# Derivadas Numéricas

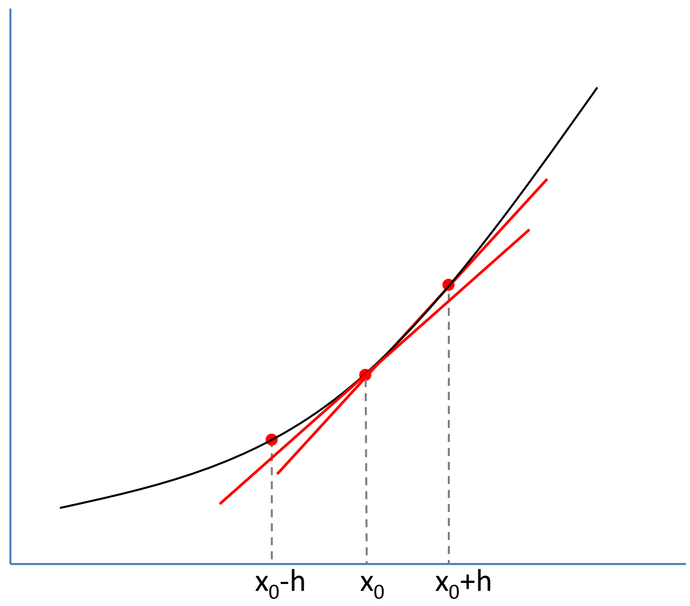
Prof.: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz

J.T.P.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

Aux. 2da: Sr. Alejandro Jesús Ladreyt

Aux. 2da: Sra. Amalia Rueda

# Derivada Analítica

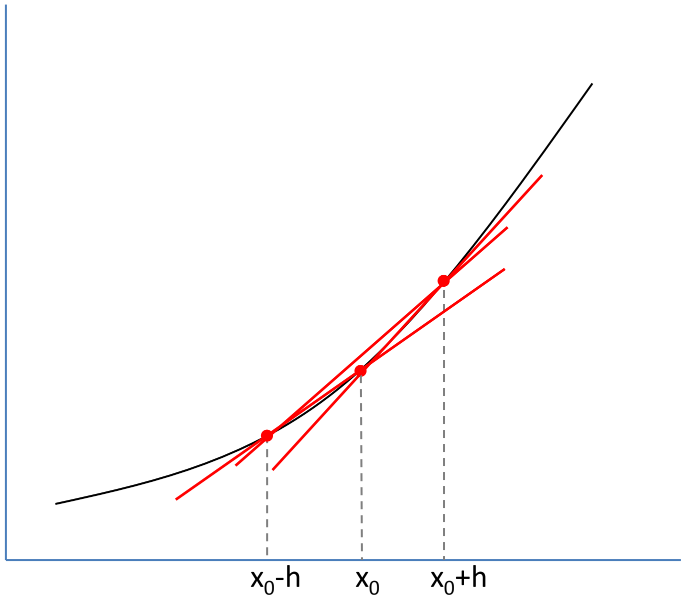



$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

# Cociente Incremental






$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ Adelante

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$ Atrás

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$ Central

Aplicando el limite a cualquiera de ellos obtenemos la derivada analítica

# Interrogantes

- ¿Cuan pequeño debe ser h?

- Si h tiende a cero ¿Por qué no utilizar el épsilon de la maquina como incremento?

- ¿Es conveniente que sea lo mas chico posible?

# Serie de Taylor



$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

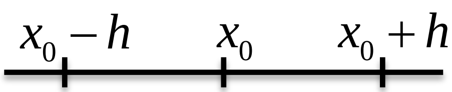
$$\ldots+\frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{''''}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\ldots$$

A partir de la serie de Taylor en torno a $x_0$ podemos conocer el valor de la función en la inmediaciones de $x_0$

## Podemos estimar el valor de la función en $x_0$+h

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \ldots$$




$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0 + h - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0 + h - x_0)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(x_0 + h - x_0)^4 + \ldots$$

# Derivada hacia delante



$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}) + \frac{f''(x_0)}{2!}(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})^4 + \ldots$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}h^4 + \ldots$$

$$f'(x_0)h = f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 - \frac{f''''(x_0)}{4!}h^4 - \ldots$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f''(x_0)}{2!}h - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f''''(x_0)}{4!}h^3 - \ldots$$

# Derivada hacia delante



$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \boxed{- \frac{f''(x_0)}{2!}h - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f''''(x_0)}{4!}h^3 - \ldots}$$

¿?

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

# Derivada hacia delante



$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \cancel{\frac{f''(x_0)}{2!}h - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f''''(x_0)}{4!}h^3} - \ldots$$

*¿Porque truncamos la serie?*

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

**El objetivo es encontrar una expresión de la derivada utilizando solamente valores de la función**

# Derivada hacia delante

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f''(x_0)}{2!}h-\cancel{\frac{f'''(x_0)}{3!}h^2-\frac{f''''(x_0)}{4!}h^3}-\dots$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+E(h)$$

$$E(h)\cong\left|\frac{f''(x_0)}{2!}h\right|$$

# Derivada hacia delante (ejemplo)

- Calcular *f'(2)* utilizando h=0.01

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(2) \approx \frac{\ln(2.01) - \ln(2)}{0.01}$$

$$f'(2) \approx 0.498754\ldots$$

# Derivada Central



Evaluamos la serie en $x_0$+h y en $x_0$-h, luego restamos ambas expansiones

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x_0+h-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x_0+h-x_0)^3 + \frac{f^{''''}(x_0)}{4!}(x_0+h-x_0)^4 + \ldots$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x_0-h-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x_0-h-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x_0-h-x_0)^3 + \frac{f^{''''}(x_0)}{4!}(x_0-h-x_0)^4 + \ldots$$

# Derivada Central

Evaluamos la serie en $x_0$+h y en $x_0$-h, luego restamos ambas expansiones

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}h^4 + \ldots$$

$$-$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}h^4 - \ldots$$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = f'(x_0)2h + \frac{f'''(x_0)}{3!}2h^3 + \frac{f'''''(x_0)}{5!}2h^5 \ldots$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \boxed{\frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 - \frac{f'''''(x_0)}{5!}h^4 \ldots}$$

Error de truncamiento

# Derivada Central

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}h^2 - \cancel{\frac{f^{'''''}(x_0)}{5!}h^4}\ldots$$

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + E(h^2)$$

$$E\left(h^2\right) \cong \left|\frac{f^{'''}(x_0)}{3!}h^2\right|$$

# Derivada Numérica



$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

# Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{x}$$

- Calcular *f'(2)* utilizando h=0.01
- Comparar con el valor exacto
- Comparar el error cometido con el de truncamiento esperado

# Derivada Numérica

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$E(h) \cong \left| \frac{f''(x_0)}{2!} h \right|$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$E(h^2) \cong \left| \frac{f'''(x_0)}{3!} h^2 \right|$$

# Error de redondeo

Los ordenadores cortan los números entre la 12º y 17º cifra decimal introduciendo así un error de redondeo.

Por ejemplo:

$x_1 = 2.512300$ (valor exacto con 6 cifras decimales)

$x_1/8 = 0.314038$ (operación con redondeo de 6 cifras decimales)

$x_1/8 = 0.3140375$ (valor exacto de la operación)

$Error_1 = \mathbf{5x10^{-7}} * 100/0.3140375 = \mathbf{1.59x10^{-4}\ \%}$

$x_2 = 0.002300$ (valor exacto con 6 cifras decimales)

$x_2/8 = 0.000288$ (operación con redondeo de 6 cifras decimales)

$x_2/8 = 0.0002875$ (valor exacto de la operación)

$Error_2 = \mathbf{5x10^{-7}} * 100/\ 0.0002875 = \mathbf{1.74x10^{-1}\ \%}$

$x_3 = 0.000300$ (valor exacto con 6 cifras decimales)

$x_3/8 = 0.000038$ (operación con redondeo de 6 cifras decimales)

$x_3/8 = 0.0000375$ (valor exacto de la operación)

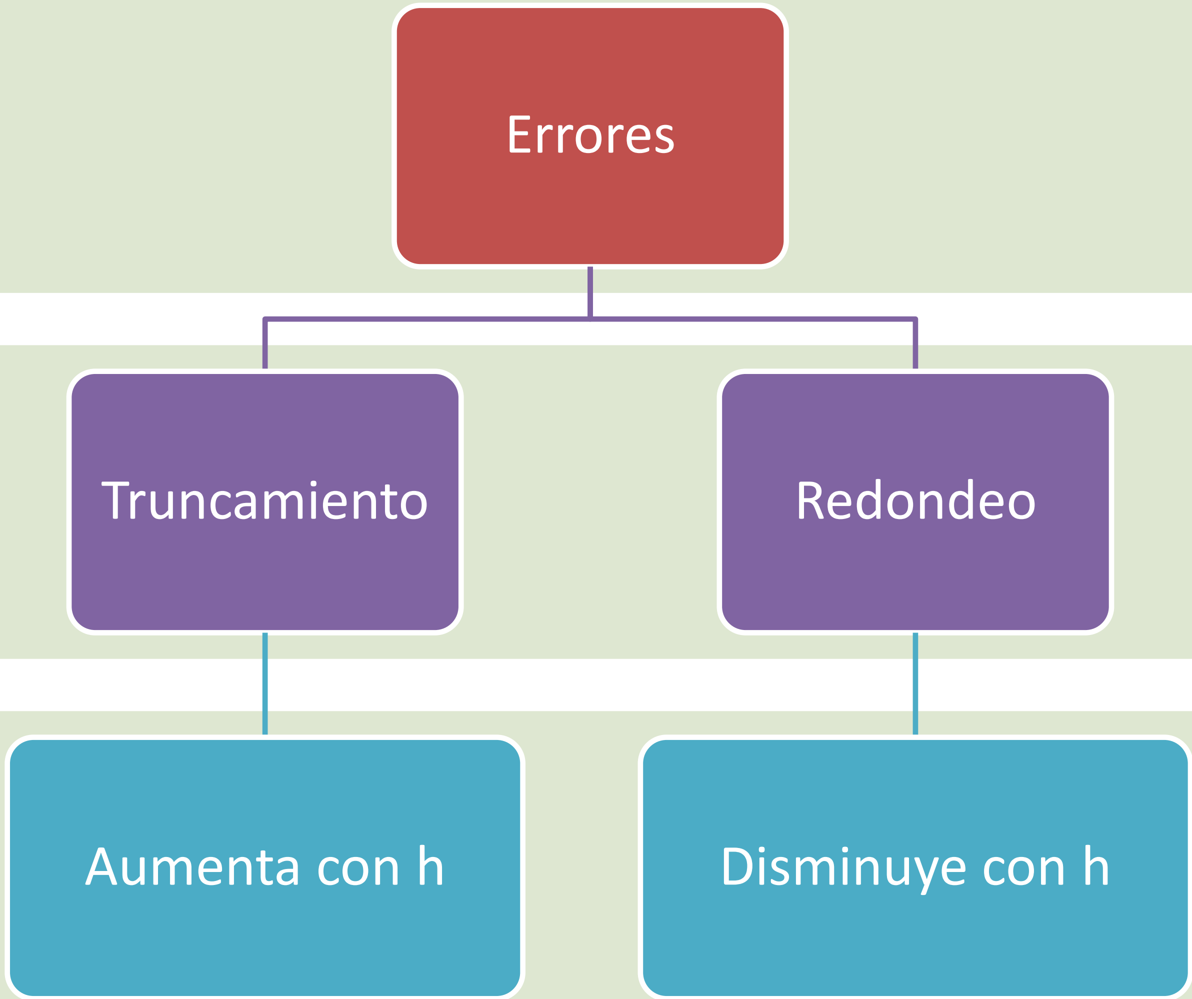
$Error_3 = \mathbf{5x10^{-7}} * 100/\ 0.0000375 = \mathbf{1.33\ \%}$

# Error Total

Al utilizar derivadas numéricas se introduce un error con respecto al valor exacto (analítico)

Existen dos tipos de errores y el error total es la suma de ambos

Cada uno tiene distinta relación con h

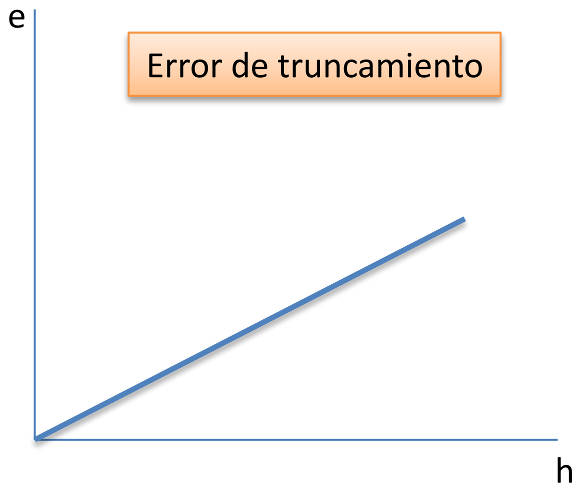


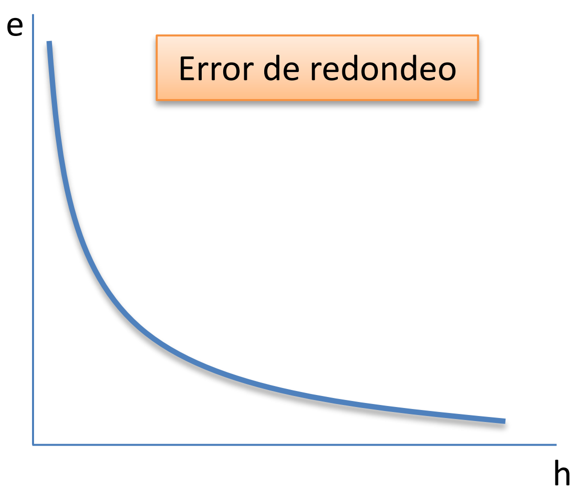
# Error Total

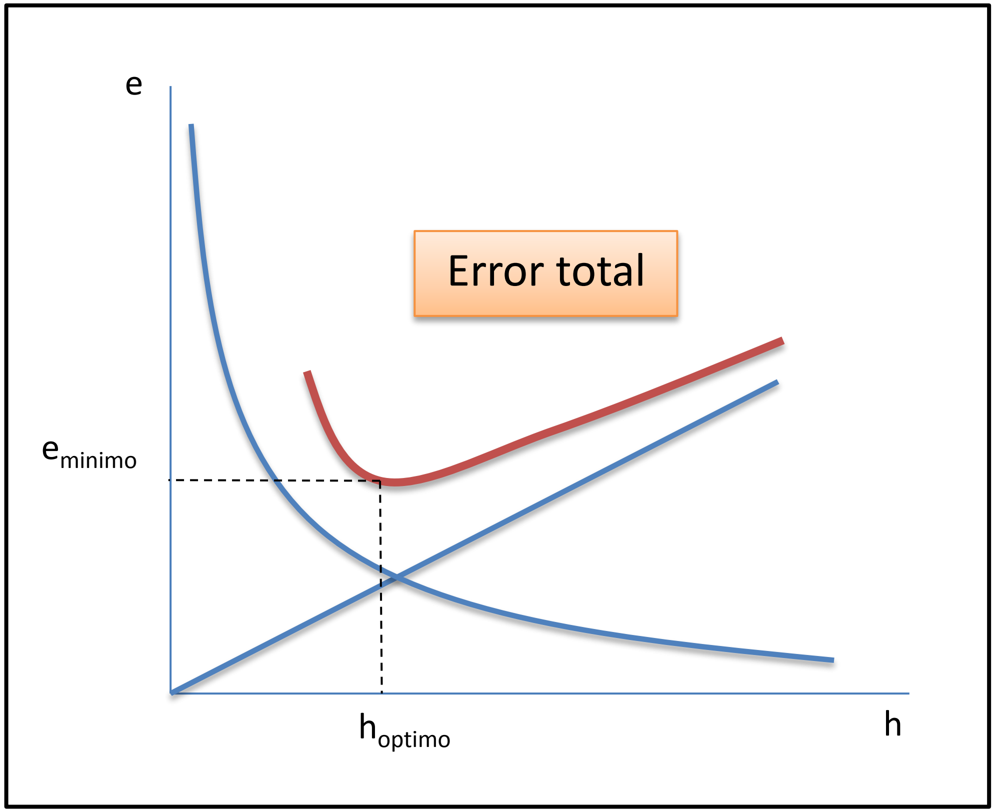
Error Total = Error de Truncamiento + Error de redondeo

Como el primer sumando aumenta con h mientras que el segundo disminuye, debe existir un valor optimo del incremento que minimice el error cometido

# Error Total


e
Error de truncamiento
h


e
Error de redondeo
h


e
Error total
$e_{minimo}$
$h_{optimo}$
h

# Interrogantes

- ¿Cuan pequeño debe ser h?

- Si h tiende a cero ¿Por qué no utilizar el épsilon de la maquina como incremento?

- ¿Es conveniente que sea lo mas chico posible?