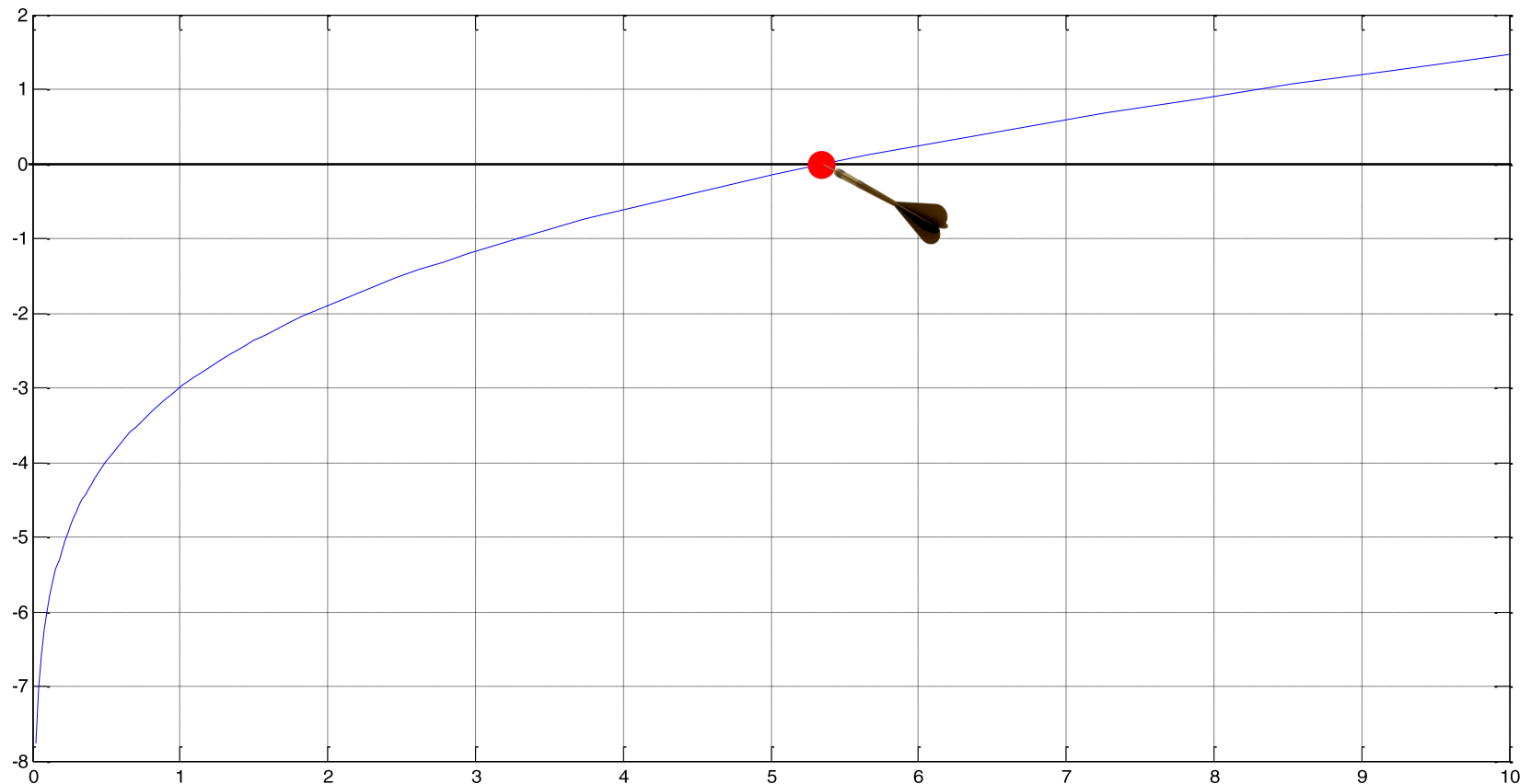
Aproximaciones sucesivas

Wegstein

Secante

Newton - Raphson

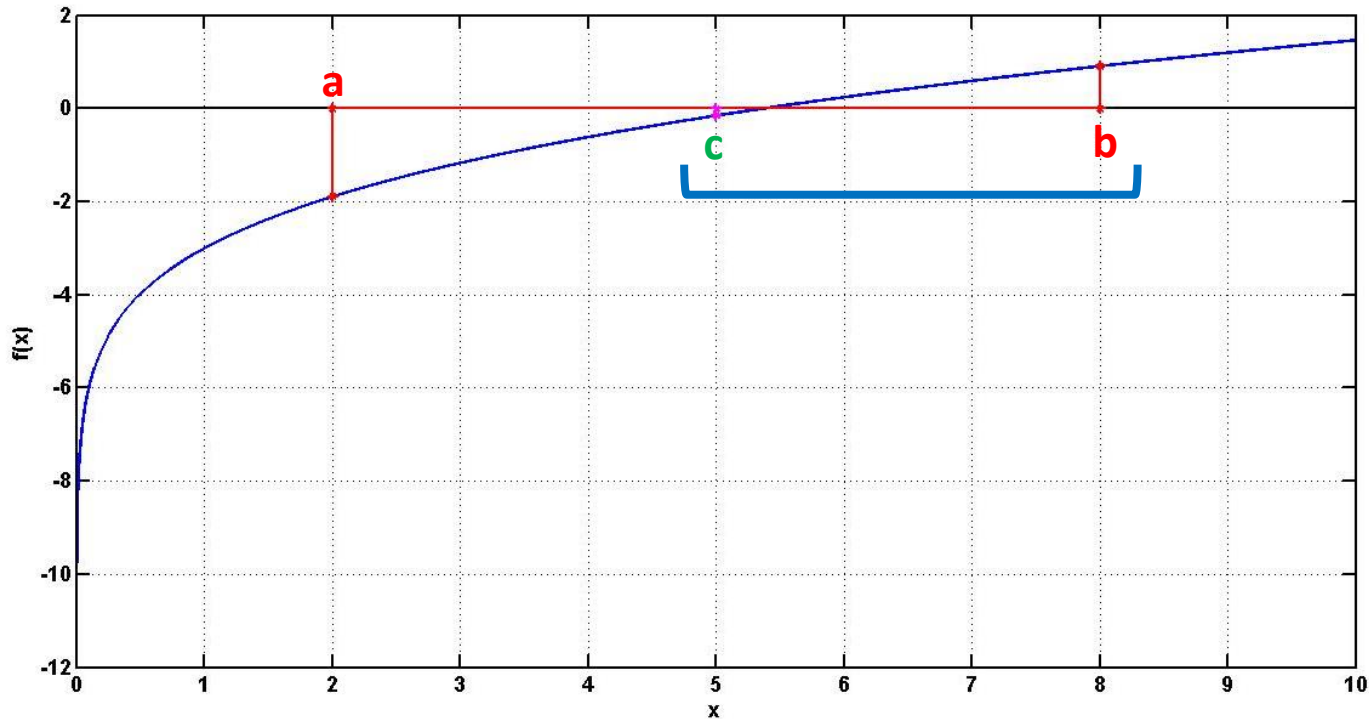
Para utilizar este método graficamos la ecuación y estimamos visualmente donde se encuentra la raíz



Teorema de Bolzano

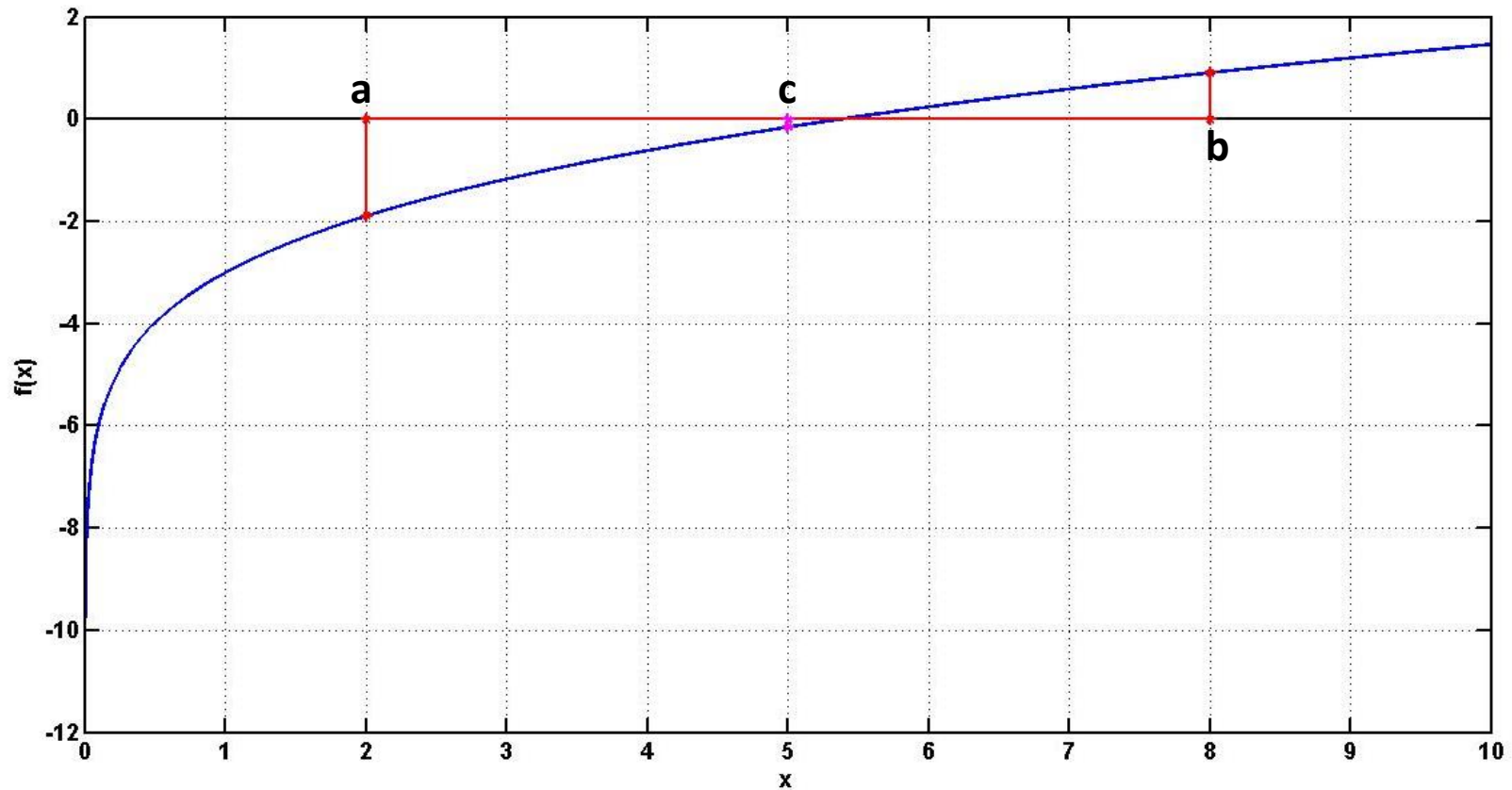
Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos contrarios. Entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) con $f(c) = 0$.

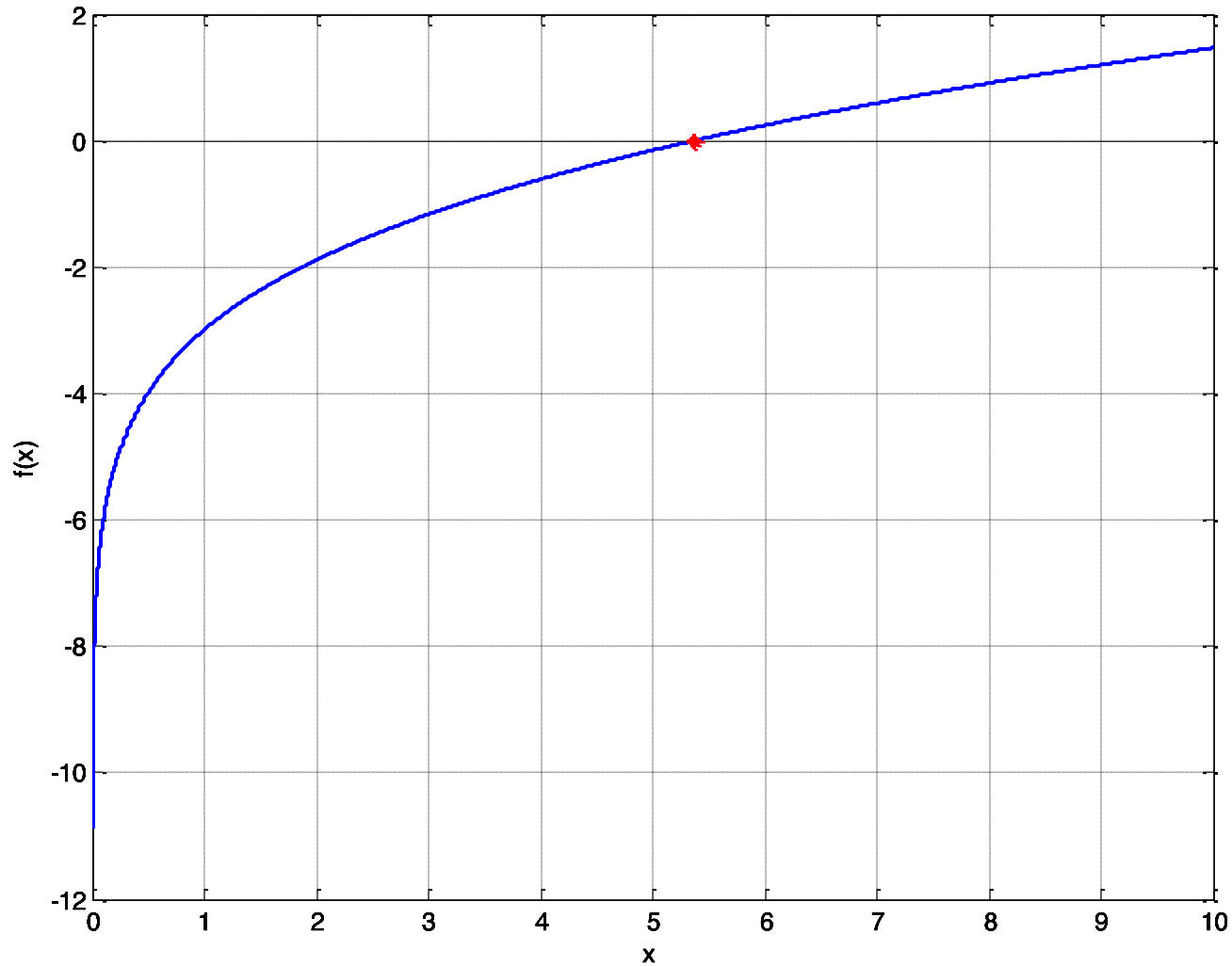
Para utilizar este método necesitamos dos puntos donde la función cambie de signo. El nuevo punto corresponde a la mitad del intervalo y debe seleccionarse de manera de conservar la diferencia de signo.

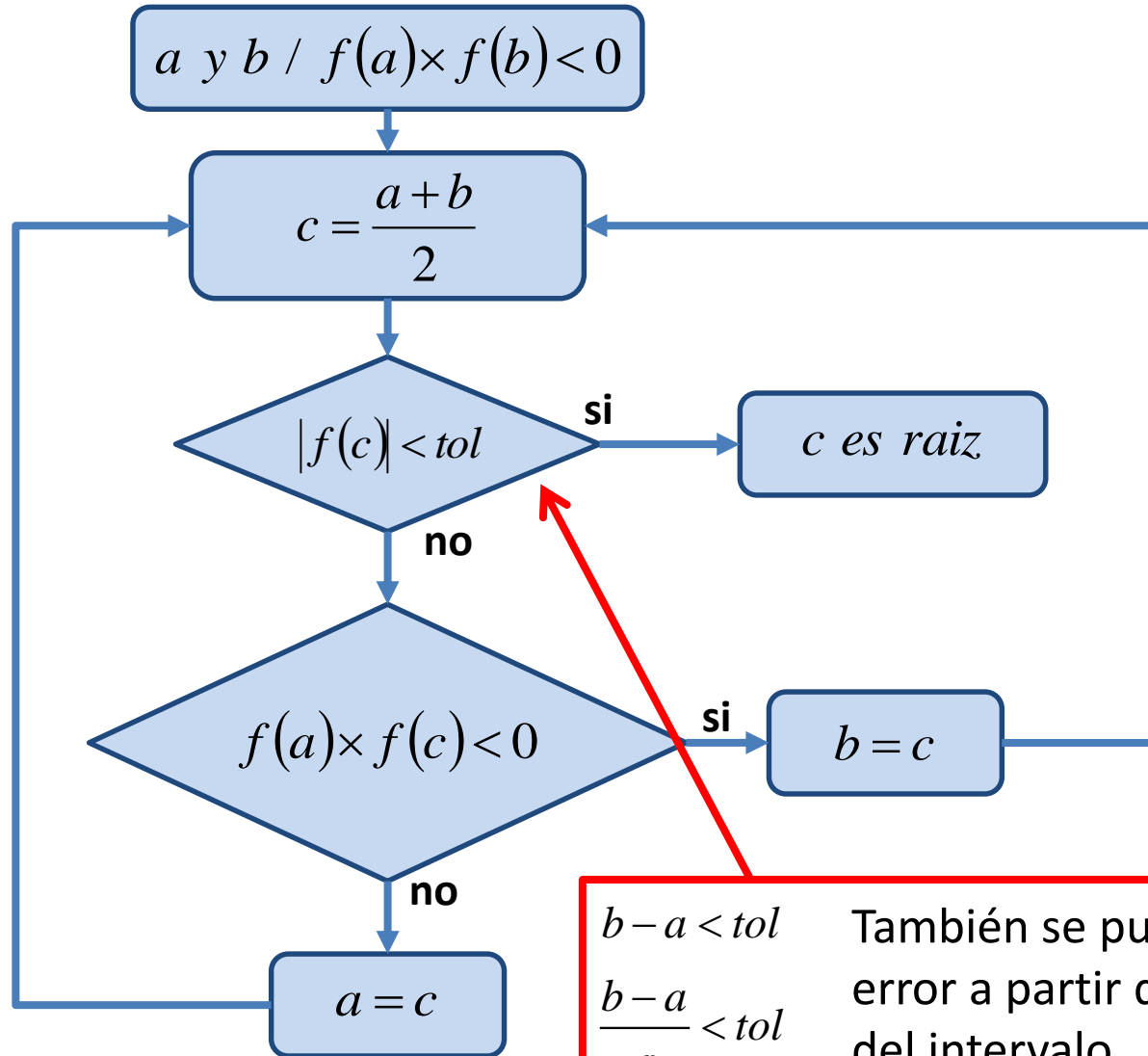


Debemos lograr que el intervalo sea lo mas pequeño posible en torno a la raíz.
¿Cómo lo achicamos?

Evaluamos el valor de la función en la mitad del intervalo
¿Cuál es el nuevo intervalo?







a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error

$$\sqrt{x} + \ln(x) - 4 = 0$$

$$a \quad \quad \quad i = 0 \quad \quad \quad b \quad b - a$$

$$i = 1 \quad \quad \quad \frac{b - a}{2}$$

$$i = 2 \quad \quad \quad \frac{b - a}{2 \times 2}$$

$$i = 3 \quad \quad \quad \frac{b - a}{2 \times 2 \times 2}$$

$$i = 4 \quad \quad \quad \frac{b - a}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

El tamaño del intervalo se reduce a la mitad en cada iteración.
¿Cuál es el tamaño del intervalo en la iteración i ?

$$\frac{(b - a)}{2^i}$$

La relación del tamaño del intervalo con el número de iteración nos sirve para conocer de antemano cuantas iteraciones debemos realizar.

Es decir, en la iteración N el tamaño del intervalo debe ser igual a la tolerancia deseada.

$$tol = \frac{(b - a)}{2^N}$$

Ejemplo:

Encontrar el número de iteraciones necesarias para obtener por el método de la bisección la raíz de la ecuación presentada en el intervalo [5 6] adoptando una tolerancia de $tol=10^{-5}$.

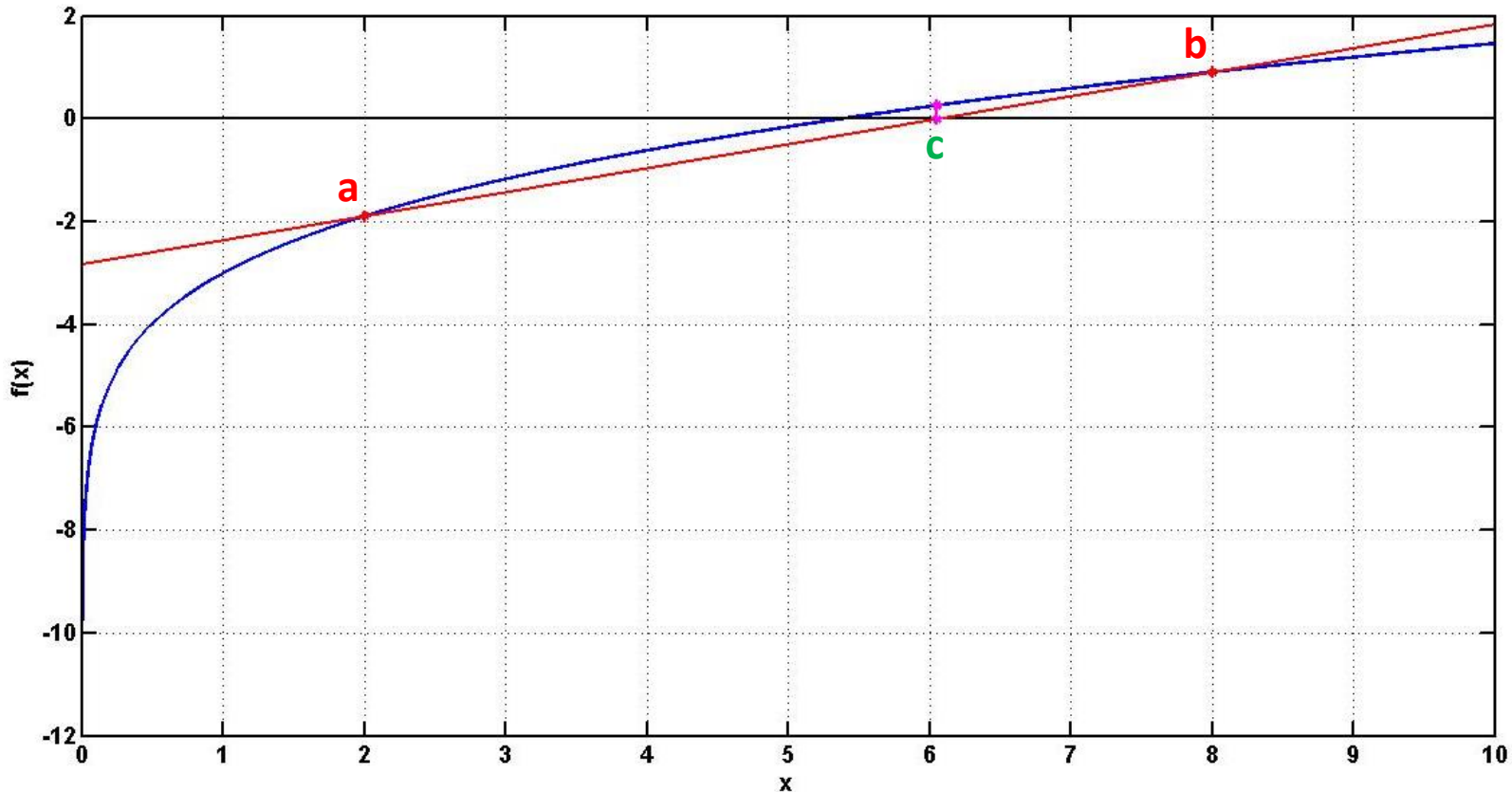
$$tol = \frac{(b - a)}{2^N} \Rightarrow 10^{-5} = \frac{(6 - 5)}{2^N}$$

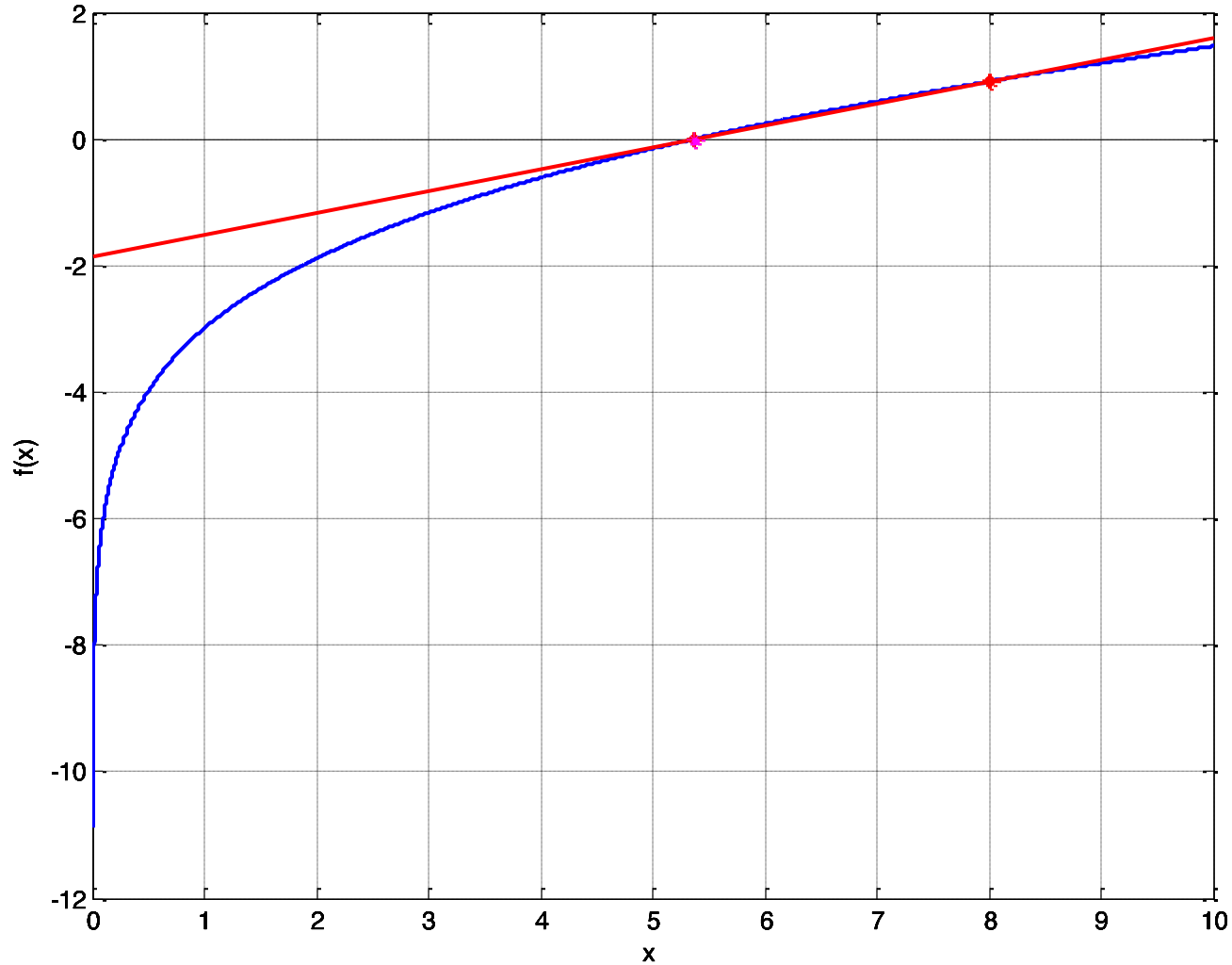
$$-5 = \log_{10}(6 - 5) - N \log_{10} 2$$

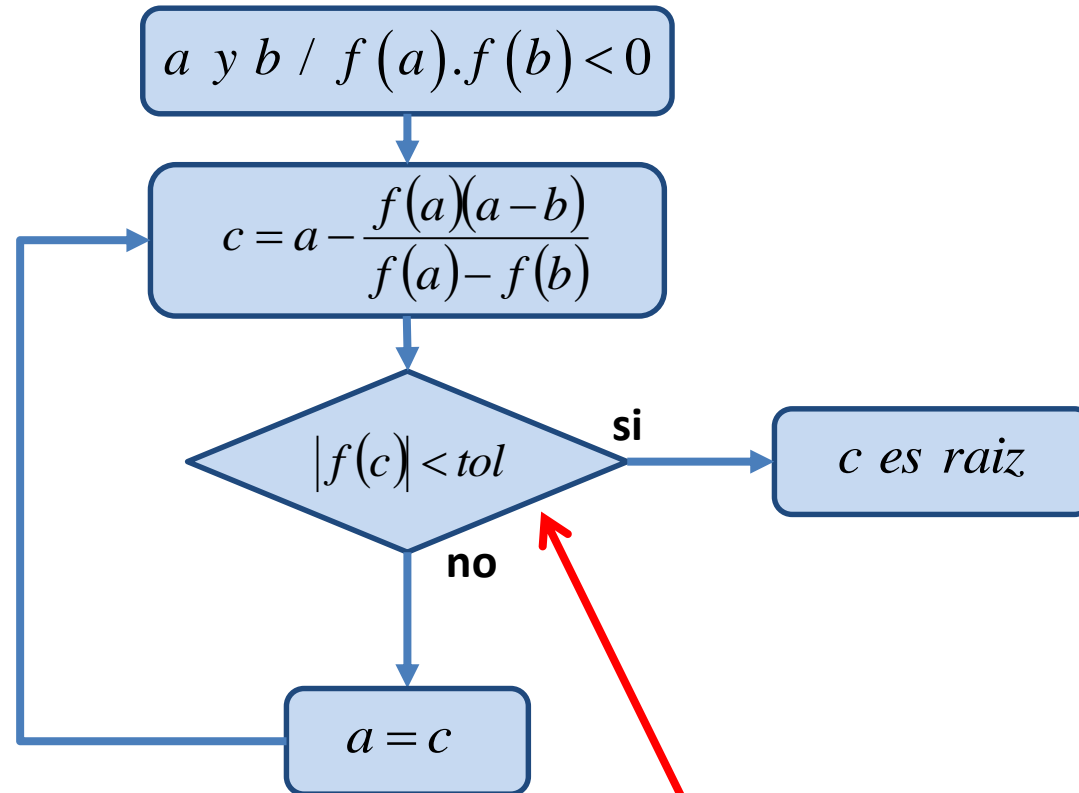
$$N = \frac{\log_{10}(6 - 5) + 5}{\log_{10} 2} \Rightarrow N = 16.609$$

(17 iteraciones)

Para utilizar este método necesitamos dos puntos donde la función cambie de signo. El nuevo punto surge de la intersección de la recta que los une con el eje de las abscisas.







$$|c - a| < tol$$

$$\left| \frac{c - a}{a} \right| < tol$$

También se puede medir el error a partir del valor de la variable independiente

a	b	f(a)	f(b)	c	error

Para utilizar este método necesitamos un punto y redefinir la ecuación de la siguiente manera:

Dada la ecuación original del tipo:

$$f(x) = 0$$

Debemos obtener una expresión en donde la incógnita es una función de si misma:

$$x = F(x)$$

Sea la función: $y = f(x)$

Se desea hallar x^* tal que $y = f(x^*) = 0$

Se debe definir una nueva función $F(x)$ del tipo: $x = F(x)$

$F(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se obtiene sumando miembro a miembro en la expresión original } x \\ \text{Despejando } x \text{ de algún término} \end{array} \right.$

$$f(x) = \sqrt{x} + \ln(x) - 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \sqrt{x} + \ln(x) - 4 + x \\ F(x) = (4 - \ln(x))^2 \\ F(x) = e^{(4 - \sqrt{x})} \end{array} \right.$$

A partir de un valor inicial (punto de arranque o valor semilla) se genera un nuevo valor utilizando $F(x)$

$$x^{(0)} = \alpha_0$$

$$x^{(1)} = F(x^{(0)})$$

$$x^{(2)} = F(x^{(1)})$$

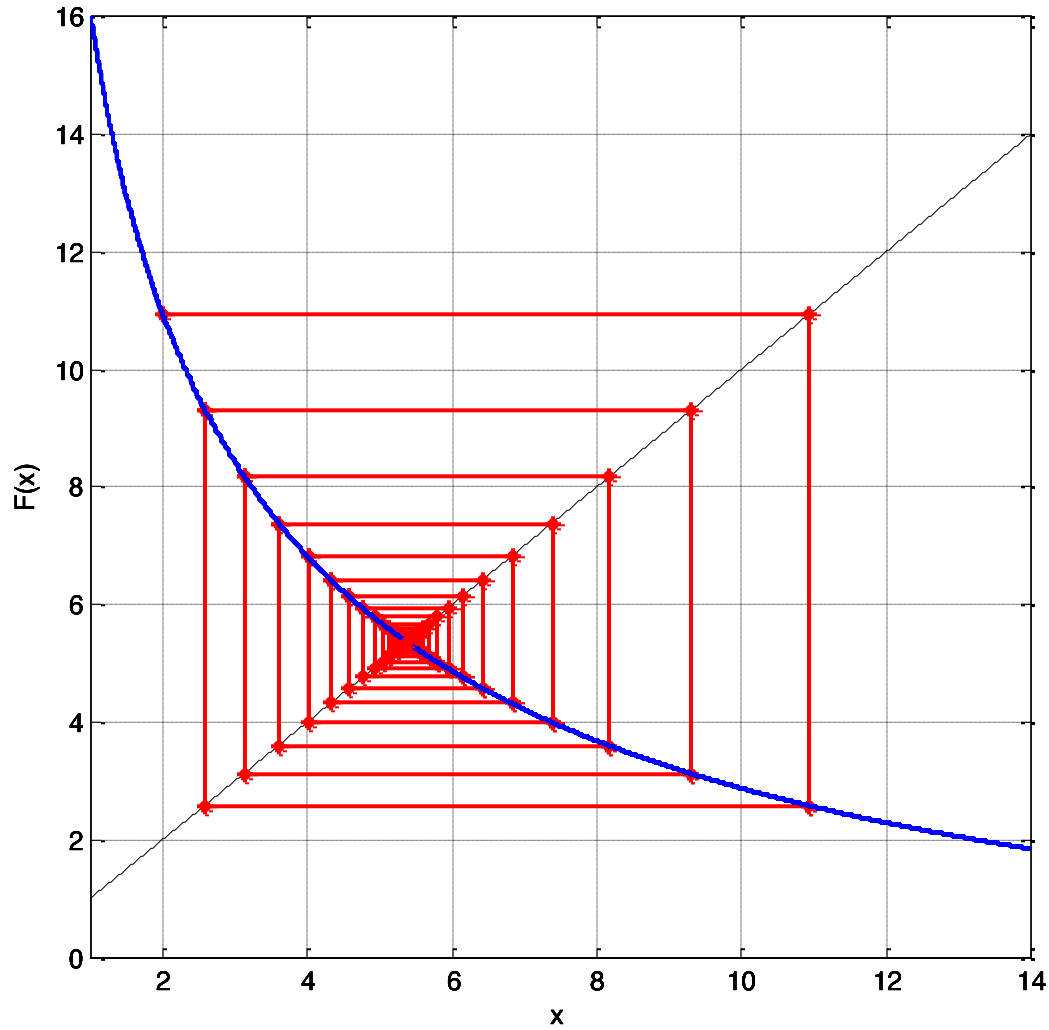
$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$$

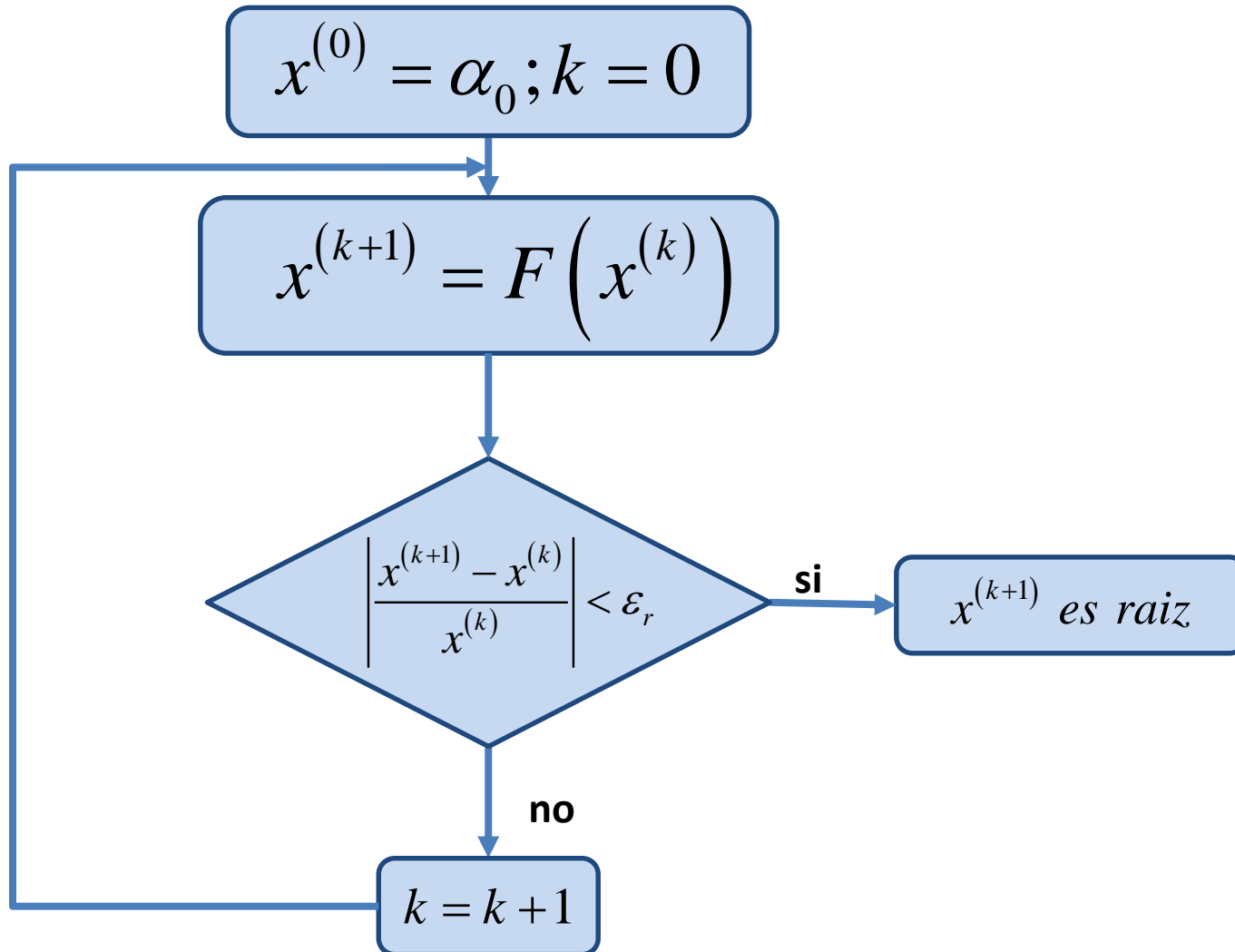
$$k = 1, 2, \dots, k_{\max}$$

$$\left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} \right| < \varepsilon_r$$

$$\left| x^{(k+1)} - F(x^{(k+1)}) \right| < \varepsilon$$

Se generan valores hasta satisfacer la tolerancia del error o alcanzar el número máximo de iteraciones





i	x_i	$F(x_i)$	<i>Error</i>
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Mejora el proceso de sustitución directa.

A partir del valor inicial se generan un valor de manera tradicional y luego se aplica la siguiente ley recursiva:

$$\omega = \frac{F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

$$q = \frac{\omega}{\omega - 1}$$

$$x^{(k+1)} = qx^{(k)} + (1 - q)F(x^{(k)})$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, k_{\max}$$

$$\left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} \right| < \varepsilon_r$$

$$\left| x^{(k+1)} - F(x^{(k+1)}) \right| < \varepsilon$$

Se generan valores hasta satisfacer la tolerancia del error o alcanzar el número máximo de iteraciones

Paso a paso para una mejor comprensión:

$$x^{(0)} = \alpha_0$$

$$x^{(1)} = F(x^{(0)})$$

$$\omega = \frac{F(x^{(1)}) - F(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}}$$

$$q = \frac{\omega}{\omega - 1}$$

$$x^{(2)} = qx^{(1)} + (1 - q)F(x^{(1)})$$

$$\omega = \frac{F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

$$q = \frac{\omega}{\omega - 1}$$

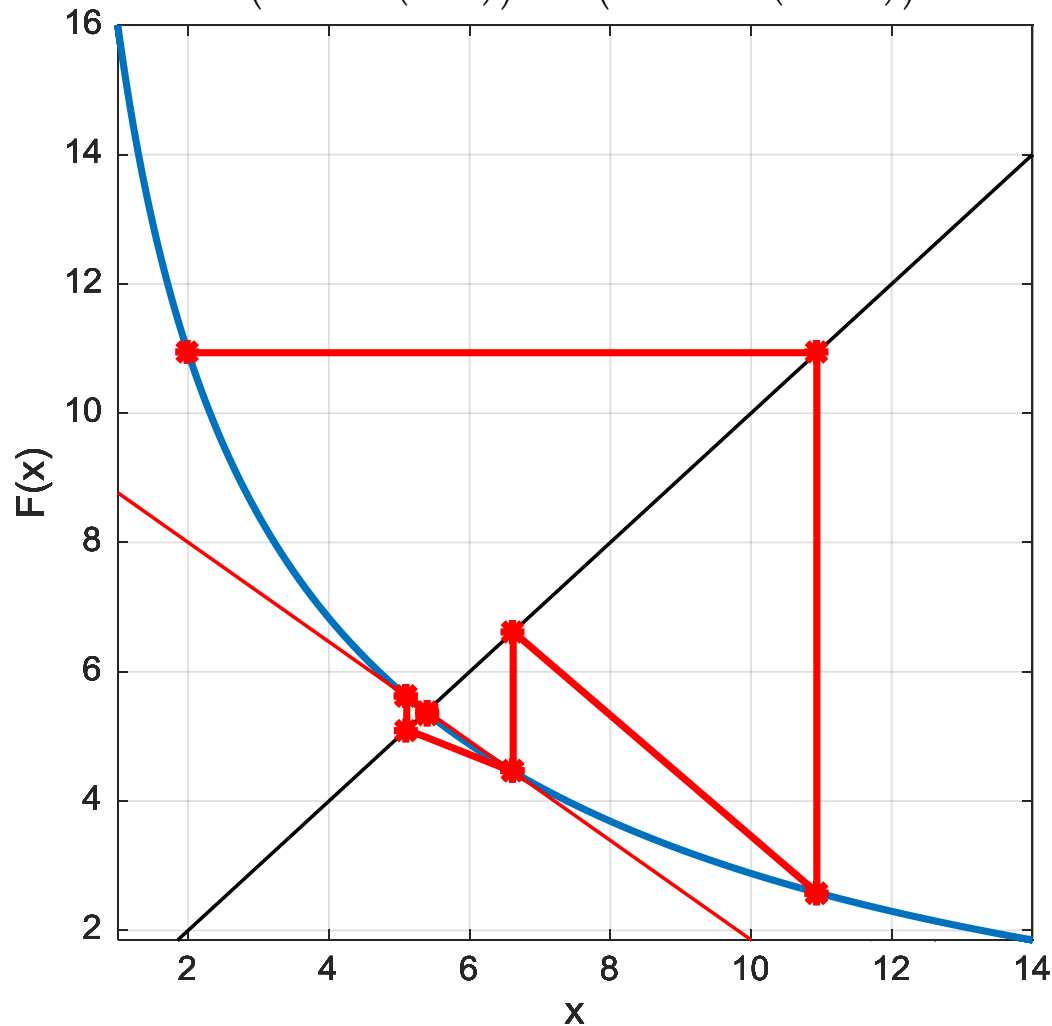
$$x^{(k+1)} = qx^{(k)} + (1 - q)F(x^{(k)})$$

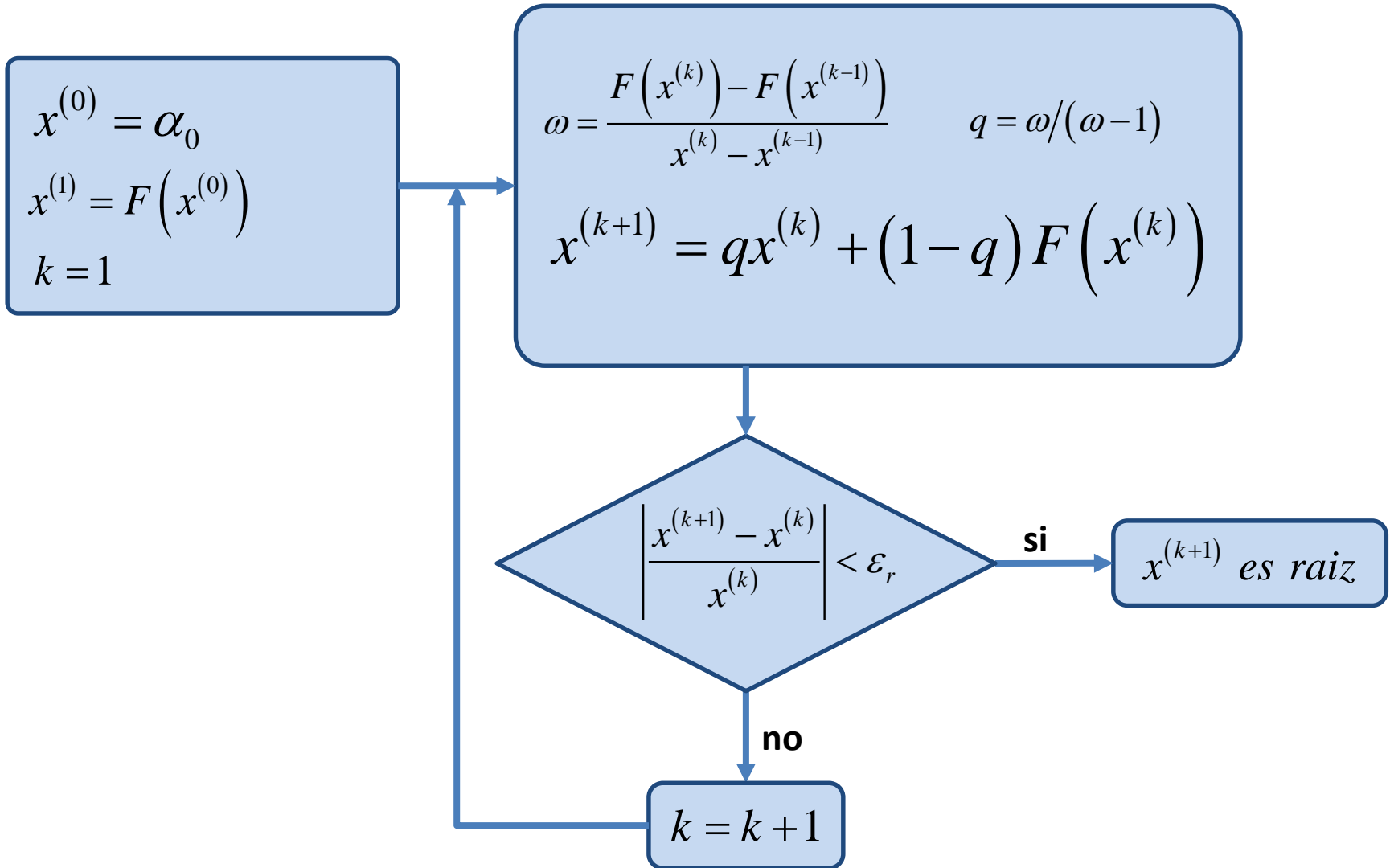
$$k = 1, 2, 3, \dots, k_{\max}$$

$$\left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} \right| < \varepsilon_r$$

$$\left| x^{(k+1)} - F(x^{(k+1)}) \right| < \varepsilon$$

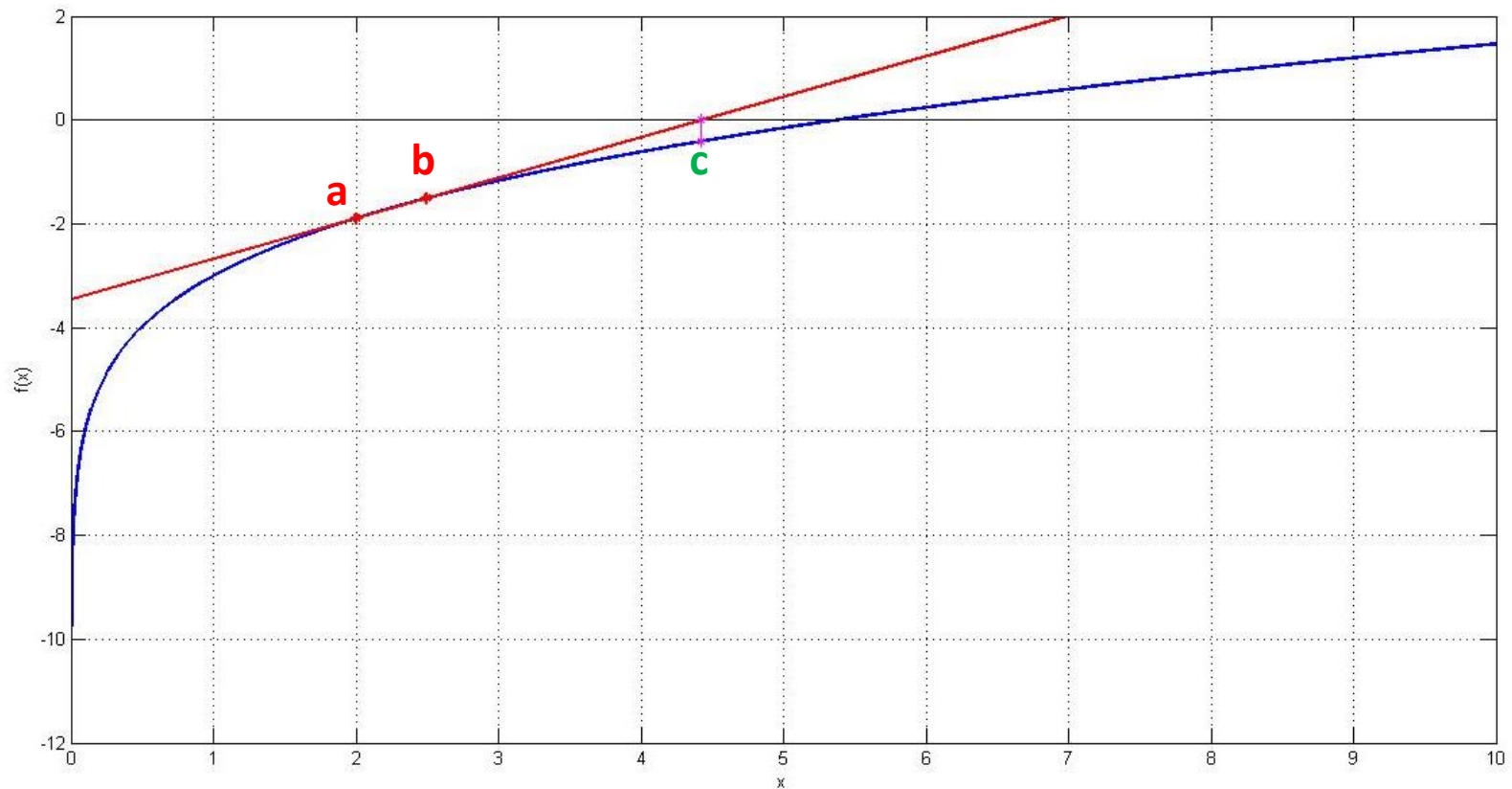
El nuevo valor generado en la iteración k , o sea $x^{(k+1)}$ corresponde a la intersección de la recta que une los puntos $(x^{(k)}, F(x^{(k)}))$ y $(x^{(k-1)}, F(x^{(k-1)}))$ con la recta $y=x$

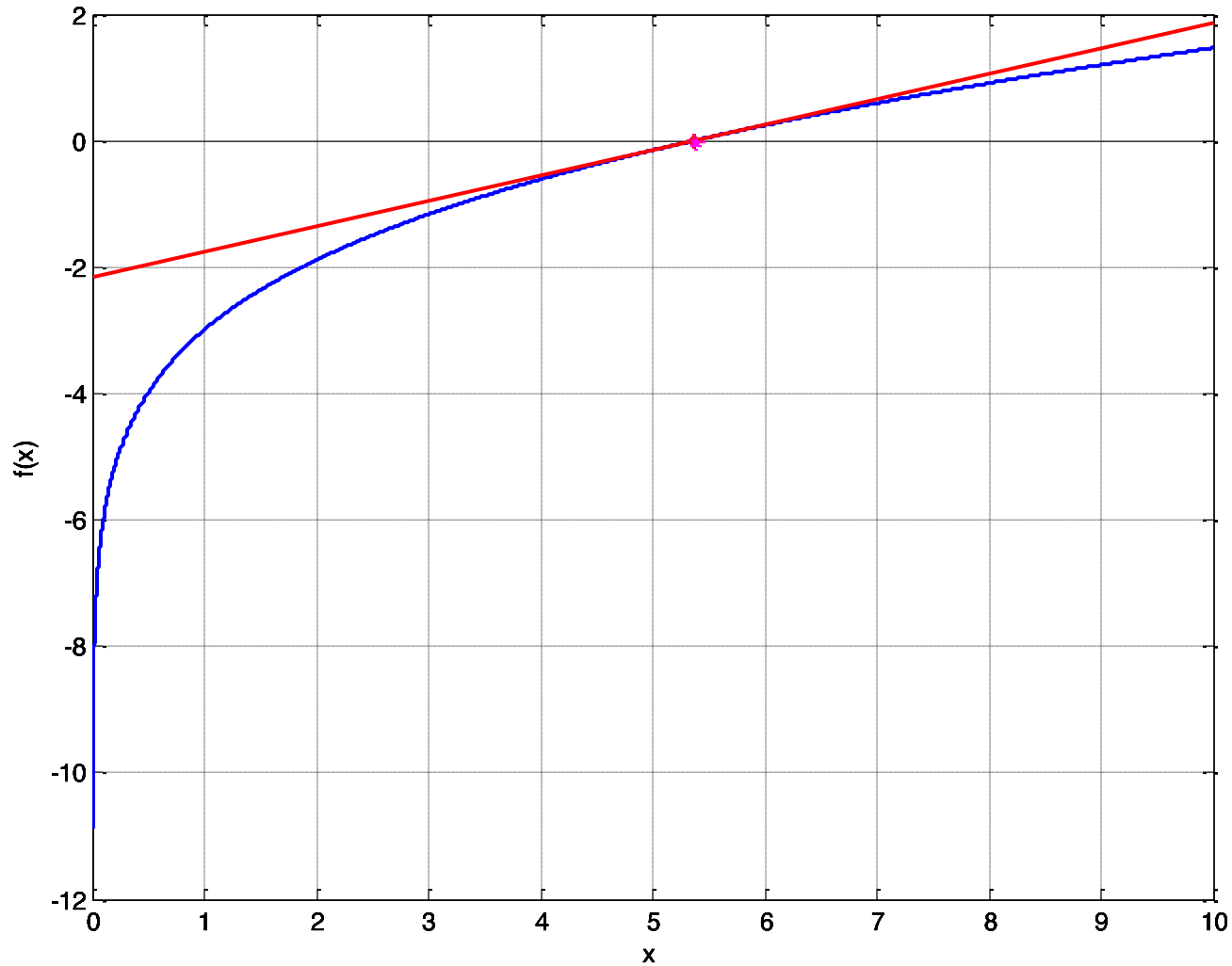




i	x_i	$F(x_i)$	ω	q	<i>Error</i>
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Para utilizar este método solo necesitamos dos puntos y la recta que los une. El nuevo punto surge de su intersección con el eje de las abscisas.





A partir de dos valores iniciales (puntos de arranque) se genera un nuevo valor que corresponde a la intersección de la secante a la curva con el eje de las abscisas.

$$x^{(0)} = \alpha_0$$

$$x^{(1)} = \alpha_1$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})(x^{(1)} - x^{(0)})}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})(x^{(2)} - x^{(1)})}{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}$$

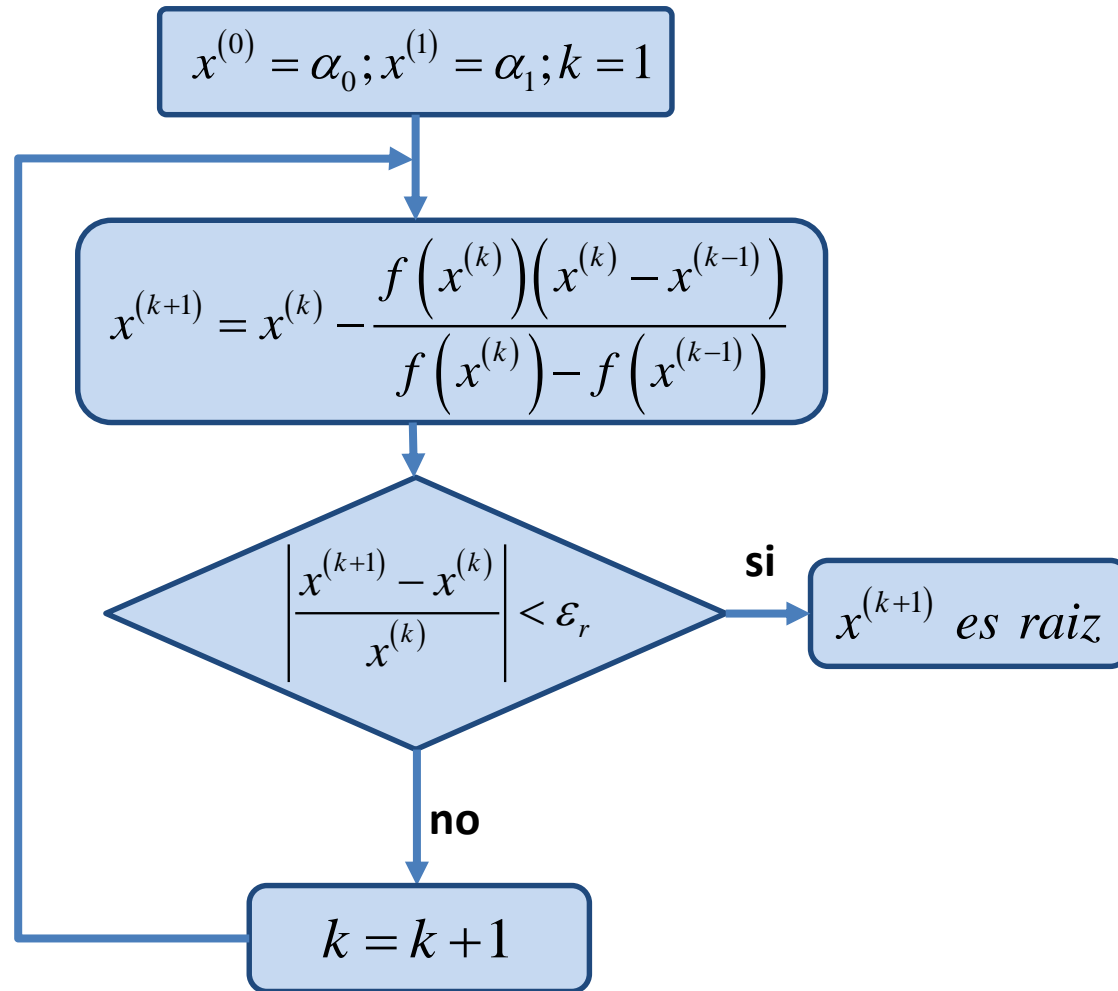
$$k = 1, 2, \dots, k_{\max}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

$$\left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} \right| < \varepsilon_r$$

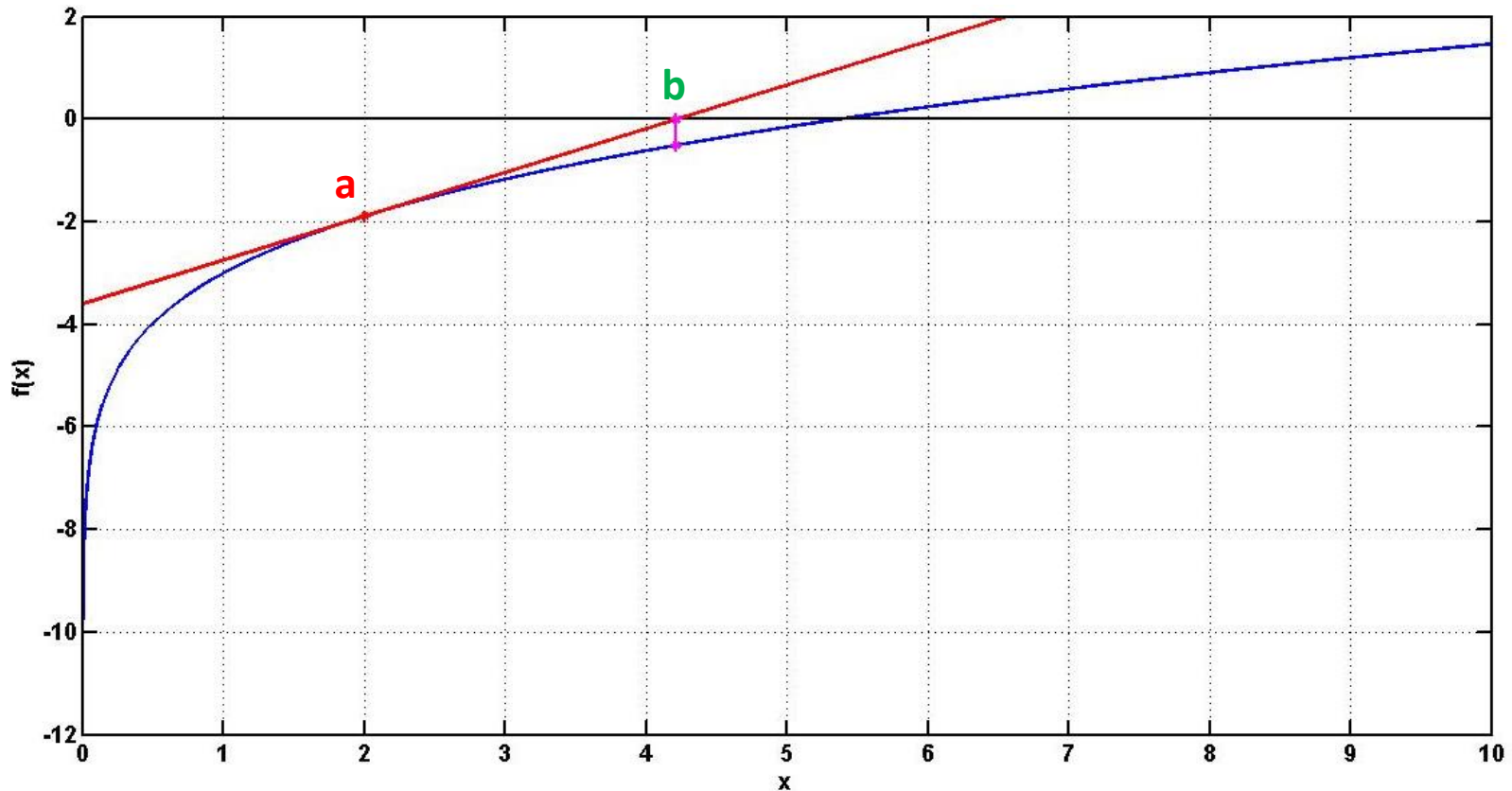
$$\left| f(x^{(k+1)}) \right| < \varepsilon$$

Se generan valores hasta satisfacer la tolerancia del error o alcanzar el número máximo de iteraciones



i	x_i	$f(x_i)$	<i>Error</i>
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Para utilizar este método solo necesitamos un punto y la derivada de la función. El nuevo punto surge de la intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas.



A partir de un valor inicial (punto de arranque o valor semilla) se genera un nuevo valor que corresponde a la intersección de la recta tangente a la curva con el eje de las abscisas.

$$x^{(0)} = \alpha_0$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

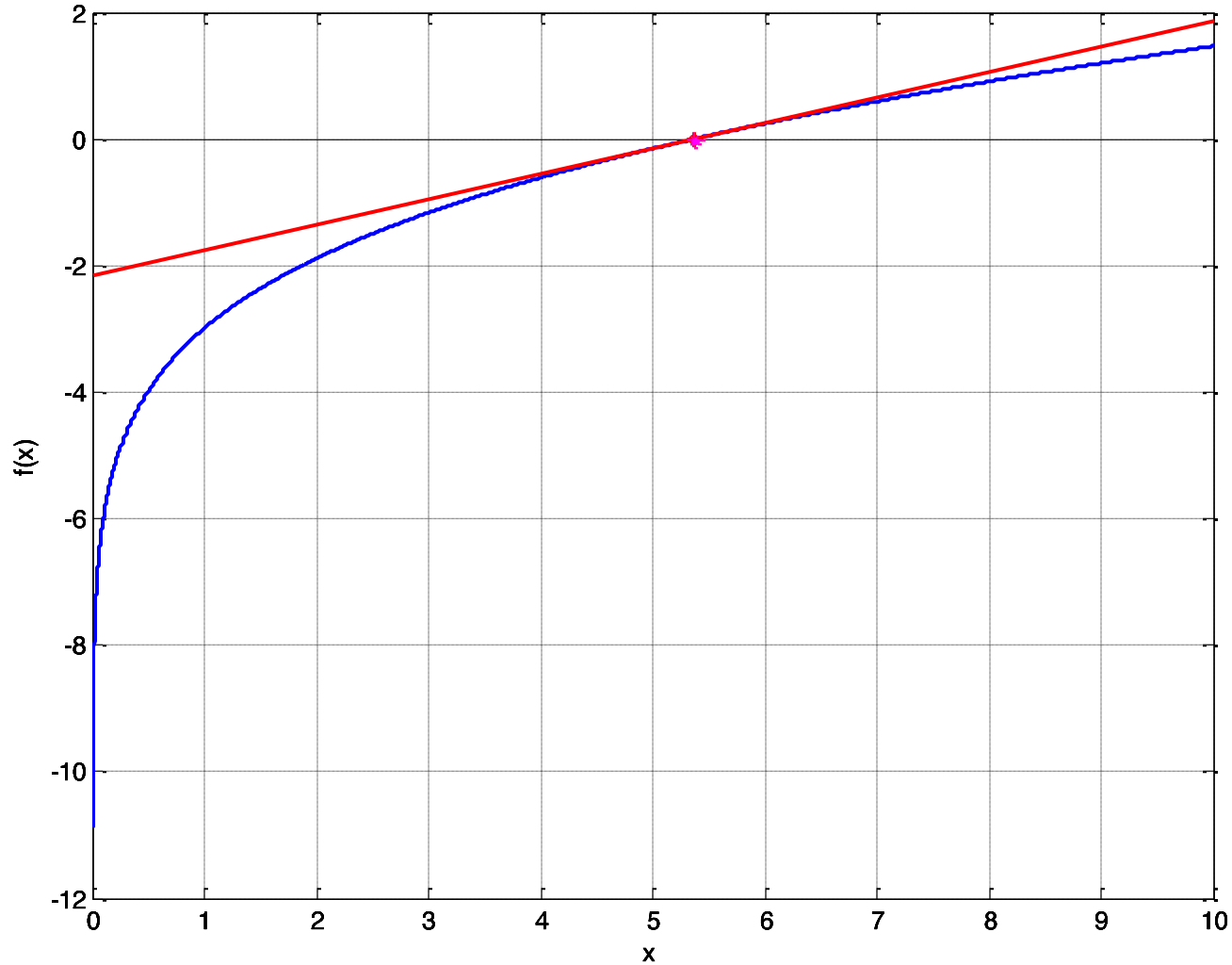
$$k = 1, 2, \dots, k_{\max}$$

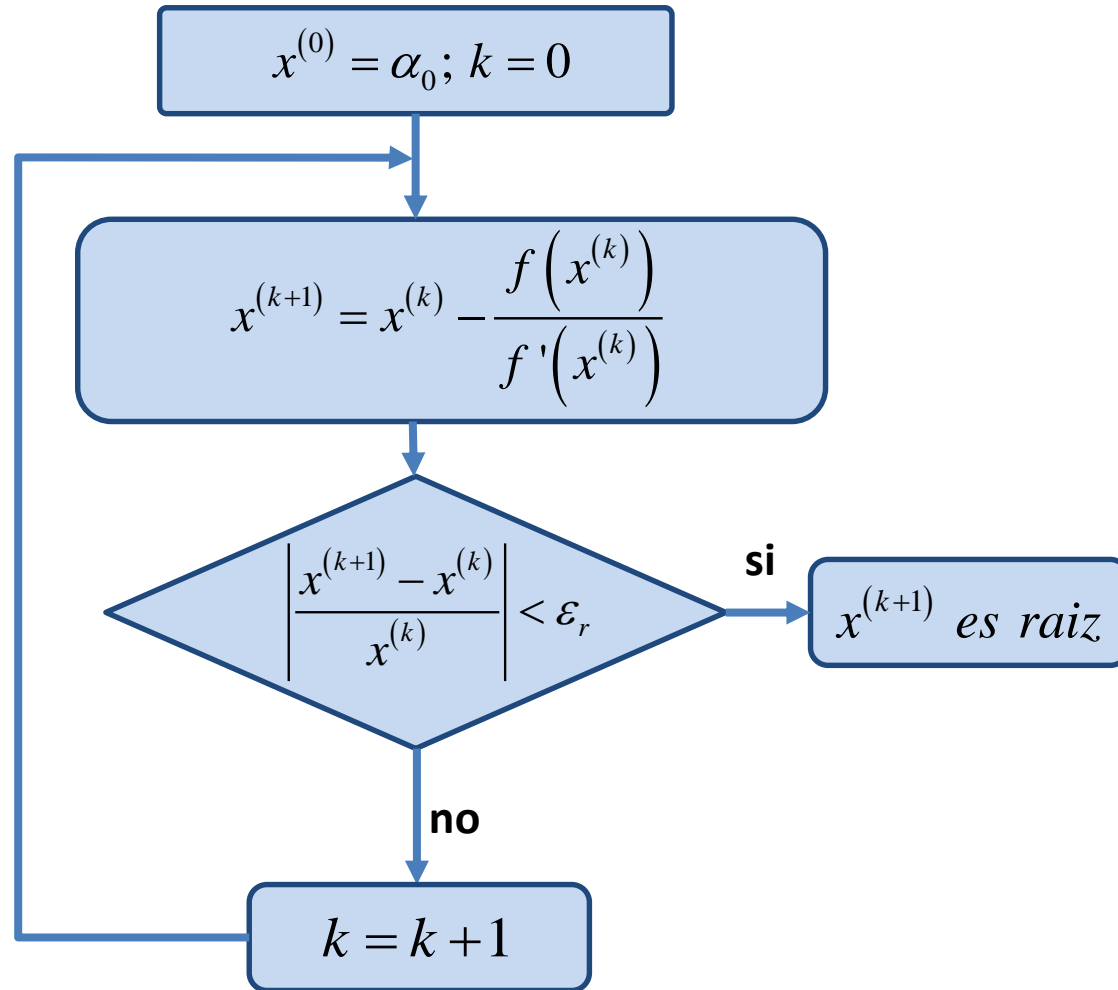
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$\left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} \right| < \varepsilon_r$$

Se generan valores hasta satisfacer la tolerancia del error o alcanzar el número máximo de iteraciones

$$\left| f(x^{(k+1)}) \right| < \varepsilon$$





i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	<i>Error</i>
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				

$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ Ralston and Rabinowitz (1978) propusieron la función $u(x)$ que tiene las mismas raíces que $f(x)$

Por lo tanto, al aplicar N-R a la nueva función $u(x)$ se obtiene: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{u(x^{(k)})}{u'(x^{(k)})}$

luego,

$$\frac{u(x)}{u'(x)} = \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}$$

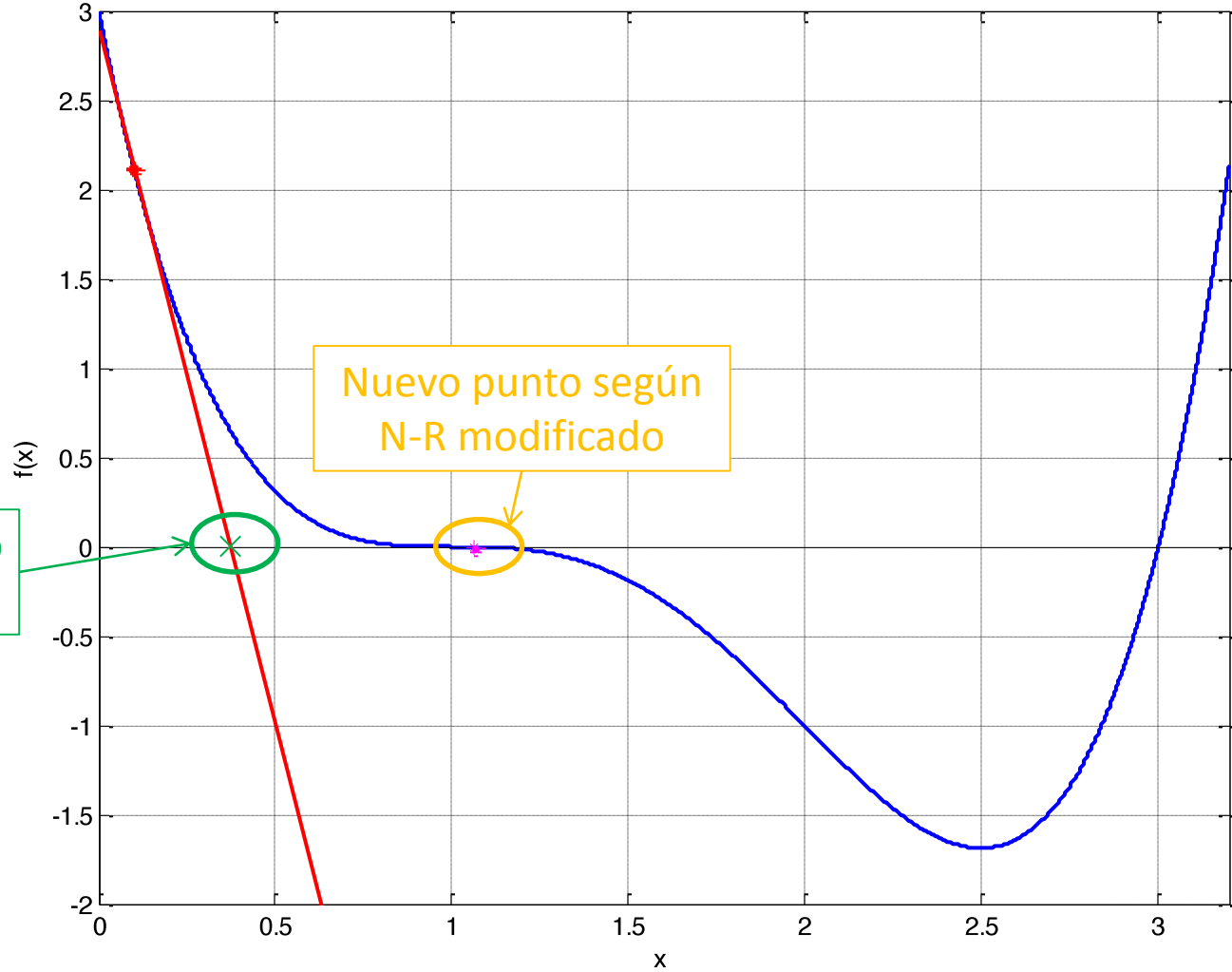
$k = 1, 2, \dots, k_{\max}$

Se generan valores hasta satisfacer la tolerancia del error o alcanzar el número máximo de iteraciones

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{[f'(x^{(k)})]^2 - f(x^{(k)})f''(x^{(k)})}$$

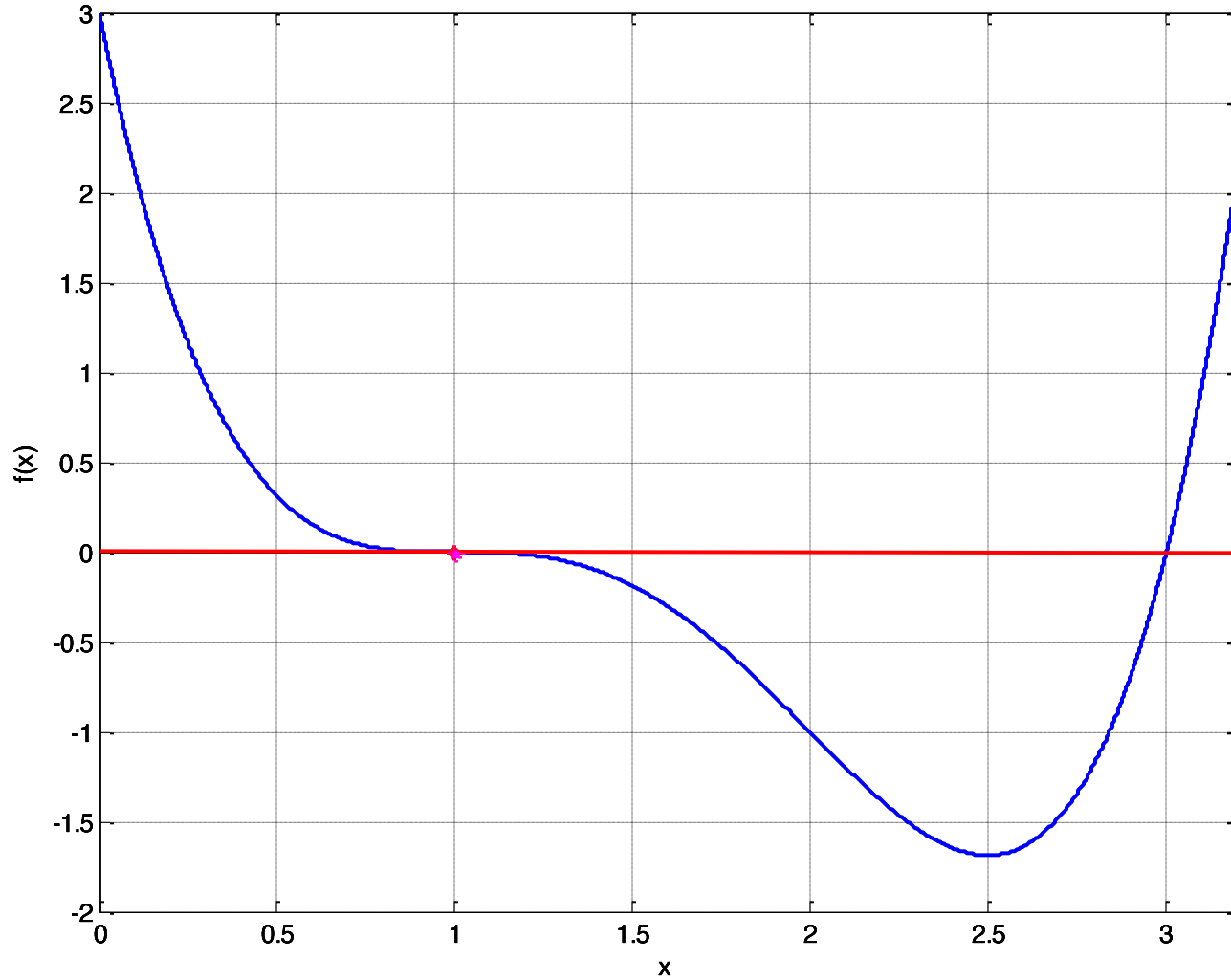
$$\left| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} \right| < \varepsilon_r$$

$$\left| f(x^{(k+1)}) \right| < \varepsilon$$

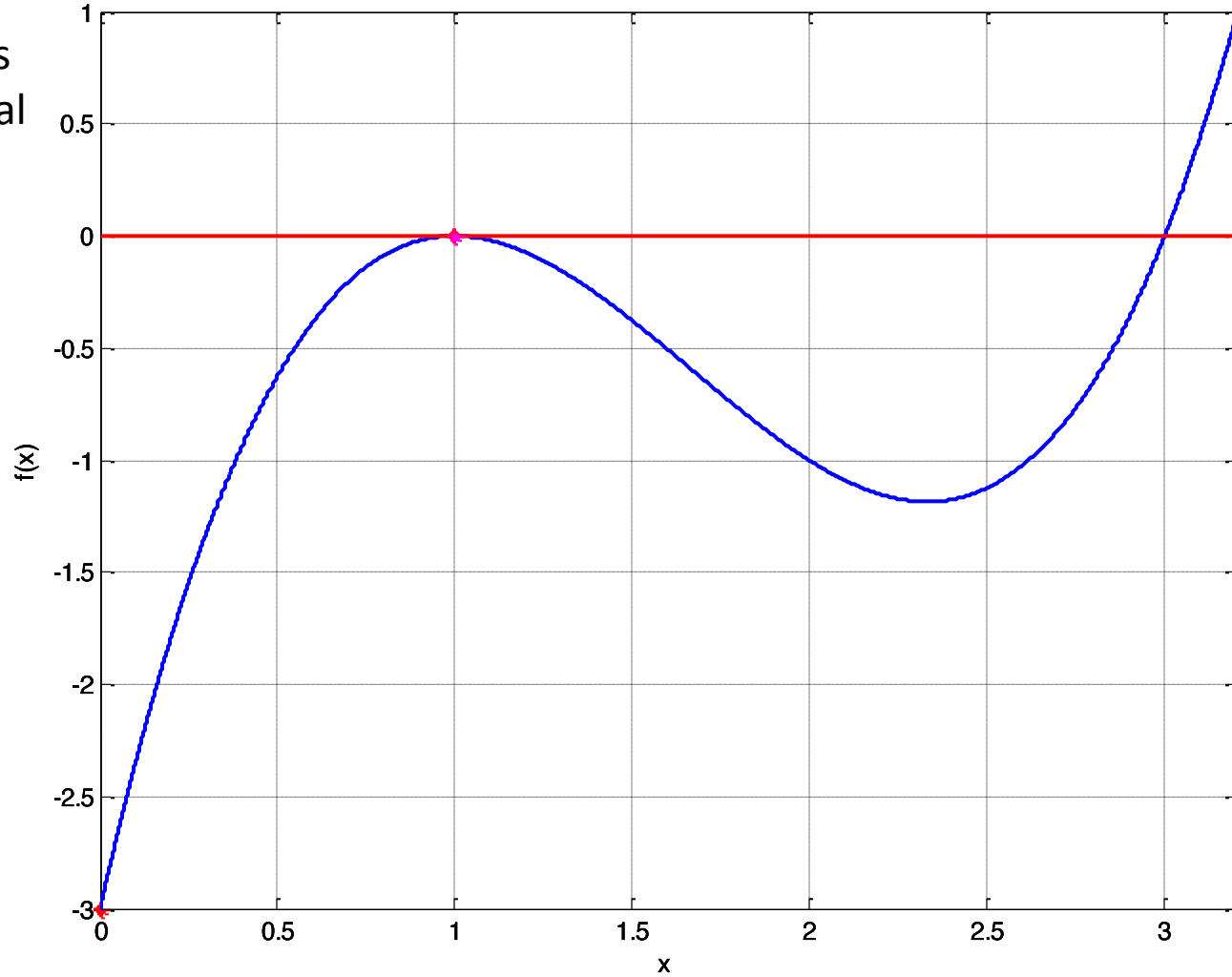


Nuevo punto según N-R

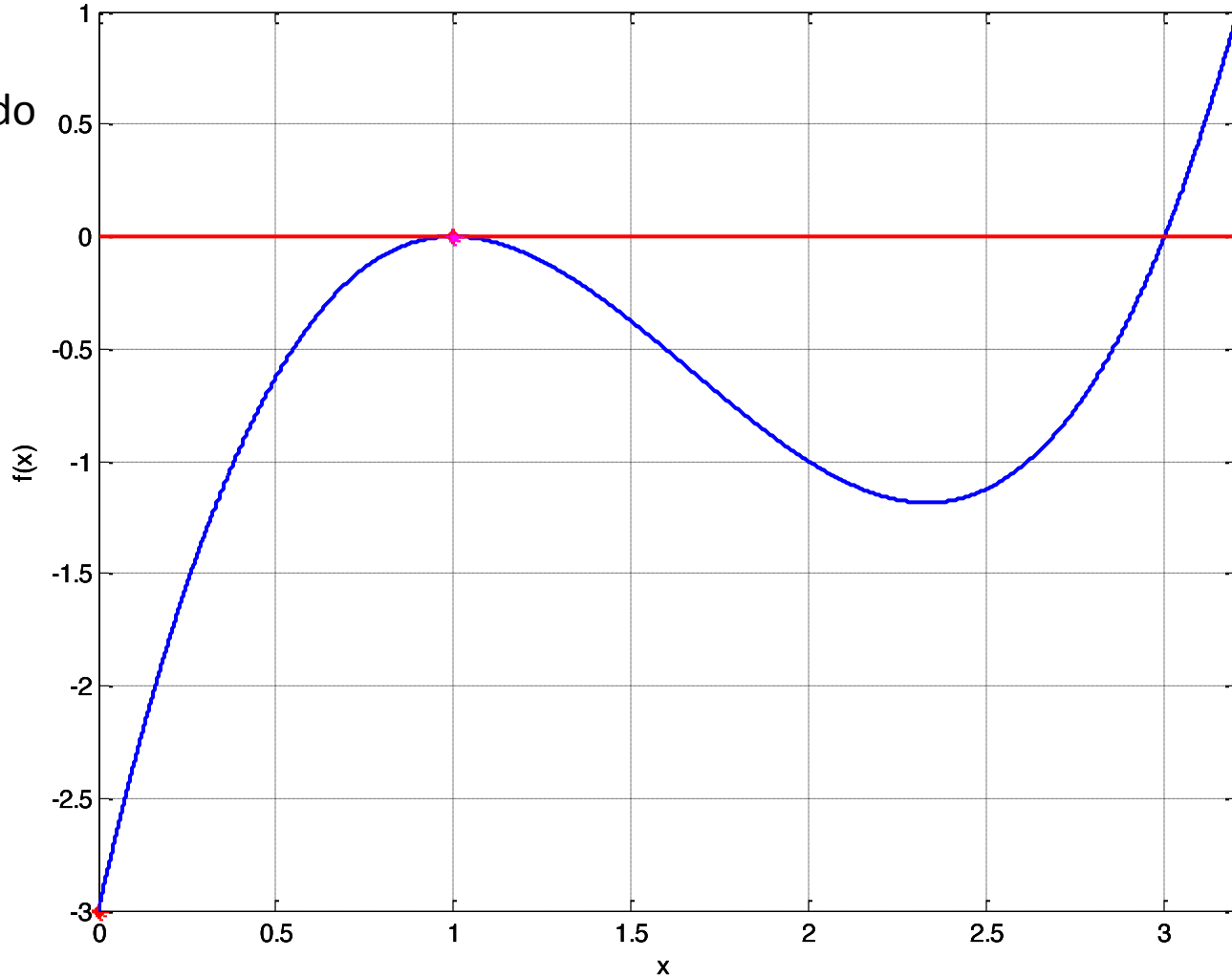
Nuevo punto según N-R modificado

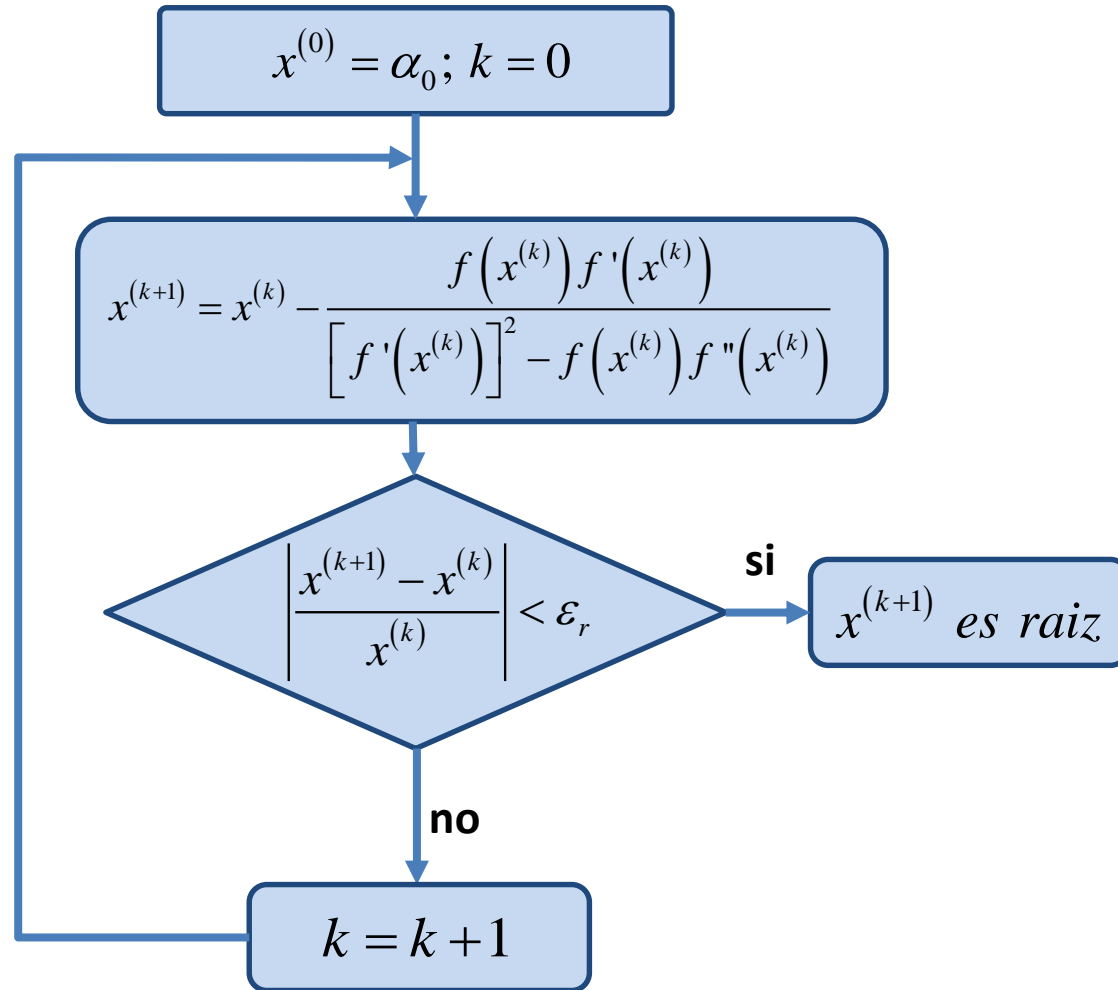


24 iteraciones
N-R tradicional



5 iteraciones
N-R modificado





i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	<i>Error</i>
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					

- Cualquier polinomio cúbico (incluida las EoS) puede expresarse de la siguiente forma:

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

- La primera raíz se encuentra utilizando la modificación de N-R modificado. Se sugiere utilizar como valor semilla el factor de compresibilidad de los gases ideales $z^{(0)}=1$
- Se utiliza la primera raíz hallada para factorizar el polinomio:

$$\left(z^3 + az^2 + bz + c \right) \Big|_{z - \alpha_1} \underbrace{\hspace{10em}}_{Q(z)}$$

- Debido a la factorización se cumple que:

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - \alpha_1)Q(z)$$

- Ambos miembros tienen las mismas raíces por lo que las dos restantes corresponden a las del polinomio $Q(z)$
- ¡ $Q(z)$ es una cuadrática!

- Factorización del polinomio original: $(z^3 + az^2 + bz + c) \Big|_{\substack{z - \alpha_1 \\ Q(z)}}$

	1	a	b	c
α_1		α_1	$\alpha_1(\alpha_1 + a)$	$\alpha_1(b + \alpha_1(\alpha_1 + a))$
	1	$\alpha_1 + a$	$b + \alpha_1(\alpha_1 + a)$	$c + \alpha_1(b + \alpha_1(\alpha_1 + a))$

0 (cero)

$$Q(z) = z^2 + (\alpha_1 + a)z + (b + \alpha_1(\alpha_1 + a))$$

$$D = (\alpha_1 + a)^2 - 4(b + \alpha_1(\alpha_1 + a)) \left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \text{ Las raíces restantes son reales} \\ D < 0 \text{ Las raíces restantes son imaginarias } (D < 0) \end{array} \right.$$

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

1. La primera raíz se encuentra utilizando la modificación de N-R modificado. Se sugiere utilizar como valor semilla $z^{(0)}=1$

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{f(z^{(k)})f'(z^{(k)})}{[f'(z^{(k)})]^2 - f(z^{(k)})f''(z^{(k)})}$$

2. Se analiza el discriminante de la nueva ecuación cuadrática

$$D = (\alpha_1 + a)^2 - 4(b + \alpha_1(\alpha_1 + a))$$

$$D \geq 0 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{-(\alpha_1 + a) + \sqrt{D}}{2} \\ \alpha_3 = \frac{-(\alpha_1 + a) - \sqrt{D}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} z_v = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ z_l = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{array}$$

$D < 0$ Las restantes raíces no son de interés físico