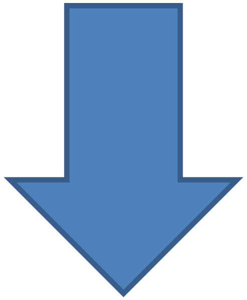
Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Aux. 2da: Sr. Alejandro Jesús Ladreyt
Aux. 2da: Sra. Amalia Rueda

Introducción

Volvemos un tiempo atrás:

¿Qué son los Sistemas de Ecuaciones Lineales?



¿Qué son los Sistemas de Ecuaciones No Lineales?

Introducción

Podemos decir que los sistemas de ecuaciones no-lineales son un conjunto de ecuaciones no-lineales que deben satisfacerse en simultaneo.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
&\vdots \\
&f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\
&\vdots\\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

$x_i \in R \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

$f_j : R^n \rightarrow R \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, m$

n-m: grados de libertad

Sin perdida de generalidad supondremos $m=n$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\
&\vdots\\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
}
$$

Se define la función vectorial $\underline{f}$ asociada al sistema de ecuaciones original y el vector de incógnitas $\underline{x}$:

$$\underline{f}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} f_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \\ f_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \end{bmatrix} \qquad \underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión compacta de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal corresponde a:

$$\underline{f}\left(\underline{x}\right)=\underline{0} \qquad \begin{array}{l} \underline{x}\in R^n \\ \underline{f}:R^n\to R^n \end{array}$$

Aproximaciones sucesivas (multivariable)

El valor de arranque o semilla corresponde a un vector: $\underline{x}^{(0)} = \underline{\alpha}^{(0)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(0)} \\ \alpha_2^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(0)} \end{bmatrix}$

La primera aproximación se obtiene a partir de la función vectorial $\underline{F}$ asociada al sistema original.

$$\underline{x}^{(1)} = \underline{F}\left(\underline{x}^{(0)}\right)$$

Finalmente se desarrolla el proceso iterativo hasta satisfacer la tolerancia o alcanzar el máximo de iteraciones:

$$\boxed{\underline{x}^{(k+1)} = \underline{F}\left(\underline{x}^{(k)}\right)}$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_{\max}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \left\| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} \right\| < \varepsilon \\ \frac{\left\| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} \right\|}{\left\| \underline{x}^{(k)} \right\|} < \varepsilon_r \end{gathered}}$$

Al tratarse de vectores el error corresponde a la norma de la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas

Ejemplo Aprox. Sucesivas

$$\begin{cases} x_2 + x_1^{\,2} - x_1 - 0.75 = 0 \\ x_2 + 5x_2x_1 - x_1^{\,2} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{f}\left(\underline{x}\right) = \begin{bmatrix} x_2 + x_1^{\,2} - x_1 - 0.75 \\ x_2 + 5x_2x_1 - x_1^{\,2} \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{f}\left(\underline{x}\right) = \underline{0}$$

Sistema equivalente:

$$\underline{F}\left(\underline{x}\right) = \begin{bmatrix} x_2 + x_1^{\,2} - 0.75 \\ -5x_2x_1 + x_1^{\,2} \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \underline{F}\left(\underline{x}\right)$$

Ejemplo Aprox. Sucesivas

$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 + x_1^{\,2} - 0.75 \\ -5x_2x_1 + x_1^{\,2} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{x}^{(0)}\right)} \underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.2500000 \\ -4.0000000 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{x}^{(1)}\right)} \underline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3.1875000 \\ 26.5625000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e} = \left\| \underline{x}^{(2)} - \underline{x}^{(1)} \right\| = 30.8829696$$

El error de la iteración 5 corresponde a:

$$\left\| \underline{e} \right\| = 9.6510395 \times 10^{15}$$

¡El sistema no converge!

Ejemplo Aprox. Sucesivas

$$\underline{f}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} x_2+x_1^{\,2}-x_1-0.75 \\ x_2+5x_2x_1-x_1^{\,2} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{F}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} \sqrt{-x_2+x_1+0.75} \\ \left(-x_2+x_1^{\,2}\right)/\left(5x_1\right) \end{bmatrix}$$

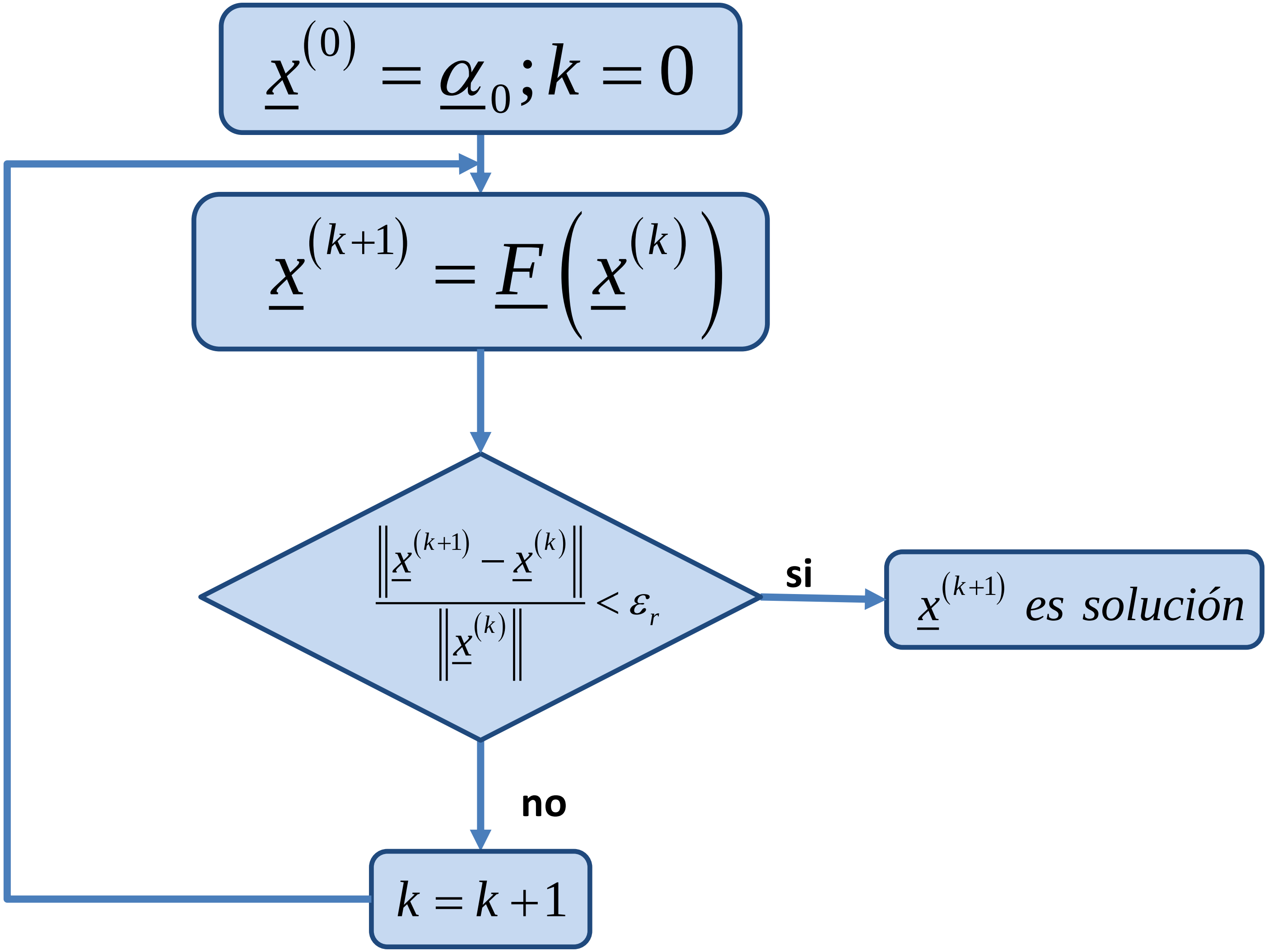
$$\underline{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{x}^{(0)}\right)} \underline{x}^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.8660254 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{x}^{(1)}\right)} \underline{x}^{(2)}=\begin{bmatrix} 1.2712299 \\ 0.1732051 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(9)}=\begin{bmatrix} 1.3720650 \\ 0.2395017 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \underline{e}=\left\|\underline{x}^{(9)}-\underline{x}^{(8)}\right\|=6.0051938\times 10^{-7}$$

$$F\left(\underline{x}^{(9)}\right)=F\left(\begin{bmatrix} 1.3720650 \\ 0.2395017 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1.3720653 \\ 0.2395019 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\underline{x}^{(9)}\right)=\begin{bmatrix} -8.4719027\times 10^{-7} \\ -1.0625308\times 10^{-6} \end{bmatrix} \qquad \underline{x}^{*}=\begin{bmatrix} 1.3720650 \\ 0.2395017 \end{bmatrix}$$

Aproximaciones Sucesivas



Método de Wegstein (multivariable)

Corresponde a una extensión de lo presentado para una variable.

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{\alpha}_0$$

$$\underline{x}^{(1)} = \underline{F}\left(\underline{x}^{(0)}\right)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_n \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = \frac{F_i\left(\underline{x}^{(k)}\right) - F_i\left(\underline{x}^{(k-1)}\right)}{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}} \qquad i = 1 \; a \; n$$

$$q_i = \frac{\omega_i}{\omega_i - 1} \quad i = 1 \; a \; n \quad \rightarrow Q_{ii} = q_i \quad i = 1 \; a \; n$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{x}^{(k)} + \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}\right)\underline{F}\left(\underline{x}^{(k)}\right)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, k_{\max}$$

$$\frac{\left\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\right\|}{\left\|\underline{x}^{(k)}\right\|} < \varepsilon_r$$

$$\left\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{F}\left(\underline{x}^{(k+1)}\right)\right\| < \varepsilon$$

Implementación en el ejemplo

$$\underline{F}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} x_2+x_1^{\ 2}-0.75 \\ -5x_2x_1+x_1^{\ 2} \end{bmatrix} \qquad \underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\overline{x}}^{(0)}=\underline{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{\overline{x}}^{(0)}\right)} \underline{x}^{(1)}=\underline{\overline{x}}^{(1)}=\begin{bmatrix} 1.2500000 \\ -4.0000000 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{\overline{x}}^{(1)}\right)} \underline{x}^{(2)}=\underline{\overline{x}}^{(2)}=\begin{bmatrix} -3.1875000 \\ 26.5625000 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{F}\left(\underline{\overline{x}}^{(2)}\right)} \underline{x}^{(3)}=\begin{bmatrix} 35.9726562 \\ 433.5000000 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i=\frac{F_i\left(\underline{\overline{x}}^{(2)}\right)-F_i\left(\underline{\overline{x}}^{(1)}\right)}{\overline{x}_i^{(2)}-\overline{x}_i^{(1)}} \qquad i=1\ a\ 2 \qquad \rightarrow \underline{\omega}=\begin{bmatrix} -8.8248239 \\ 13.3149284 \end{bmatrix}$$

Implementación en el ejemplo

$$q_i = \frac{\omega_i}{\omega_i - 1} \quad i = 1\ a\ 2 \quad \rightarrow \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 0.9220646 & 0 \\ 0 & 0.8744742 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}^{(3)} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\overline{x}}^{(2)} + \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}\right)\underline{x}^{(3)}$$

$$\underline{\overline{x}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.9220646 & 0 \\ 0 & 0.8744742 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3.1875000 \\ 26.5625000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1017830 & 0 \\ 0 & -0.0812022 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35.9726562 \\ 433.5000000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\overline{x}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.7983380 \\ -6.4817440 \end{bmatrix} \rightarrow error = \left\| \underline{\overline{x}}^{(3)} - \underline{\overline{x}}^{(2)} \right\| = 30.8829696$$

$$\underline{\overline{x}}^{(42)} = \begin{bmatrix} 1.3720644 \\ 0.2395041 \end{bmatrix} \rightarrow error = 5.46739 \times 10^{-7}$$

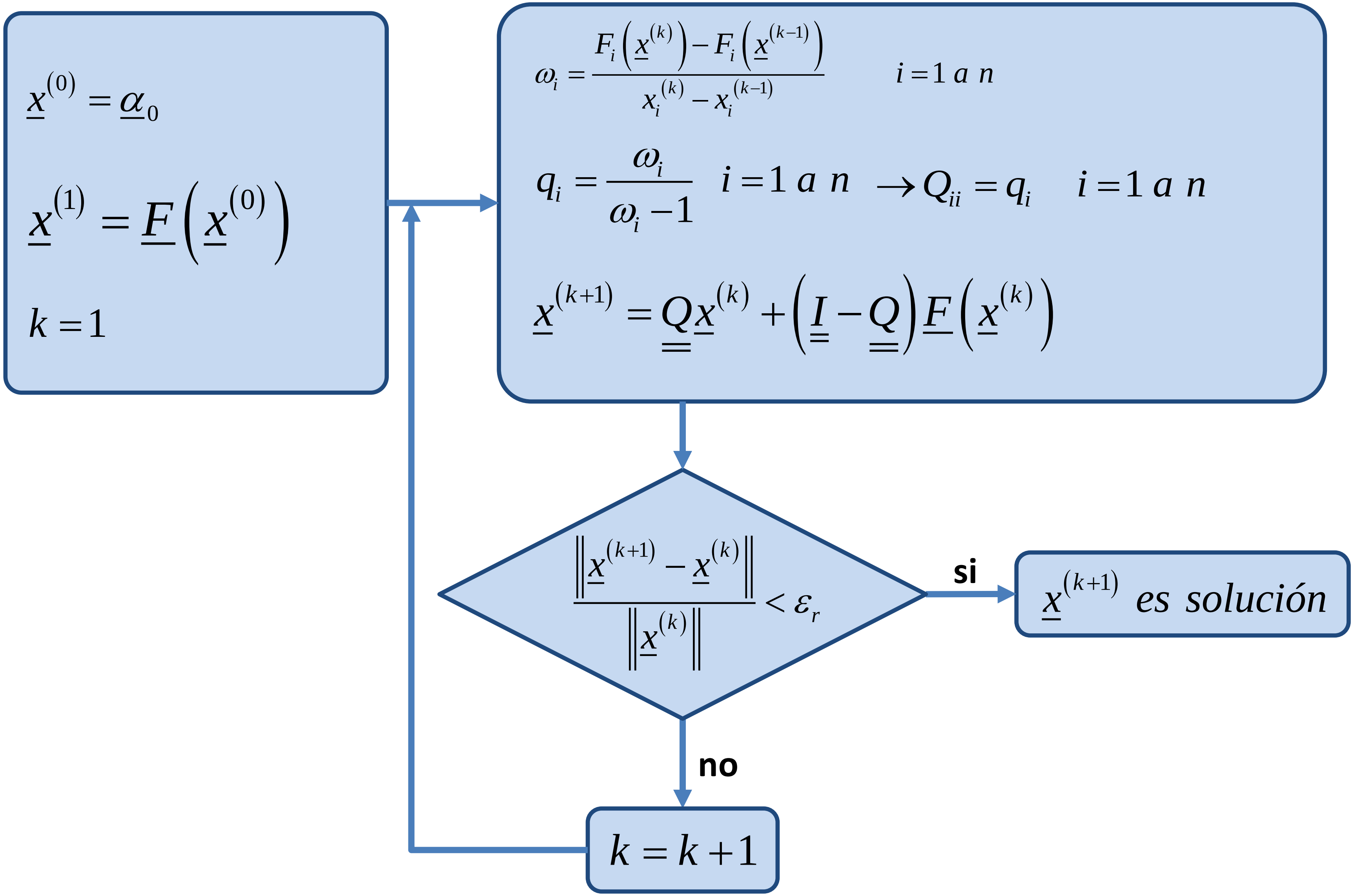
Implementación en el ejemplo

$$F\left(\underline{\overline{x}}^{(42)}\right)=F\left(\begin{bmatrix}1.3720644\\0.2395041\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1.3720648\\0.2394852\end{bmatrix}$$

$$f\left(\underline{\overline{x}}^{(42)}\right)=f\left(\begin{bmatrix}1.3720644\\0.2395041\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3.9569449\times10^{-7}\\1.8947044\times10^{-5}\end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{*}=\begin{bmatrix}1.3720644\\0.2395041\end{bmatrix}$$

Método de Wegstein



Método de Newton-Rhapson (multivariable)

La formula recursiva de N-R multivariable corresponde a:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \boxed{\underline{\underline{J}}^{-1}\left(\underline{x}^{(k)}\right)}\,\underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right)$$

Inversa de la matriz J evaluada en el punto

$$k = 1, 2, \ldots, k_{\max}$$

$$\frac{\left\| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} \right\|}{\left\| \underline{x}^{(k)} \right\|} < \varepsilon_r$$

$$\left\| \underline{f}\left(\underline{x}^{(k+1)}\right) \right\| < \varepsilon$$

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana de la función $\underline{f}$

$$\underline{x} \in R^n$$

$$\underline{f} : R^n \to R^n$$

$$\underline{\underline{J}} : R^n \to R^{n \times n}$$

Implementación en el ejemplo

$$\underline{f}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} x_2+{x_1}^2-x_1-0.75 \\ x_2+5x_2x_1-{x_1}^2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{J}}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} 2x_1-1 & 1 \\ 5x_2-2x_1 & 1+5x_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -1/3 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.25 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.1666667 \\ -0.4166667 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(2)}=\begin{bmatrix} 2.1666667 \\ -0.4166667 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.2580254 & -0.0218050 \\ 0.1399152 & 0.0726832 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.3611111 \\ -9.6250000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.6055926 \\ 0.0924692 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}=\underline{x}^{(2)}-\underline{x}^{(1)}=\begin{bmatrix} 1.6055926 \\ 0.0924692 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2.1666667 \\ -0.4166667 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5610741 \\ 0.5091359 \end{bmatrix}\rightarrow\left\|\underline{e}\right\|=0.7576434$$

Implementación en el ejemplo

$$\underline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.4037040 \\ 0.224078 \end{bmatrix} \rightarrow \|\underline{e}\| = 0.2409977$$

$$\underline{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.3727742 \\ 0.2392220 \end{bmatrix} \rightarrow \|\underline{e}\| = 0.0344382$$

$$\underline{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.3720658 \\ 0.2395018 \end{bmatrix} \rightarrow \|\underline{e}\| = 7.6168800 \times 10^{-4}$$

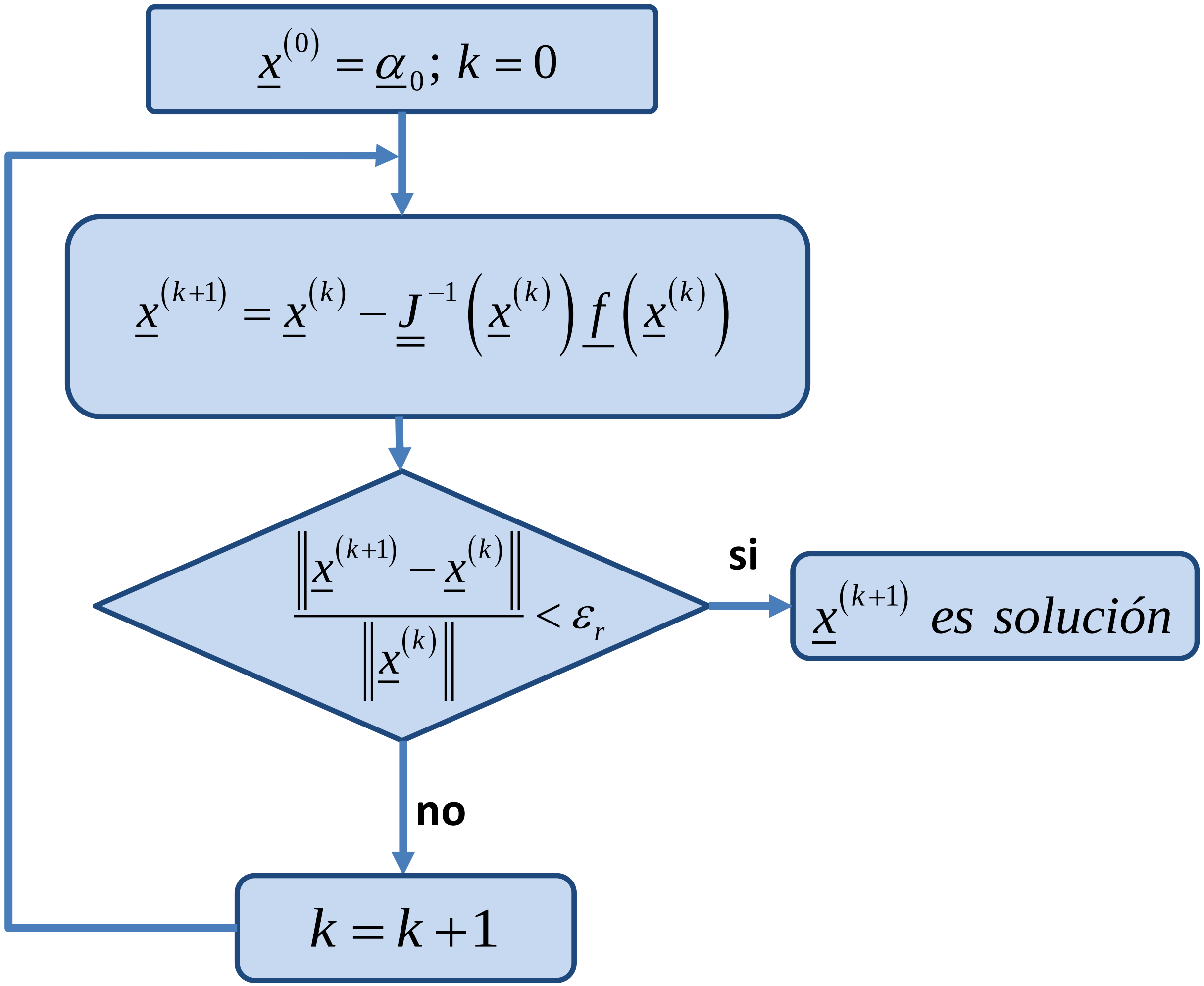
$$\underline{x}^{*} = \begin{bmatrix} 1.3720654 \\ 0.2395019 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar que es solución del sistema.

El error es del orden de 10^{-7}

$$\underline{f}\left(\underline{x}^{*}\right) = \begin{bmatrix} 0.1267875 \times 10^{-12} \\ -0.3406164 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

Método de Newton



Método de Newton modificado (I)

Requerimos que:

1) El algoritmo progrese hacia la solución en cada paso:

$$\left\|\underline{f}\left(\underline{x}^{(k+1)}\right)\right\| < \left\|\underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right)\right\|$$

2) Los pasos no sean demasiado grandes:

$$\left\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\right\| < \delta$$

donde δ es elegido por el algoritmo.

Método de Newton Modificado (II)

Supongamos que tenemos:

Corrección

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \underline{p}$$

A partir del Método de Newton esperamos que:

$$\underline{p} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\left(\underline{x}^{(k)}\right)\underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right)$$

pero puede que no satisfaga:

$$\left\|\underline{p}\right\| < \delta$$

Además, si ***J*** es singular, ***p*** no existe.

Método de Newton Modificado (III)

En lugar de evaluar la corrección por el Método de Newton, resolvemos un problema de optimización restringida:

$$\underset{\underline{p}}{mín}\ z = \left\| \underline{\underline{J}}\left(\underline{x}^{(k)}\right).\underline{p} + \underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right) \right\|$$

sujeto a la restricción:

$$\left\| \underline{p} \right\| < \delta$$

Esto funciona aún para ***J*** singular!!!!

$$\underline{p} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\left(\underline{x}^{(k)}\right)\underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right)$$

Método de Newton Modificado (IV)

Si dispusiésemos de un ***solver*** que nos permita resolver el problema de optimización, entonces procederíamos de la siguiente manera:

1) Si, $\left\| \underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right) \right\| < \varepsilon$ entonces parar.
2) Calcular ***p*** vía optimización restringida.
3) Si:

$$\left\| \underline{f}\left(\underline{x}^{(k)} + \underline{p}\right) \right\| < \left\| \underline{f}\left(\underline{x}^{(k)}\right) \right\|$$

aceptar ***p*** e ir a la Etapa (1). Aquí podríamos pensar en aumentar **δ**.

4) Si no, reducir **δ** y volver a la Etapa (2)

Este algoritmo permite determinar la solución de manera confiable. El problema es que pueda quedar atrapado en un mínimo local de la función.

La clave: Arrancar cerca de la solución!!!

Implementación en el ejemplo

$$\underline{f}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} x_2+x_1^{\ 2}-x_1-0.75 \\ x_2+5x_2x_1-x_1^{\ 2} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{J}}\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} 2x_1-1 & 1 \\ 5x_2-2x_1 & 1+5x_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \delta = 1$$

$$\underset{\underline{p}}{mín}\ \ z=\left\| \underline{\underline{J}}\left(\underline{x}^{(0)}\right).\underline{p}+\underline{f}\left(\underline{x}^{(0)}\right)\right\|$$

$s.t.$

$$\left\|\underline{p}\right\|<\delta$$

$$\underset{\underline{p}}{mín}\ \ z=\left\|\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.25\\5\end{bmatrix}\right\|$$

$s.t.$

$$\left\|\underline{p}\right\|<1$$

Implementación en el ejemplo

$$\min_{\underline{p}} \; z = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|$$

$$s.a.$$

$$\left\| \underline{p} \right\| < 1$$

$$\min_{\underline{p}} \; z = \sqrt{\left| p_1 + p_2 + 0.25 \right|^2 + \left| 3p_1 + 6p_2 + 5 \right|^2}$$

$$s.a.$$

$$\sqrt{\left| p_1 \right|^2 + \left| p_2 \right|^2} < 1$$

Implementación en el ejemplo

$$\underset{\underline{p}}{mín}\ z = \sqrt{\left|p_1 + p_2 + 0.25\right|^2 + \left|3p_1 + 6p_2 + 5\right|^2}$$

$$s.a.$$

$$\sqrt{\left|p_1\right|^2 + \left|p_2\right|^2} < 1$$

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} 0.287116495751276 \\ -0.957895671703289 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.287116495751276 \\ -0.957895671703289 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.287116495751276 \\ 0.042104328296711 \end{bmatrix}$$

Implementación en el ejemplo

$$\left\| \underline{f}\left(\underline{x}^{(0)} + \underline{p}\right) \right\| < \left\| \underline{f}\left(\underline{x}^{(0)}\right) \right\|$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -0.338343293819521 \\ -1.343598667872214 \end{bmatrix} \right\| < \left\| \begin{bmatrix} 0.25 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\boxed{1.385544501191005 < 5.006246098625197}$$