UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL ROSARIO
Departamento de Ingeniería Química

Cátedra: Integración IV

Tema: Resolución de Sistemas de Ecuaciones No-Lineales

Alumnos: Damián Matich, Marcos Bossi y Juan M. Pignani

Profesores: Dr. Nicolás Scenna, Dr. Alejandro Santa Cruz y Dra. Sonia Benz

Año de cursado: 1999

Problema 1:

Utilizar el método de aproximaciones sucesivas para resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} \mathrm{f}_1(x_1, x_2) = 2\cos(x_1 * x_2) + \dfrac{x_2}{\pi} + x_1 = 0 \\ \mathrm{f}_2(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{1}\left(\dfrac{x_2}{\pi} - 2x_1\right) = 0 \end{cases}$$

Elegir como valores de arranque $x_1^{(0)} = 0.9$ y $x_2^{(0)} = 3.0$

Resolución:

El método de aproximaciones sucesivas, consiste en explicitar el sistema de ecuaciones lineales o no-lineales $\left(\underline{\mathrm{f}}(\underline{x}) = \underline{0}\right)$, transformándolo en el sistema equivalente:

$$\underline{x} = \underline{x} + \underline{\mathrm{f}}(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x})$$

Una vez explicitada la función, se propone una aproximación inicial $\underline{x}_0$ de la solución buscada $\underline{x}^*$, que se mejora en sucesivas iteraciones conforme a la siguiente ley de recurrencia:

$$\underline{x}^{(n+1)} = \underline{F}(\underline{x}^{(n)})\,;$$

iterándose hasta que $\left\|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\right\| \le \varepsilon$.

Para este sistema, el método se implementó en una planilla de cálculo Excel, como se muestra más adelante, siendo:

$$x_1^{(n+1)} = F(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) = 2\cos(x_1^{(n)} * x_2^{(n)}) + \frac{x_2^{(n)}}{\pi} + 2x_1^{(n)}$$

$$x_2^{(n+1)} = F(x_1^{(N)}, x_2^{(n)}) = e^{x_1^{(n)}} + e^{1}\left(\frac{x_2^{(n)}}{\pi} - 2x_1^{(n)}\right) + x_2^{(n)}$$

y la norma utilizada fue la Euclidiana: $\| \cdot \|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)})^2}$

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_1^{(n+1)} = F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$	$x_2^{(n+1)} = F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$	$f_1(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$	$f_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$	**Error**
2	x_1^0	x_2^0	---	---	2*COS(A2*B2)+B2/PI()+A2	Exp(A2)+Exp(1)*(B2/PI()-2*A2)	---
3	A2	B2	2*COS(A3*B3)+B3/PI()+2*A3	Exp(A3)+Exp(1)*(1/PI()-2*A3)+B3	2*COS(C3*D3)+D3/PI()+C3	Exp(C3)+Exp(1)*(D3/PI()-2*C3)	$((C3-A3)^2+(D3-B3)^2)^{1/2}$
4	C3	D3	2*COS(A4*B4)+B4/PI()+2*A4	Exp(A4)+Exp(1)*(1/PI()-2*A4)+B4	2*COS(C4*D4)+D4/PI()+C4	Exp(C4)+Exp(1)*(D4/PI()-2*C4)	$((C4-A4)^2+(D4-B4)^2)^{1/2}$
5	C4	D4	2*COS(A5*B5)+B5/PI()+2*A5	Exp(A5)+Exp(1)*(1/PI()-2*A5)+B5	2*COS(C5*D5)+D5/PI()+C5	Exp(C5)+Exp(1)*(D5/PI()-2*C5)	$((C5-A5)^2+(D5-B5)^2)^{1/2}$
6	C5	D5	2*COS(A6*B6)+B6/PI()+2*A6	Exp(A6)+Exp(1)*(1/PI()-2*A6)+B6	2*COS(C6*D6)+D6/PI()+C6	Exp(C6)+Exp(1)*(D6/PI()-2*C6)	$((C6-A6)^2+(D6-B6)^2)^{1/2}$

Cálculos:

$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_1^{(n+1)} = F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$	$x_2^{(n+1)} = F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$	$f_1(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$	$f_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$	**Error**
0.900	3.000	-	-	0.047	0.162	-
0.900	3.000	0.947	1.432	1.829	-1.331	1.569
0.947	1.432	2.776	-0.273	4.143	0.729	2.500
2.776	-0.273	6.919	1.557	6.976	975.522	4.529
6.919	1.557	13.895	976.597	324.789	1083842.260	975.065
13.895	976.597	338.685	1083974.716	#¡Num!	$1.227*10^{147}$	$1.082*10^6$
338.685	$1.086*10^6$	#¡Num!	$1.227*10^{147}$	#¡Num!	#¡Num!	#¡Num!

Como se puede ver el método de aproximaciones sucesivas no es adecuado para encontrar la solución de este sistema de ecuaciones no lineales en particular, ya que el mismo diverge.

<u>Problema 2</u>:

Resolver el problema anterior mediante el método de Wegstein, utilizando los mismos valores de arranque.

Resolución:

Si el sistema $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$, puede ser transformado a $\underline{x} = \underline{F}(\underline{x})$; entonces la ley de recurrencia se expresa:

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^{(n+1)} &= F_i(\underline{\tilde{x}}^n) \\ \tilde{x}_i^{(n+1)} &= q_i \tilde{x}_i^{(n)} + (1 - q_i) x_i^{(n+1)} \quad \text{para } i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

donde $q_i = \dfrac{w_i}{w_i - 1}$ y $w_i = \dfrac{x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}}{\tilde{x}_i^{(n)} - \tilde{x}_{i-1}^{(n)}}$.

En forma matricial:

$$\underline{\tilde{x}}^{(n+1)} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\tilde{x}}^{(n)} + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}})\underline{x}^{(n+1)}$$

donde $\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_N \end{bmatrix}$

1- Etapa de preparación: Se generan tres valores de x_1 y tres valores de x_2 mediante aproximaciones sucesivas, a partir de una estimación inicial de la solución $\underline{x} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Así:

$$\begin{aligned}
&x_1^{(1)} = F_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) && x_2^{(1)} = F_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\
&\tilde{x}_1^{(1)} = x_1^{(1)} && \tilde{x}_2^{(1)} = x_2^{(1)} \\
&x_1^{(2)} = F_1(\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)}) = F_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) && x_2^{(2)} = F_2(\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)}) = F_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \\
&\tilde{x}_1^{(2)} = x_1^{(2)} && \tilde{x}_2^{(2)} = x_2^{(2)} \\
&x_1^{(3)} = F_1(\tilde{x}_1^{(2)}, \tilde{x}_2^{(2)}) = F_1(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) && x_2^{(3)} = F_2(\tilde{x}_1^{(2)}, \tilde{x}_2^{(2)}) = F_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})
\end{aligned}$$

2- Etapa de iniciación:

$$\left.\begin{aligned}
&w_i = \frac{x_i^{(3)} - x_i^{(2)}}{\tilde{x}_i^{(2)} - \tilde{x}_i^{(1)}} = \frac{F_i(\tilde{x}_i^{(2)}) - F_i(\tilde{x}_i^{(1)})}{\tilde{x}_i^{(2)} - \tilde{x}_i^{(1)}} \\
&q_i = \frac{w_i}{w_i - 1} \\
&\tilde{x}_i^{(3)} = q_i \tilde{x}_i^{(2)} + (1 - q_i) x_i^{(3)} \\
&x_i^{(4)} = F_i(\tilde{x}_i^{(3)})
\end{aligned}\right\} \text{con} \quad i = 1 \text{ y } 2$$

3- Etapa general:

$$\left.\begin{aligned}
&x_i^{(n+1)} = F_i(\tilde{x}_i^{(n)}) \\
&w_i = \frac{x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}}{\tilde{x}_i^{(n)} - \tilde{x}_i^{(n-1)}} = \frac{F_i(\tilde{x}_i^{(n)}) - F_i(\tilde{x}_i^{(n-1)})}{\tilde{x}_i^{(n)} - \tilde{x}_i^{(n-1)}} \\
&q_i = \frac{w_i}{w_i - 1} \\
&\tilde{x}_i^{(n+1)} = q_i \tilde{x}_i^{(n)} + (1 - q_i) x_i^{(n+1)}
\end{aligned}\right\} \text{con} \quad i = 1 \text{ y } 2$$

El método se implementó en una hoja de cálculo Excel como se muestra a continuación. Para determinar el error se utilizó la norma Euclidiana.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_1^{(n)}$ **(c)**	$x_2^{(n)}$ **(c)**	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	w_1	w_2	q_1	q_2	$x_1^{(n+1)}$ (c)	$x_2^{(n+1)}$ (c)	**f$_1$**	**f$_2$**	**Error**
2	0.9	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	2cos(A2*B2)+ B2/PI+2*A2	Exp(A2)+Exp(1)* (B2/PI-2*A2)+B2	A3	B3	2cos(C3*D3)+ D3/PI+2*C3	Exp(C3)+Exp(1)* (D3/PI-2*C3)+D3	-	-	-	-	E3	F3	2cos(K3*L3)+ L3/PI+K3	Exp(K3)+Exp(1)* (L3/PI-2*K3)	-
4	2cos(K3*L3)+ L3/PI+2*K3	Exp(K3)+Exp(1)* (L3/PI-2*K3)+L3	A4	B4	2cos(C4*D4)+ D4/PI+2*C4	Exp(C4)+Exp(1)* (D4/PI-2*C4)+D4	(E4-E3)/(C4-K3)	(F4-F3)/(D4-L3)	G4/(G4-1)	H4/(H4-1)	I4*C4+(1-I4)*E4	J4*D4+(1-J4)*F4	2cos(K4*L4)+ L4/PI+K4	Exp(K4)+Exp(1)* (L4/PI-2*K4)	$((K4-C4)^2+(L4-D4)^2)^{1/2}$
5	2cos(K4*L4)+ L4/PI+2*K4	Exp(K4)+Exp(1)* (L4/PI-2*K4)+L4	K4	L4	2cos(C5*D5)+ D5/PI+2*C5	Exp(C5)+Exp(1)* (D5/PI-2*C5)+D5	(E5-E4)/(C5-C4)	(F5-F4)/(D5-D4)	G5/(G5-1)	H5/(H5-1)	I5*C5+(1-I5)*E5	J5*D5+(1-J5)*F5	2cos(K5*L5)+ L5/PI+K5	Exp(K5)+Exp(1)* (L5/PI-2*K5)	$((K5-C5)^2+(L5-D5)^2)^{1/2}$
6	2cos(K5*L5)+ L5/PI+2*K5	Exp(K5)+Exp(1)* (L5/PI-2*K5)+L5	K5	L5	2cos(C6*D6)+ D6/PI+2*C6	Exp(C6)+Exp(1)* (D6/PI-2*C6)+D6	(E6-E5)/(C6-C5)	(F6-F5)/(D6-D5)	G6/(G6-1)	H6/(H6-1)	I6*C6+(1-I6)*E6	J6*D6+(1-J6)*F6	2cos(K6*L6)+ L6/PI+K6	Exp(K6)+Exp(1)* (L6/PI-2*K6)	$((K6-C6)^2+(L6-D6)^2)^{1/2}$
7	2cos(K6*L6)+ L6/PI+2*K6	Exp(K6)+Exp(1)* (L6/PI-2*K6)+L6	K6	L6	2cos(C7*D7)+ D7/PI+2*C7	Exp(C7)+Exp(1)* (D7/PI-2*C7)+D7	(E7-E6)/(C7-C6)	(F7-F6)/(D7-D6)	G7/(G7-1)	H7/(H7-1)	I7*C7+(1-I7)*E7	J7*D7+(1-J7)*F7	2cos(K7*L7)+ L7/PI+K7	Exp(K7)+Exp(1)* (L7/PI-2*K7)	$((K7-C7)^2+(L7-D7)^2)^{1/2}$
8	2cos(K7*L7)+ L7/PI+2*K7	Exp(K7)+Exp(1)* (L7/PI-2*K7)+L7	K7	L7	2cos(C8*D8)+ D8/PI+2*C8	Exp(C8)+Exp(1)* (D8/PI-2*C8)+D8	(E8-E7)/(C8-C7)	(F8-F7)/(D8-D7)	G8/(G8-1)	H8/(H8-1)	I8*C8+(1-I8)*E8	J8*D8+(1-J8)*F8	2cos(K8*L8)+ L8/PI+K8	Exp(K8)+Exp(1)* (L8/PI-2*K8)	$((K8-C8)^2+(L8-D8)^2)^{1/2}$
9	2cos(K8*L8)+ L8/PI+2*K8	Exp(K8)+Exp(1)* (L8/PI-2*K8)+L8	K8	L8	2cos(C9*D9)+ D9/PI+2*C9	Exp(C9)+Exp(1)* (D9/PI-2*C9)+D9	(E9-E8)/(C9-C8)	(F9-F8)/(D9-D8)	G9/(G9-1)	H9/(H9-1)	I9*C9+(1-I9)*E9	J9*D9+(1-J9)*F9	2cos(K9*L9)+ L9/PI+K9	Exp(K9)+Exp(1)* (L9/PI-2*K9)	$((K9-C9)^2+(L9-D9)^2)^{1/2}$

$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_1^{(n)}$ (c)	$x_2^{(n)}$ (c)	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	w_1	w_2	q_1	q_2	$x_1^{(n+1)}$ (c)	$x_2^{(n+1)}$ (c)	f_1	f_2	**Error**
0.9000	3.0000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.9468	3.1625	0.9468	3.1625	0.9219	3.3290	-	-	-	-	0.9219	3.3290	-0.0132	0.3825	-
0.9087	3.7114	0.9087	3.7114	1.0520	4.4636	-9.8663	2.9666	0.9080	1.5085	0.9219	3.3290	-0.0132	0.3825	0.38270
0.9087	3.7114	0.9219	3.3290	0.9087	3.7114	-10.8663	1.9666	0.9157	2.0346	0.9208	2.9333	0.0455	0.0433	0.39571
0.9663	2.9766	0.9208	2.9333	0.9663	2.9766	-51.8572	1.8570	0.9811	2.1668	0.9217	2.8827	0.0697	-0.0029	0.05057
0.9913	2.8798	0.9217	2.8827	0.9913	2.8798	28.9841	1.9151	1.0357	2.0928	0.9192	2.8859	0.0721	0.0071	0.00406
0.9913	2.8930	0.9192	2.8859	0.9913	2.8930	0.0007	4.1364	-0.0007	1.3188	0.9914	2.8836	-0.0113	-0.1996	0.07223
0.9801	2.6840	0.9914	2.8836	0.9801	2.6840	-0.1553	92.0249	0.1344	1.0110	0.9816	2.8858	-0.0052	-0.1709	0.00999
0.9764	2.7149	0.9816	2.8858	0.9764	2.7149	0.3757	14.1112	-0.6017	1.0763	0.9733	2.8988	-0.0024	-0.1366	0.01545
0.9710	2.7623	0.9733	2.8988	0.9710	2.7623	0.6608	3.6333	-1.9485	1.3797	0.9663	2.9507	-0.0108	-0.0722	0.05232
0.9556	2.8785	0.9663	2.9507	0.9556	2.8785	2.2092	2.2416	1.8270	1.8054	0.9753	3.0088	-0.0242	-0.0468	0.05881
0.9511	2.9620	0.9753	3.0088	0.9511	2.9620	-0.5043	1.4358	0.3352	3.2949	0.9592	3.1163	-0.0257	0.0914	0.10869
0.9335	3.2077	0.9592	3.1163	0.9335	3.2077	1.0891	2.2856	12.2207	1.7778	1.2471	3.0453	0.6317	-0.6647	0.29656
1.8788	2.3805	1.2471	3.0453	1.8788	2.3805	3.2832	11.6408	1.4380	1.0940	0.9704	3.1077	-0.0246	0.0523	0.28364
0.9459	3.1601	0.9704	3.1077	0.9459	3.1601	3.3719	12.4782	1.4216	1.0871	0.9808	3.1032	-0.0218	0.0196	0.01131
0.9589	3.1227	0.9808	3.1032	0.9589	3.1227	1.2619	8.1889	4.8178	1.1391	1.0642	3.1005	0.0759	-0.2043	0.08345
1.1401	2.8962	1.0642	3.1005	1.1401	2.8962	2.1723	83.3128	1.8530	1.0121	0.9994	3.1029	-0.0113	-0.0318	0.06482
0.9881	3.0711	0.9994	3.1029	0.9881	3.0711	2.3462	70.4964	1.7428	1.0144	1.0078	3.1034	-0.0042	-0.0541	0.00838
1.0036	3.0493	1.0078	3.1034	1.0036	3.0493	1.8450	-47.6407	2.1835	0.9794	1.0127	3.1023	0.0002	-0.0684	0.00509
1.0129	3.0339	1.0127	3.1023	1.0129	3.0339	1.8887	13.8747	2.1253	1.0777	1.0125	3.1076	0.0017	-0.0631	0.00532
1.0142	3.0445	1.0125	3.1076	1.0142	3.0445	-5.0236	1.9885	0.8340	2.0116	1.0128	3.1715	0.0272	-0.0086	0.06387
1.0400	3.1628	1.0128	3.1715	1.0400	3.1628	92.1938	1.8535	1.0110	2.1717	1.0125	3.1816	0.0315	0.0009	0.01011
1.0440	3.1825	1.0125	3.1816	1.0440	3.1825	-13.4384	1.9445	0.9307	2.0587	1.0146	3.1806	0.0344	-0.0058	0.00239
1.0490	3.1748	1.0146	3.1806	1.0490	3.1748	2.3085	7.8765	1.7643	1.1454	0.9884	3.1814	0.0011	0.0663	0.02630
0.9894	3.2477	0.9884	3.1814	0.9894	3.2477	2.2682	86.7575	1.7885	1.0117	0.9875	3.1807	0.0000	0.0679	0.00114
0.9875	3.2486	0.9875	3.1807	0.9875	3.2486	2.3037	-1.1080	1.7670	0.5256	0.9876	3.2129	0.0112	0.0957	0.03222
0.9988	3.3086	0.9876	3.2129	0.9988	3.3086	494.5849	1.8633	1.0020	2.1583	0.9875	3.1020	-0.0189	-0.0002	0.11088
0.9686	3.1019	0.9875	3.1020	0.9686	3.1019	1327.5618	1.8647	1.0008	2.1565	**0.9875**	**3.1022**	-0.0189	-3.92×10^{-05}	0.00018

El método de Wegstein, al contrario de método de aproximaciones sucesivas implementado en el Problema 1, logra converger con un error aproximado de 10^{-4}. Como resultado se obtienen los siguientes valores:

$$x_1 = 0.9875$$
$$x_2 = 3.1022$$