

Regresión Lineal: Análisis de la ecuación de convección forzada por el teorema π

Fuente: Procesos de Transferencia de calor – Donald Q. kern

Prof.: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz

J.T.P.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

Aux. 2^{da}: Sr. Alejandro Jesús Ladreyt

Aux. 2^{da}: Sra. Amalia Rueda

El análisis dimensional es una herramienta que permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno en el que estén involucradas muchas magnitudes físicas en forma de variables independientes.

Su resultado fundamental, el teorema de Vaschy-Buckingham (más conocido por teorema π), permite cambiar el conjunto original de parámetros de entrada dimensionales por otro conjunto de parámetros de entrada adimensionales más reducido.

Ventajas:

- ✓ Analizar con mayor facilidad el sistema objeto de estudio
- ✓ Reducir drásticamente el número de ensayos que debe realizarse para averiguar el comportamiento o respuesta del sistema.

La **razón de transferencia de calor (h_i)** por convección forzada a un fluido incompresible que viaja en flujo turbulento por una tubería de diámetro uniforme a flujo de masa constante, se ha encontrado que es influenciada por la **velocidad (u)**, **densidad (ρ)**, **calor específico (c)**, **conductividad térmica (k)**, **viscosidad (μ)**, así como por el **diámetro interno de la tubería (D)**.



El número de grupos adimensionales es igual a la diferencia entre el número de variables y el número de dimensiones usadas para expresarlas.

Numero de Variables

coeficiente de transferencia de calor (h_i)
velocidad (u)
densidad (ρ)
calor especifico (c)
conductividad térmica (k)
viscosidad (μ)
diámetro interno de la tubería (D)

Dimensiones

M (masa)
L (longitud)
 θ (tiempo)
T (temperatura)

$$\pi = 7 - 4 = 3$$

$$\pi = \phi' \left(h_i^a u^b \rho^d c^e D^f k^g \mu^m \right) = 1$$



$$\pi = \alpha \left(\frac{E}{\theta L^2 T} \right)^a \left(\frac{L}{\theta} \right)^b \left(\frac{M}{L^3} \right)^d \left(\frac{E}{MT} \right)^e (L)^f \left(\frac{E}{\theta L T} \right)^g \left(\frac{M}{L \theta} \right)^m$$

Los exponentes deben lograr que la expresión sea adimensional

$$E = \text{energía} = M \frac{L^2}{\theta^2}$$

$$\pi = \alpha \left(\frac{M \frac{L^2}{\theta^2}}{\theta L^2 T} \right)^a \left(\frac{L}{\theta} \right)^b \left(\frac{M}{L^3} \right)^d \left(\frac{M \frac{L^2}{\theta^2}}{MT} \right)^e (L)^f \left(\frac{M \frac{L^2}{\theta^2}}{\theta L T} \right)^g \left(\frac{M}{L \theta} \right)^m$$

$$\sum M = a + d + g + m = 0$$

4 ec.
7 incog.

$$\sum \theta = -3a - b - 2e - 3g - m = 0$$

$$\sum L = b - 3d + 2e + f + g - m = 0$$

$$\sum T = -a - e - g = 0$$

Suponemos $a=1$, $b=0$ y $e=0$. Los demás exponentes salen de resolver el sistema de ecuaciones correspondiente, que permite que π sea adimensional.

$$\pi_1 = \alpha \left(\frac{E}{\theta L^2 T} \right)^1 \left(\frac{L}{\theta} \right)^0 \left(\frac{M}{L^3} \right)^0 \left(\frac{E}{MT} \right)^0 (L)^1 \left(\frac{E}{\theta L T} \right)^{-1} \left(\frac{M}{L \theta} \right)^0$$

$$\pi_1 = \alpha \left(\frac{E}{\theta L^2 T} \right) (L) \left(\frac{\theta L T}{E} \right)$$

$$\pi_1 = \phi' \left(\frac{h_i D}{k} \right)$$

Suponemos $f=1$, $a=0$ y $e=0$. Los demás exponentes salen de resolver el sistema de ecuaciones correspondiente, que permite que π sea adimensional.

$$\pi_2 = \alpha \left(\frac{E}{\theta L^2 T} \right)^0 \left(\frac{L}{\theta} \right)^1 \left(\frac{M}{L^3} \right)^1 \left(\frac{E}{MT} \right)^0 (L)^1 \left(\frac{E}{\theta L T} \right)^0 \left(\frac{M}{L \theta} \right)^{-1}$$

$$\pi_2 = \alpha \left(\frac{L}{\theta} \right) \left(\frac{M}{L^3} \right) (L) \left(\frac{L \theta}{M} \right)$$

$$\pi_2 = \phi' \left(\frac{Du\rho}{\mu} \right)$$

Suponemos $a=0$, $e=1$ y $f=0$. Los demás exponentes salen de resolver el sistema de ecuaciones correspondiente, que permite que π sea adimensional.

$$\pi_3 = \alpha \left(\frac{E}{\theta L^2 T} \right)^0 \left(\frac{L}{\theta} \right)^0 \left(\frac{M}{L^3} \right)^0 \left(\frac{E}{MT} \right)^1 (L)^0 \left(\frac{E}{\theta LT} \right)^{-1} \left(\frac{M}{L\theta} \right)^1$$

$$\pi_3 = \alpha \left(\frac{E}{MT} \right) \left(\frac{\theta LT}{E} \right) \left(\frac{M}{L\theta} \right)$$

$$\pi_3 = \phi' \left(\frac{c\mu}{k} \right)$$

La expresión final es:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

$$\phi\left(\frac{h_i D}{k}, \frac{Du\rho}{\mu}, \frac{c\mu}{k}\right) = 0$$

$$\frac{h_i D}{k} = \phi_1\left(\frac{Du\rho}{\mu}\right) \phi_2\left(\frac{c\mu}{k}\right)$$

$$\frac{h_i D}{k} = \alpha \left(\frac{Du\rho}{\mu}\right)^p \left(\frac{c\mu}{k}\right)^q$$

Las constantes de proporcionalidad y los exponentes deben evaluarse de datos experimentales.

Supóngase que se dispone de un aparato experimental de diámetro y longitud conocidos y a través del cual se podría circular líquido a varios gastos medibles. Supóngase, además, que se equipó con aditamentos especiales para permitir la medición de las temperaturas del líquido a la entrada y a la salida, así como la temperatura de la pared del tubo.

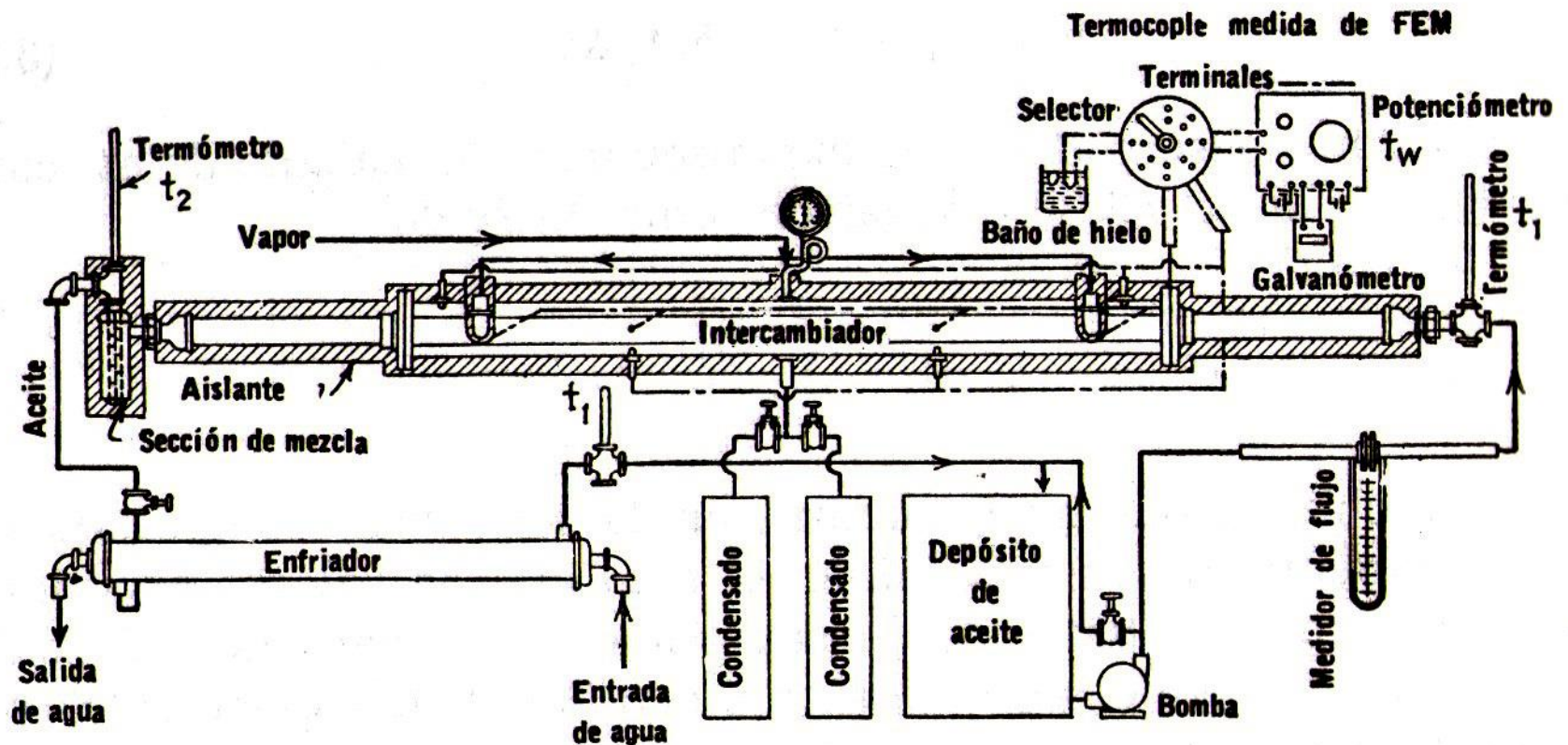


TABLA 3.3. DATOS DE MORRIS Y WHITMAN. CORRIDAS DE CALENTAMIENTO DE GASOLEO DE 36.8° API CON VAPOR

(1) Corrida No.	(2) w	(3) t_1	(4) t_2	(5) t_w	(6) Q	(7) Δt_i	(8) h_i	(9) $\frac{h_i D}{k}$	(10) G	(11) $\frac{DG}{\mu}$	(12) $\frac{c\mu}{k}$	(13) $j_H = \frac{Nu}{Pr}$	(14) $j_H = \frac{Nu}{Pr^{1/3}}$
B1	722	77.1	106.9	210.1	10,150	115.7	53.6	35.5	342,000	2,280	47.2	0.75	9.83
B2	890	77.9	109.3	209.0	13,150	112.6	71.4	46.3	421,000	2,825	46.7	0.99	12.85
B3	1056	85.6	117.6	208.9	16,100	104.0	94.5	62.3	501,000	3,710	43.3	1.44	17.75
B4	1260	89.8	121.9	208.0	19,350	98.5	120	79.5	597,000	4,620	41.4	1.92	23.0
B5	1497	91.6	123.3	207.5	22,700	96.0	144	95	709,000	5,780	40.7	2.33	27.7
B6	1802	99.1	129.2	207.2	26,200	88.5	181	120.5	854,000	7,140	38.7	3.12	35.5
B7	2164	102.3	131.7	206.9	30,900	84.7	223	147.5	1,026,000	8,840	37.7	3.91	44.0
B8	2575	106.5	134.3	206.4	35,000	80.3	266	176.5	1,220,000	10,850	36.5	4.83	53.2
B9	3265	111.5	137.1	205.0	41,100	74.2	338	223	1,548,000	14,250	35.3	6.32	68.0
B10	3902	113.9	138.2	203.8	46,600	70.6	403	266.5	1,850,000	17,350	35.1	7.60	81.4
B11	4585	116.8	139.7	203.0	51,900	66.9	474	313	2,176,000	20,950	34.1	9.18	96.5
B12	5360	122.2	142.9	202.9	54,900	62.3	538	356	2,538,000	25,550	32.9	10.82	111.2
B13	6210	124.8	144.1	202.2	59,500	59.1	615	407	2,938,000	30,000	32.7	12.43	127.5

Corridas de calentamiento de straw oil 29.4° API con vapor

C8	2900	100.0	115.4	206.3	20,700	95.8	132	87.5	1,375,000	3,210	133	0.66	17.2
C9	2920	86.7	99.3	208.0	16,800	112.7	91.1	60.4	1,387,000	2,350	179	0.34	10.7
C10	3340	101.7	117.6	206.0	24,800	92.9	163	108	1,585,000	3,820	129.5	0.83	21.4
C11	3535	100.5	115.7	205.5	25,000	94.0	162	107.5	1,675,000	3,880	133.3	0.81	21.1
C12	3725	163.0	175.1	220.1	22,600	47.9	288	191	1,767,000	10,200	57.8	3.30	49.5
C13	3810	160.5	173.6	220.5	24,900	50.0	304	201.5	1,805,000	10,150	59.3	3.39	51.6
C14	3840	109.0	124.4	205.7	27,800	85.2	199	131.5	1,820,000	4,960	115	1.15	27.1
C15	4730	112.0	127.3	205.3	34,100	81.0	257	170	2,240,000	6,430	110	1.55	35.5
C16	5240	154.9	167.6	217.7	33,100	51.9	389	257.5	2,485,000	13,150	62.9	4.08	64.7
C17	5270	150.9	164.3	217.0	34,900	54.7	389	257.5	2,500,000	12,520	65.6	3.92	63.7
C18	5280	142.3	156.8	216.7	37,500	62.0	369	244	2,510,000	11,250	72.6	3.36	58.5
C19	5320	132.3	148.1	215.9	40,600	70.2	353	234	2,520,000	9,960	81.5	2.87	54.1
C20	5620	118.8	133.1	204.7	38,200	73.5	317	210	2,660,000	8,420	100.4	2.09	45.2
C21	6720	122.2	135.9	204.3	43,900	69.2	387	256	3,185,000	10,620	95.6	2.68	56.9
C22	8240	124.1	137.0	204.4	47,900	67.3	434	287	3,905,000	12,650	93.3	3.08	63.3

(1) Corrida No.	(9) $\frac{h_i D}{k}$	(11) $\frac{DG}{\mu}$	(12) $\frac{c\mu}{k}$
B1	35.5	2,280	47.2
B2	46.3	2,825	46.7
B3	62.3	3,710	43.3
B4	79.5	4,620	41.4
B5	95	5,780	40.7
B6	120.5	7,140	38.7
B7	147.5	8,840	37.7
B8	176.5	10,850	36.5
B9	223	14,250	35.3
B10	266.5	17,350	35.1
B11	313	20,950	34.1
B12	356	25,550	32.9
B13	407	30,000	32.7

C8	87.5	3,210	133
C9	60.4	2,350	179
C10	108	3,820	129.5
C11	107.5	3,880	133.3
C12	191	10,200	57.8
C13	201.5	10,150	59.3
C14	131.5	4,960	115
C15	170	6,430	110
C16	257.5	13,150	62.9
C17	257.5	12,520	65.6
C18	244	11,250	72.6
C19	234	9,960	81.5
C20	210	8,420	100.4
C21	256	10,620	95.6
C22	287	12,650	93.3

$$\frac{h_i D}{k} = \alpha \left(\frac{Du\rho}{\mu} \right)^p \left(\frac{c\mu}{k} \right)^q$$

¿Cuáles son los parámetros?

¿Cómo evaluamos α , p y q ?

¿Es lineal en los parámetros?

$$Nu = \alpha Re^p Pr^q$$

$$Nu = \alpha Re^p Pr^q$$

$$\ln Nu = \ln \alpha + p \ln Re + q \ln Pr$$

$$\ln Nu = \ln \alpha + p \ln Re + q \ln Pr$$

			$\ln \alpha$
			p
			q
1	$\ln Re_{B1}$	$\ln Pr_{B1}$	$\ln Nu_{B1}$
1	$\ln Re_{B2}$	$\ln Pr_{B2}$	$\ln Nu_{B2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\ln Re_{C21}$	$\ln Pr_{C21}$	$\ln Nu_{C21}$
1	$\ln Re_{C22}$	$\ln Pr_{C22}$	$\ln Nu_{C22}$

(1) Corrida No.	(9) $\frac{h_i D}{k}$	(11) $\frac{DG}{\mu}$	(12) $\frac{c\mu}{k}$
B1	35.5	2,280	47.2
B2	46.3	2,825	46.7
B3	62.3	3,710	43.3
B4	79.5	4,620	41.4
B5	95	5,780	40.7
B6	120.5	7,140	38.7
B7	147.5	8,840	37.7
B8	176.5	10,850	36.5
B9	223	14,250	35.3
B10	266.5	17,350	35.1
B11	313	20,950	34.1
B12	356	25,550	32.9
B13	407	30,000	32.7

C8	87.5	3,210	133
C9	60.4	2,350	179
C10	108	3,820	129.5
C11	107.5	3,880	133.3
C12	191	10,200	57.8
C13	201.5	10,150	59.3
C14	131.5	4,960	115
C15	170	6,430	110
C16	257.5	13,150	62.9
C17	257.5	12,520	65.6
C18	244	11,250	72.6
C19	234	9,960	81.5
C20	210	8,420	100.4
C21	256	10,620	95.6
C22	287	12,650	93.3

Matriz de modelización

$$\begin{matrix}
 & A & & x & & b \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 1.0000 & 7.7319 & 3.8544 \\
 1.0000 & 7.9463 & 3.8437 \\
 1.0000 & 8.2188 & 3.7682 \\
 1.0000 & 8.4381 & 3.7233 \\
 1.0000 & 8.6622 & 3.7062 \\
 1.0000 & 8.8735 & 3.6558 \\
 1.0000 & 9.0870 & 3.6297 \\
 1.0000 & 9.2919 & 3.5973 \\
 1.0000 & 9.5645 & 3.5639 \\
 1.0000 & 9.7613 & 3.5582 \\
 1.0000 & 9.9499 & 3.5293 \\
 1.0000 & 10.1484 & 3.4935 \\
 1.0000 & 10.3090 & 3.4874 \\
 1.0000 & 8.0740 & 4.8903 \\
 1.0000 & 7.7622 & 5.1874 \\
 1.0000 & 8.2480 & 4.8637 \\
 1.0000 & 8.2636 & 4.8926 \\
 1.0000 & 9.2301 & 4.0570 \\
 1.0000 & 9.2252 & 4.0826 \\
 1.0000 & 8.5092 & 4.7449 \\
 1.0000 & 8.7687 & 4.7005 \\
 1.0000 & 9.4842 & 4.1415 \\
 1.0000 & 9.4351 & 4.1836 \\
 1.0000 & 9.3281 & 4.2850 \\
 1.0000 & 9.2063 & 4.4006 \\
 1.0000 & 9.0384 & 4.6092 \\
 1.0000 & 9.2705 & 4.5602 \\
 1.0000 & 9.4454 & 4.5358
 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c}
 \ln \alpha \\
 p \\
 q
 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c}
 3.5695 \\
 3.8351 \\
 4.1320 \\
 4.3758 \\
 4.5539 \\
 4.7916 \\
 4.9938 \\
 5.1733 \\
 5.4072 \\
 5.5854 \\
 5.7462 \\
 5.8749 \\
 6.0088 \\
 4.4716 \\
 4.1010 \\
 4.6821 \\
 4.6775 \\
 5.2523 \\
 5.3058 \\
 4.8790 \\
 5.1358 \\
 5.5510 \\
 5.5510 \\
 5.4972 \\
 5.4553 \\
 5.3471 \\
 5.5452 \\
 5.6595
 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$

$$A^* = A^t A$$

$$b^* = A^t b$$

$$[A^t] = 3 \times 28$$

$$[A^t] = 3 \times 28$$

$$[A] = 28 \times 3$$

$$[b] = 28 \times 1$$

$$[A^*] = 3 \times 3$$

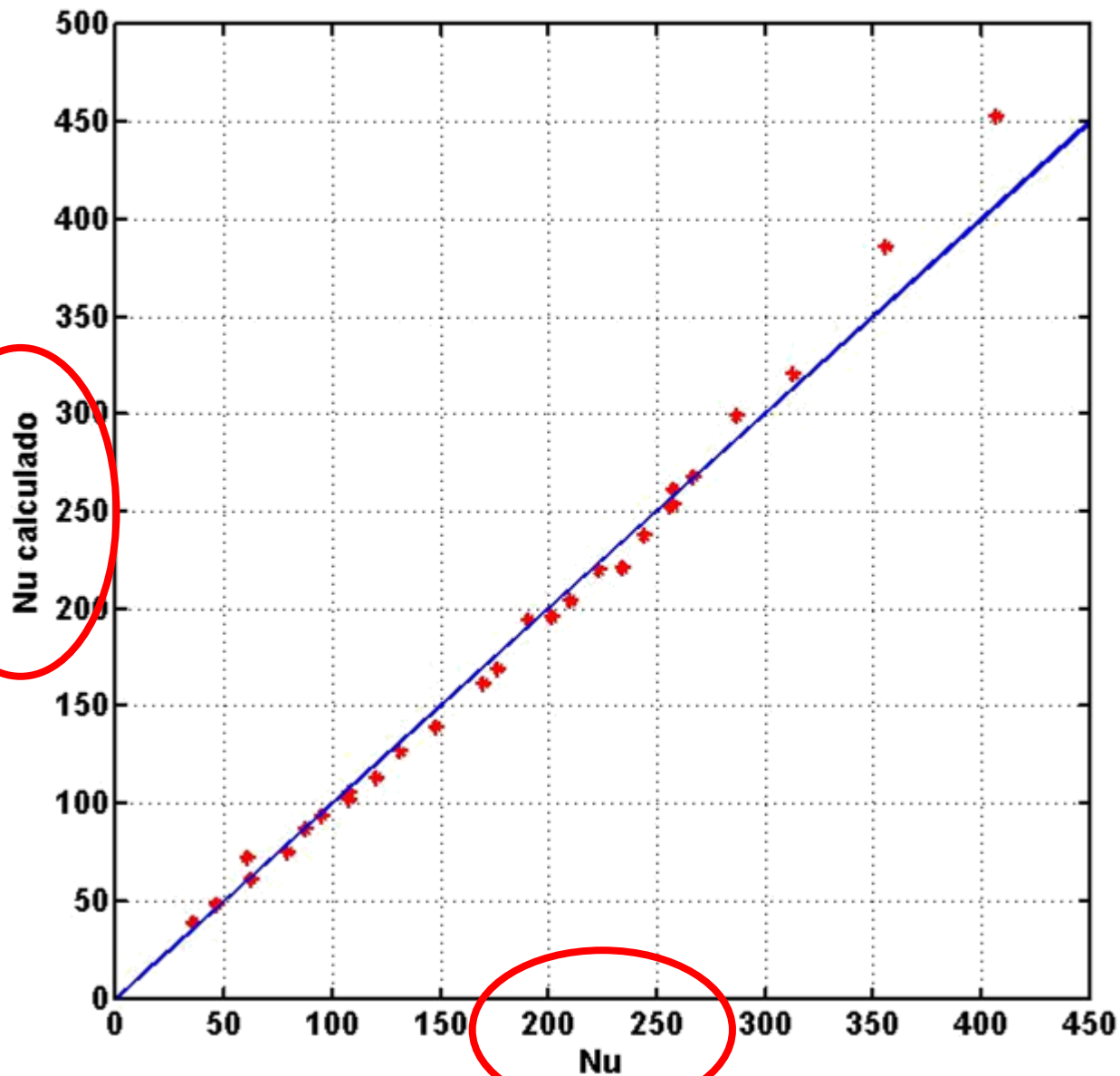
$$[b^*] = 3 \times 1$$

$$x = A^* \setminus b^*$$

SAEL 3x3

$$x = \begin{bmatrix} \ln \alpha \\ p \\ q \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha = e^{x(1)} \\ p = x(2) \\ q = x(3) \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 0.0028 \\ p = 1.0156 \\ q = 0.4402 \end{array}$$

$$Nu = 0.0028 Re^{1.0156} Pr^{0.4402}$$



$$\frac{h_i D}{k} = \alpha \left(\frac{Du\rho}{\mu} \right)^p \left(\frac{c\mu}{k} \right)^q \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{h_i D}{k}}{\left(\frac{c\mu}{k} \right)^q} = \alpha \left(\frac{Du\rho}{\mu} \right)^p$$

$$\frac{Nu}{Pr^q} = \alpha Re^p$$

En este modelo, debemos elegir el valor de q y estimar α y p

$$\frac{Nu}{Pr^q} = \alpha Re^p \quad \text{Linealizar para } q=1 \text{ y } q=1/3$$

$$\ln\left(\frac{Nu}{Pr}\right) = \ln \alpha + p \ln Re$$

$$\ln\left(\frac{Nu}{Pr^{1/3}}\right) = \ln \alpha + p \ln Re$$

$$\ln\left(\frac{Nu}{Pr}\right) = \ln \alpha + p \ln Re$$

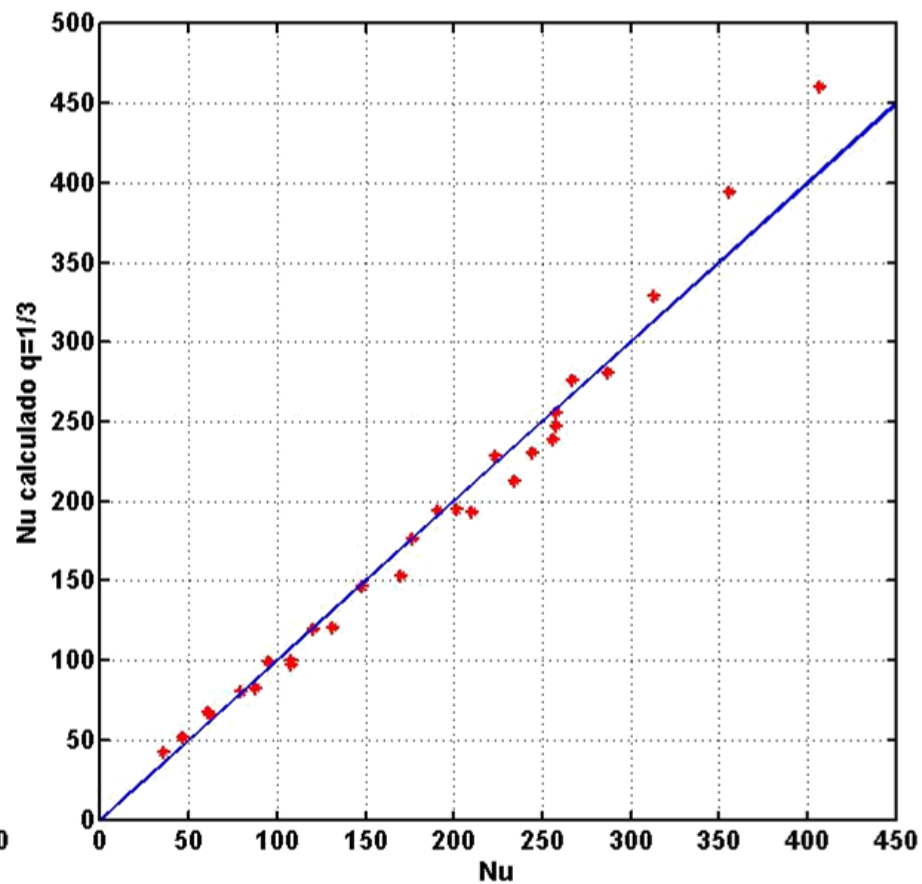
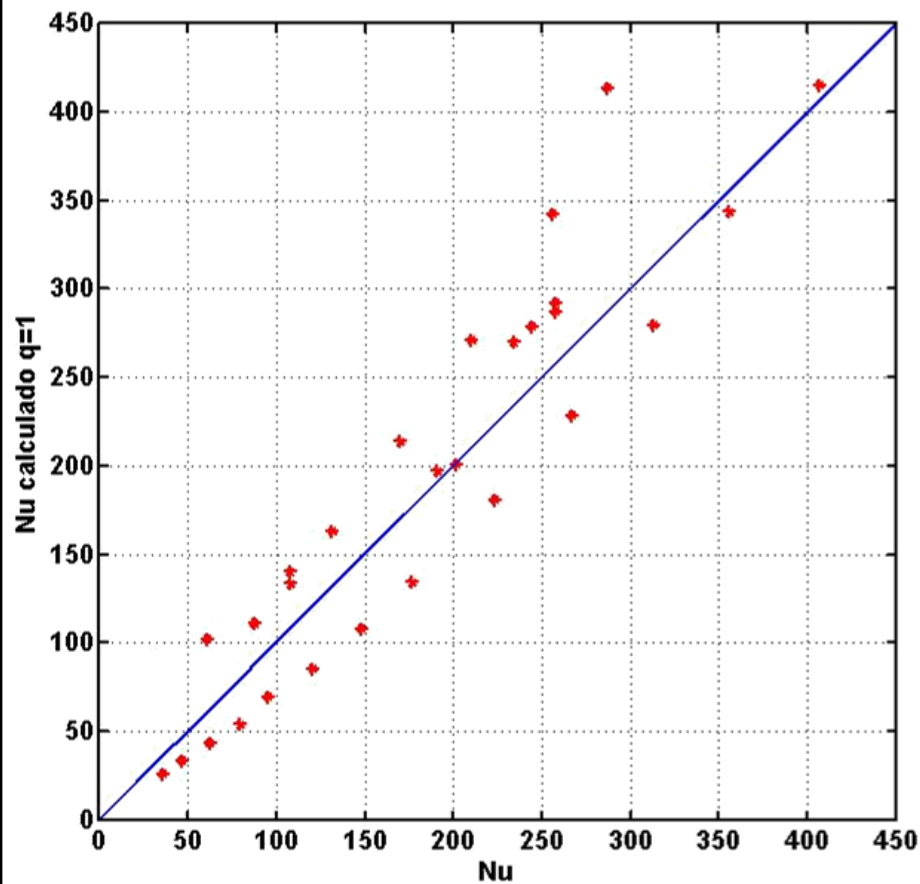
$$\ln\left(\frac{Nu}{Pr^{1/3}}\right) = \ln \alpha + p \ln Re$$

Realizar las matrices de modelización

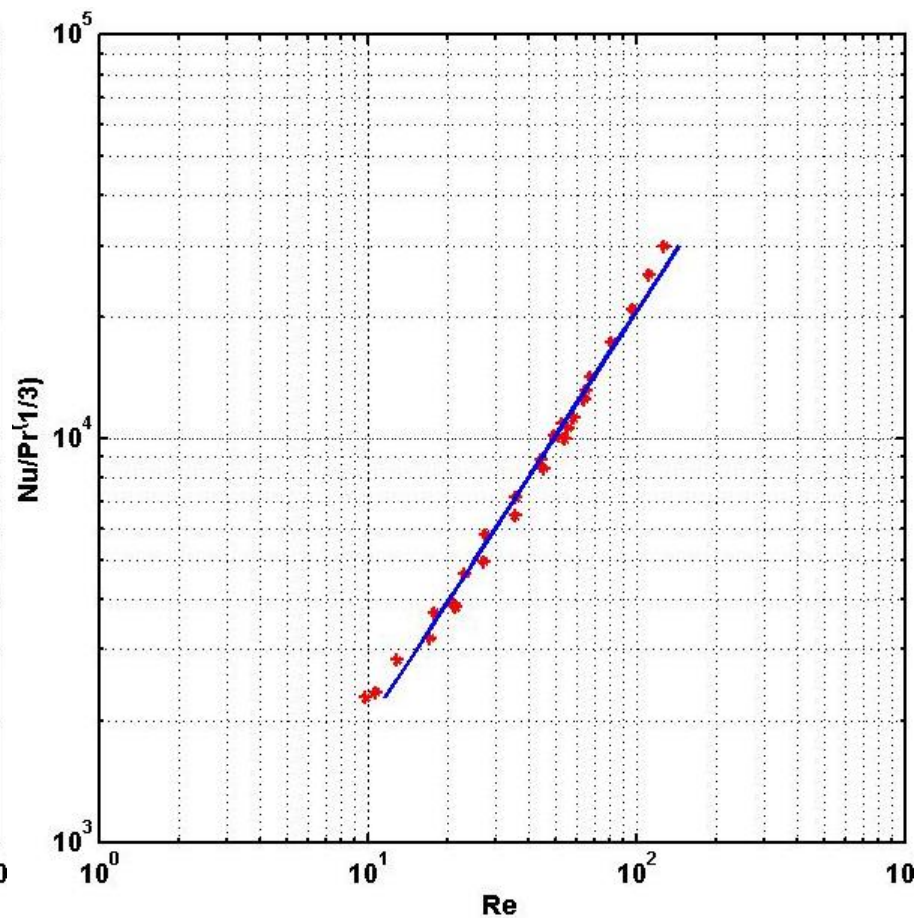
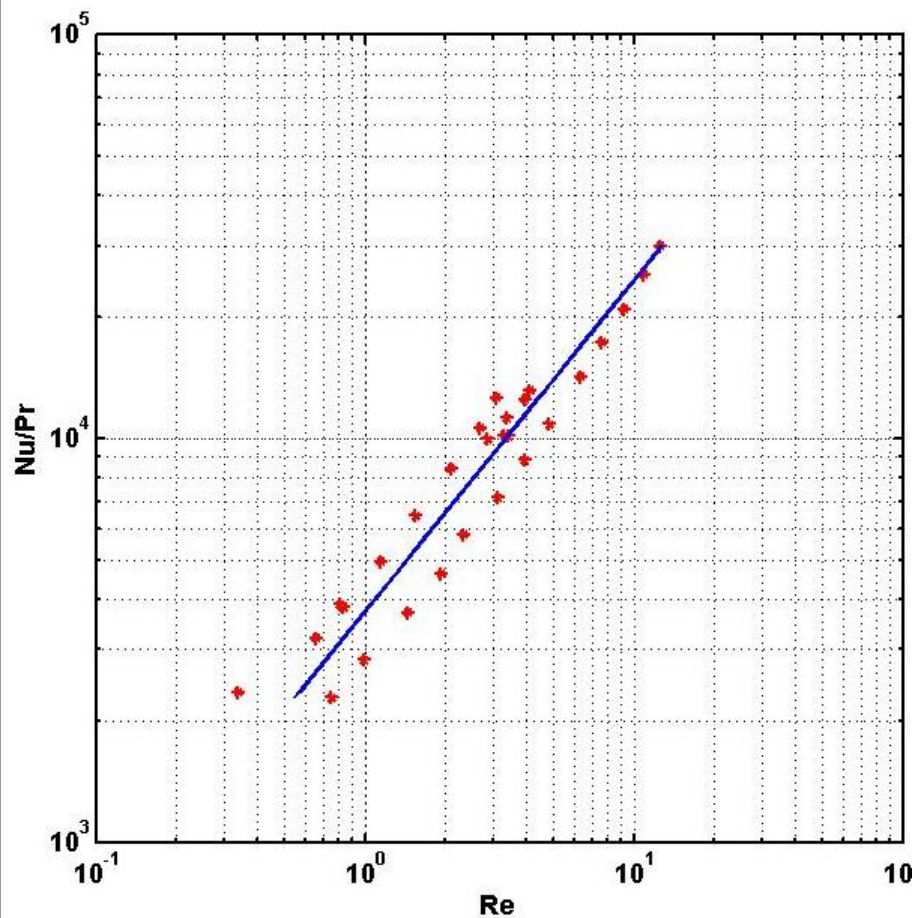
$$\frac{Nu}{Pr} = 4.4435e-005 Re^{1.2187}$$

$$\frac{Nu}{Pr^{1/3}} = 0.0061 Re^{0.9768}$$

$$Nu = 4.4435e-005 Re^{1.2187} Pr \quad Nu = 0.0061 Re^{0.9768} Pr^{1/3}$$



¿Que modelo es mejor?



$$Nu = 0.0028 Re^{1.0156} Pr^{0.4402}$$

$$r_1 = \|Ax - b\| = 0.2952$$

$$Nu = 4.4435e - 005 Re^{1.2187} Pr$$

$$r_2 = \|Ax - b\| = 1.3640$$

$$Nu = 0.0061 Re^{0.9768} Pr^{1/3}$$

$$r_3 = \|Ax - b\| = 0.3895$$

$$Nu = 0.0115 Re^{0.9} Pr^{1/3}$$

$$r_4 = \|Ax - b\| = 0.5608$$

Kern