

Estimación del Incremento (h) Optimo

Prof.: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz

J.T.P.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

Aux. 2^{da}: Sra. Amalia Rueda

$$f'_n(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Adelante

$$f'_n(x_0) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Atrás

$$f'_n(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Central

Vamos a analizar el comportamiento de la función $f(x)$ y su derivada analítica $f'(x)$ en el intervalo $[0.1;5]$

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

```
function y=funcion(x)
y=(exp(-x)-1)./x;
endfunction
```

$$f'_a(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x^2}$$

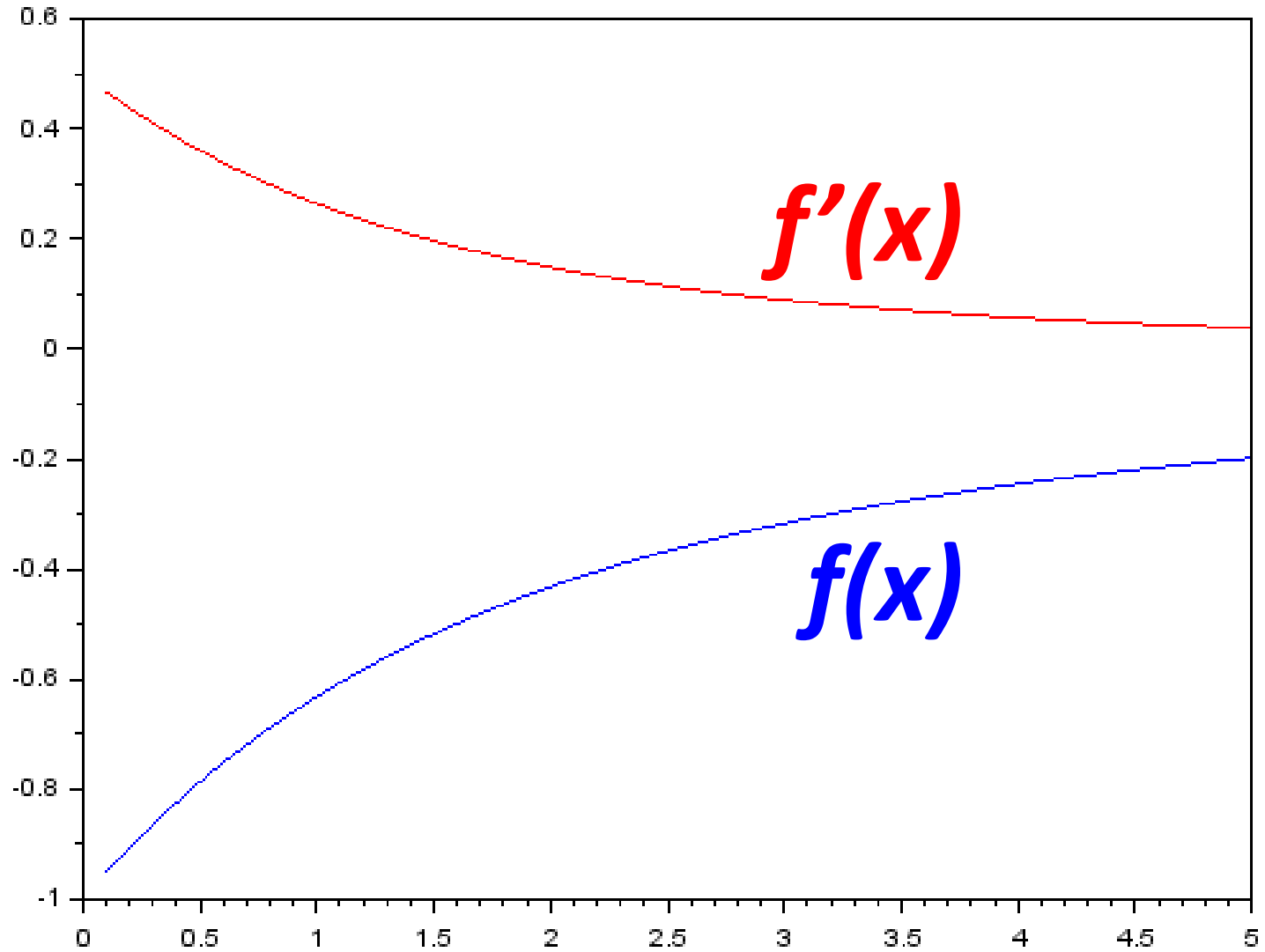
```
function y=derivada(x)
y= -exp(-x).*(x.^-1)-(exp(-x)-1).*(x.^-2);
endfunction
```

```
x=linspace(0.1,5,100);  
y=funcion(x);  
yp=derivada(x);
```

**Creamos los pares
de valores**

```
plot(x,y,'b')  
plot(x,yp,'r')
```

Graficamos



$$f'_n(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = \frac{e^{-(x+h)} - 1}{(x+h)}$$

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

Se observa claramente que para distintos valores de h , se obtendrán distintas estimaciones de la derivada.

Analizamos el punto $x=2$

$$f(2) = \frac{e^{-2} - 1}{2} \cong -0.432332$$

$$f'_a(2) = -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2} - 1}{2^2} \cong 0.148498$$

Ahora estimamos la derivada en $x=2$ con $h=0.1$

$$f(2.1) = \frac{e^{-2.1} - 1}{2.1} \cong -0.417878 \quad f(2) = \frac{e^{-2} - 1}{2} \cong -0.432332$$

$$f'_n(2) = \frac{f(2 + 0.1) - f(2)}{0.1} \cong 0.144545$$

$$f'_a(2) = \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2} - 1}{2^2} \cong 0.148498$$

Ahora estimamos la derivada en $x=2$ con $h=0.01$

$$f'_n(2) = \frac{f(2.01) - f(2)}{0.01} \cong 0.148095$$

Ahora con $h=0.001$

$$f'_n(2) = \frac{f(2.001) - f(2)}{0.001} \cong 0.148458$$

Se observa como el error va decreciendo

$$\varepsilon = |\text{valor}_{real} - \text{valor}_{estimado}| = |f'_a(2) - f'_n(2)|$$

Vamos a graficar como se comporta la estimación numérica en el intervalo que estamos estudiando.

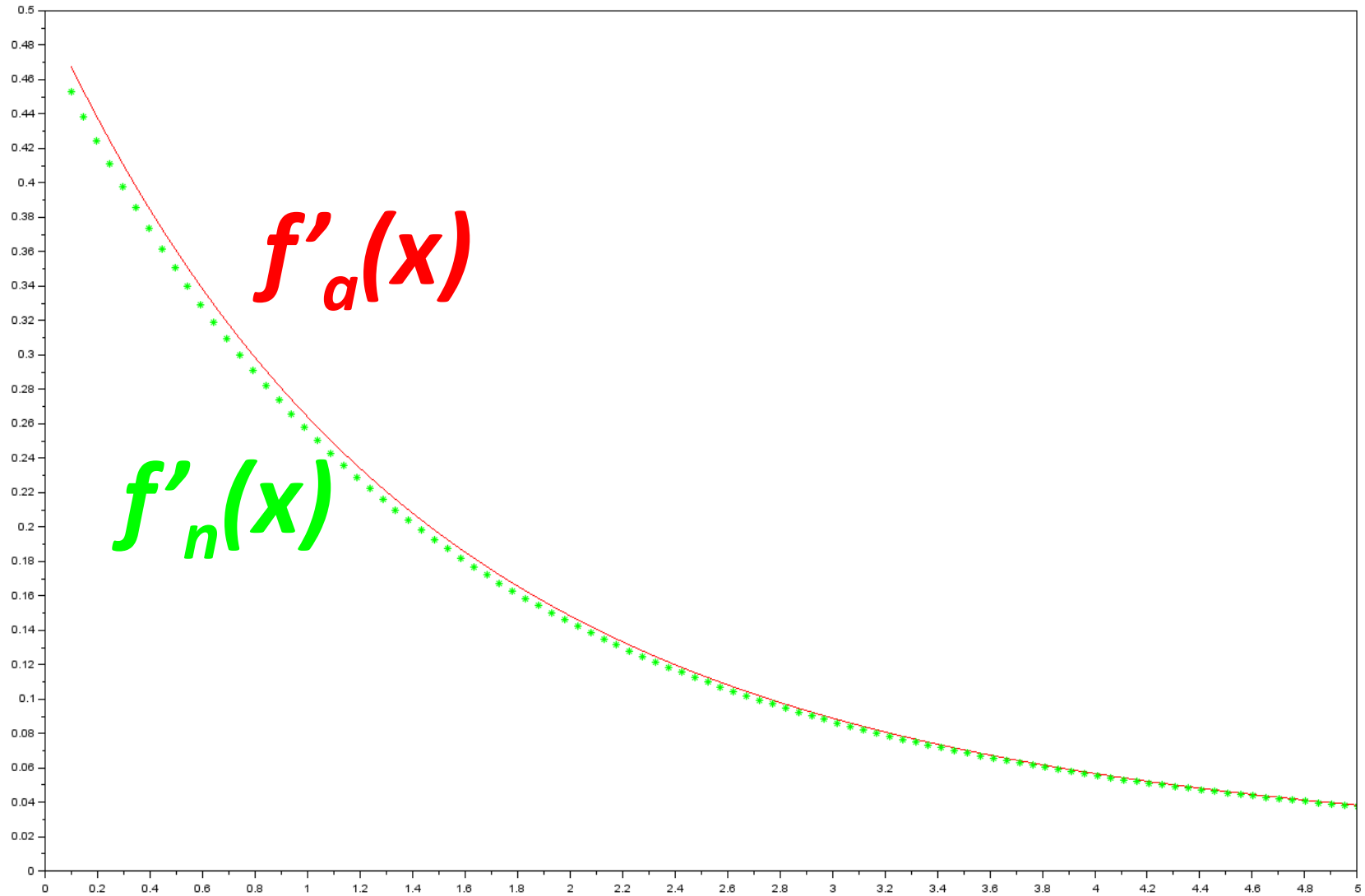
```
x=linspace(0.1,5,100);
```

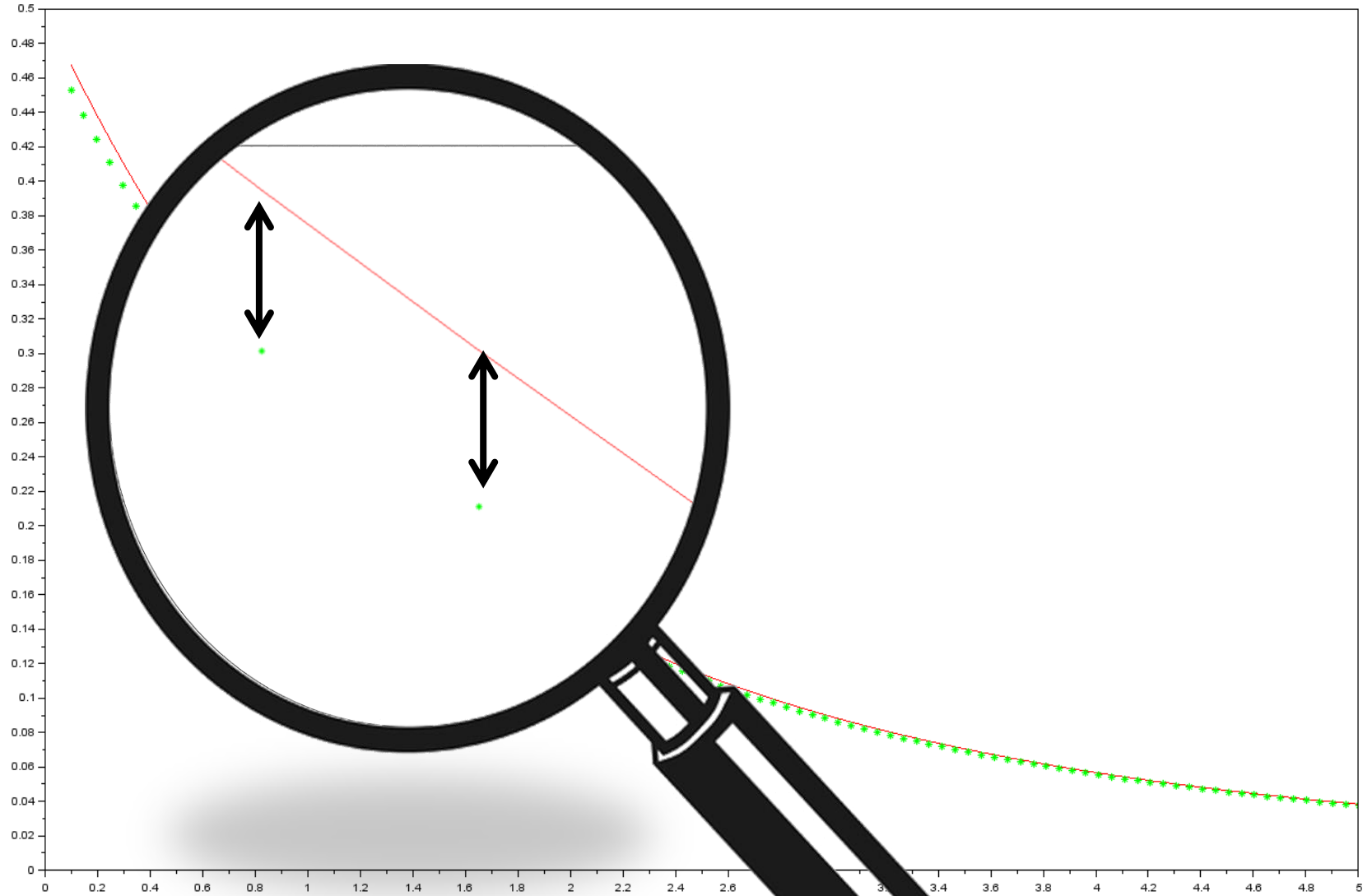
```
yp=derivada(x);
```

```
plot(x,yp,'r')
```

```
ypn = (funcion(x + 0.1) - funcion(x))./0.1;
```

```
plot(x,ypn,'g*')
```





¿Cómo podemos analizar el error que comete la estimación en el intervalo?

Ayuda: Si el intervalo tiene 100 elementos, se van a generar 100 errores . ¿Cómo podemos agruparlos para su análisis?



Para agruparlos realizamos el error promedio

```

x=linspace(0.1,5,100);
yp=derivada(x);
ypn = (funcion(x + 0.1) - funcion(x))./0.1;
er=sum(abs(ypn-yp))/100;
    
```

h

Finalmente, realizando el mismo calculo pero para distintos valores de h, tenemos:

h	error
1	3.57103E-02
0.1	4.32059E-03
0.01	4.41000E-04
0.001	4.41911E-05

¿El error va a disminuir hasta que la derivada numérica sea igual a la analítica?

¡No!, nosotros sabemos que el error no va a disminuir hasta volverse cero. Por lo tanto, debemos encontrar donde el error deja de disminuir y comienza a aumentar a pesar de decrecer el incremento.

¿Cómo podemos hacerlo?

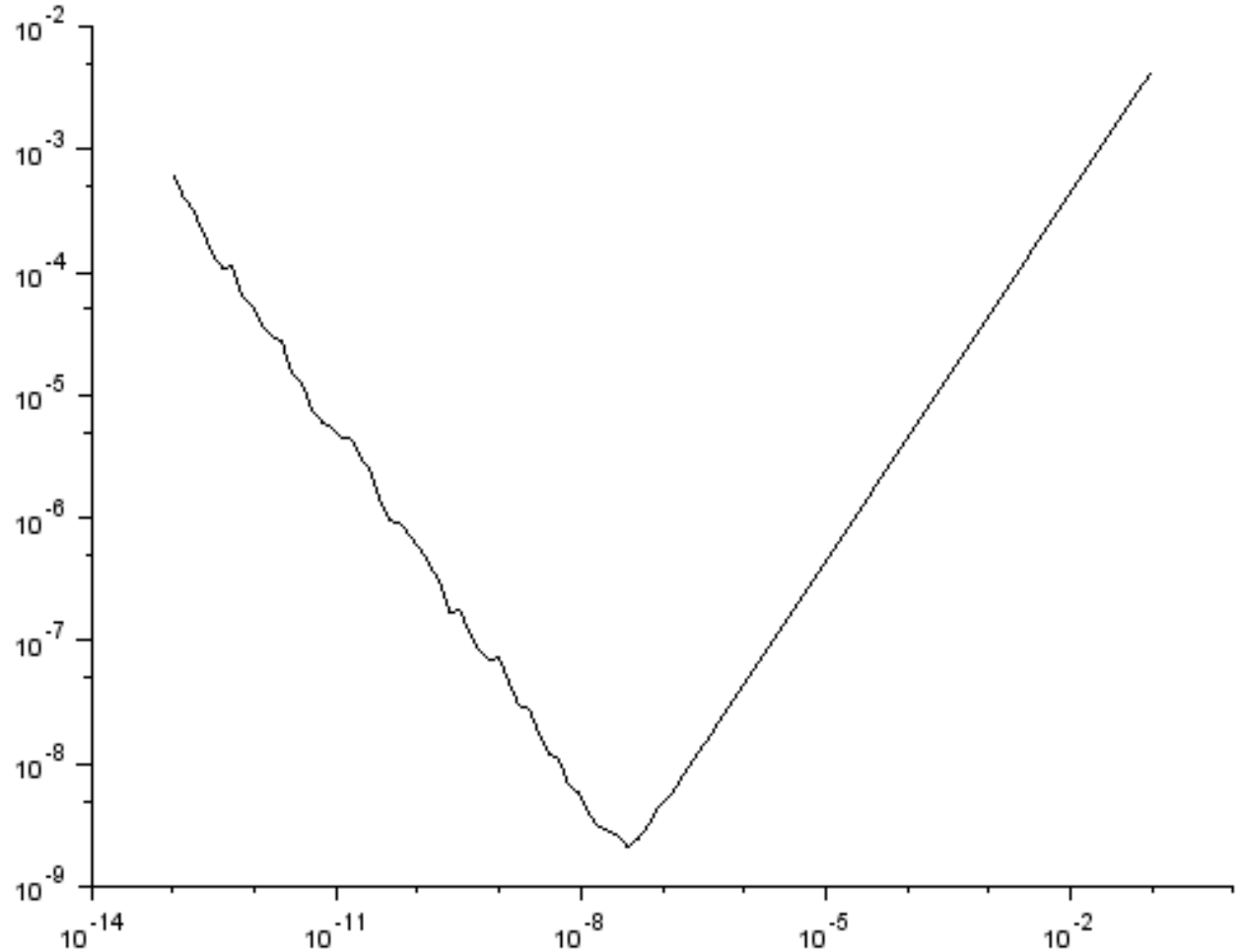
- Vamos a calcular el error cometido por distintos incrementos (h) que van desde 1×10^{-13} hasta 1×10^{-1}

```
x=linspace(0.1,5,100);  
yp=derivada(x);  
h=logspace(-13,-1,100);  
for i=1:100  
    ypn = (funcion(x + h(i))- funcion(x))./h(i);  
    er(i)= sum(abs(ypn-yp)) /length(x);  
end
```

```
plot2d("||",h,er)
```



Gráfica doble
logarítmica



¿Cómo encontramos el h optimo?

¿Qué error le corresponde al h optimo?

Al h optimo le corresponde el error mínimo. Por lo tanto debemos encontrar el error mínimo y ubicar que incremento lo generó.

```
[em p]=min(er);
```

```
hoptimo= h(p)
```

```
error_minimo = em
```

```
hoptimo = 3.76493580679D-08
```

```
error_minimo = 2.07780614048D-09
```

```
plot2d("||",h,er)
```

```
plot2d("||", hoptimo, error_minimo,-10)
```

