UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL ROSARIO
Departamento de Ingeniería Química

Cátedra: Integración IV

Tema: Resolución de Ecuaciones No-Lineales

Alumnos: Damián Matich, Marcos Bossi y Juan M. Pignani

Profesores: Dr. Nicolás Scenna, Dr. Alejandro Santa Cruz y Dra. Sonia Benz

Año de cursado: 1999

<u>Problema 1</u>:

Para el flujo turbulento de un fluido a través de un tubo liso, es posible establecer la siguiente relación entre el factor de fricción (c_f) y el número de Reynolds (Re):

$$\sqrt{\frac{1}{c_f}} = -0.4 + 1.74 * \mathrm{Ln}\left(\mathrm{Re}\sqrt{c_f}\right) \tag{1}$$

Calcular c_f para Re = 10^4, 10^5 y 10^6.

Modelo de resolución:

Para resolver el problema planteado, se implementó el método de Newton-Raphson, de orden de convergencia cuadrático (p = 2), en una planilla de cálculo. Siendo la expresión general del método:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

Para esto es necesario reescribir la Ecuación (1) anterior de la forma:

$$-0.4 + 1.74 * Ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{c_f}\right) - \sqrt{\frac{1}{c_f}} = 0.$$

El método se preparó en una planilla Excel como se muestra a continuación:

	A	B	C	D	E	
	$c_{f\,(n)}$	$f(c_{f\,(n)})$	$f'(c_{f\,(n)})$	$c_{f\,(n+1)}$	**Error**	
1	V. inicial	0.4+1.74*Ln(10^4 A2$^{0.5}$)-A2$^{-0.5}$	0.87/A2+0.5*A2$^{-1.5}$	A2-B2/C2	ABS(D2-A2)	Preparación
2	D2	0.4+1.74*Ln(10^4 A3$^{0.5}$)-A3$^{-0.5}$	0.87/A3+0.5*A3$^{-1.5}$	A3-B3/C3	ABS(D3-A3)	1º arrastre
3	D3	0.4+1.74*Ln(10^4 A4$^{0.5}$)-A4$^{-0.5}$	0.87/A4+0.5*A4$^{-1.5}$	A4-B4/C4	ABS(D4-A4)	2º arrastre
4	D4	0.4+1.74*Ln(10^4 A5$^{0.5}$)-A5$^{-0.5}$	0.87/A5+0.5*A5$^{-1.5}$	A5-B5/C5	ABS(D5-A5)	
5	D5	0.4+1.74*Ln(10^4 A6$^{0.5}$)-A6$^{-0.5}$	0.87/A6+0.5*A6$^{-1.5}$	**A6-B6/C6**	ABS(D6-A6)	

Preparación: las fórmulas deben ingresarse manualmente; 1º arrastre: algunas de las fórmulas son arrastradas de la fila anterior; 2º arrastre: las ecuaciones de la fila anterior son arrastradas hasta obtener el valor del error especificado, en el caso de que el método converja.

Cálculos:

- Para Re = 10^4:

$c_{f\,(n)}$	$f(c_{f\,(n)})$	$f'(c_{f\,(n)})$	$c_{f\,(n+1)}$	Error
0.00600	-1.73487	1220.829	0.00742	0.00142
0.00742	-0.24825	899.350	0.00770	0.00028
0.00770	-0.00643	853.452	0.00770	$7.53*10^{-06}$
0.00770	$-4.50*10^{-06}$	852.256	0.00770	$5.28*10^{-09}$
0.00770	$-2.21*10^{-12}$	852.255	**0.00770**	$2.60*10^{-15}$

- Para Re = 10^5:

$c_{f\,(n)}$	$f(c_{f\,(n)})$	$f'(c_{f\,(n)})$	$c_{f\,(n+1)}$	Error
0.00300	-3.67888	3332.903	0.00410	0.00110
0.00410	-0.75902	2113.907	0.00446	0.00036
0.00446	-0.04492	1872.003	0.00449	$2.39*10^{-05}$
0.00449	-0.00017	1857.524	0.00449	$9.37*10^{-08}$
0.00449	$-2.63*10^{-09}$	1857.468	0.00449	$1.41*10^{-12}$
0.00449	$1.77*10^{-15}$	1857.468	**0.00449**	$8.67*10^{-19}$

- Para Re = 10^6:

$c_{f\,(n)}$	$f(c_{f\,(n)})$	$f'(c_{f\,(n)})$	$c_{f\,(n+1)}$	Error
0.00100	-13.99354	16681.388	0.00184	0.00084
0.00184	-5.16057	6813.902	0.00260	0.00076
0.00260	-1.16657	4114.782	0.00288	0.00028
0.00288	-0.08531	3537.604	0.00290	$2.41*10^{-05}$
0.00290	-0.00052	3494.876	0.00290	$1.47*10^{-07}$
0.00290	$-1.91*10^{-08}$	3494.617	**0.00290**	$5.48*10^{-12}$

Problema 2:

Para un flujo estacionario de un fluido incompresible a través de un tubo rugoso de longitud *L* y diámetro interior *D*; la caída de presión viene expresado por la siguiente relación:

$$\Delta p = \frac{f_M\, \rho\, u_m^2\, L}{2\, D}\ ;$$

donde: ρ es la densidad del fluido, u_m es la velocidad media del fluido y f_M es el factor de fricción de Moody (adimensional).

El factor de fricción de Moody es una función de la rugosidad (ε) y del número de Reynolds, $Re = \frac{D\,\rho\,u_m}{\mu}$; siendo μ la viscosidad del fluido.

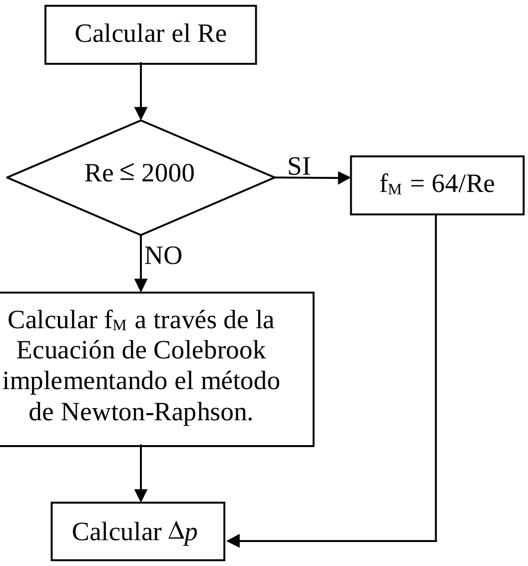
Para Re ≤ 2000, $f_M = \frac{64}{Re}$, mientras que para Re > 2000, f_M viene expresada por la Ecuación de Colebrook: $\sqrt{\frac{1}{f_M}} = -2 * Log_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3.7\,D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f_M}}\right)$.

Determinar la caída de presión Δp en el tubo para los siguientes casos:

	Caso 1	Caso 2
Q (gal/min)	170	4
D (pulg.)	3.068	0.622
L (pie)	10000	100
ρ (lb_m/pie^3)	62.4	80.2
μ (lb_m/pie seg)	0.0007	0.05
ε (pulg.)	0.002	0.005

Modelo de Resolución:

La lógica de cálculo ha emplear es la siguiente:



Para hallar el Δp en el caso de que el Re sea mayor a 2000, se utilizó nuevamente el método de Newton-Raphson, implementándolo en una planilla de cálculo. Para construirlo se hace de la misma forma que se muestra para el *Problema 1*, nada más que cambiando las ecuaciones en las columnas donde se iguala la función a cero, $f(x_n)$, y la primer derivada, $f'(x_n)$.

Un buen punto de arranque para inicializar el método iterativo se consigue a partir de la Ecuación de Blasius: $f_M = 0.316 * Re^{-0.25}$.

Cálculos para el Caso 1:

- $Q = 170$ gal/min $= 1.072*10^{-2}$ m^3/s
- $D = 3.068$ pulg $= 7.792*10^{-2}$ m
- $L = 10000$ pie $= 3048$ m
- $\rho = 62.4$ $lb_m/pie^3 = 999.552$ Kg/m^3
- $\mu = 0.0007$ lb_m/(pie*s) $= 1.041*10^{-3}$ Kg/(m*s)
- $\varepsilon = 0.002$ pulg $= 5.08*10^{-5}$ m

- $u_m = Q/Sección = 4*Q/(\pi*D^2) = 2.2488$ m/s
- Re = 168194.049 $\Rightarrow$ Régimen Turbulento
- Punto de arranque para el f_M según la Ecuación de Blasius = 0.015604
- Cálculo del f_M utilizando el Método de Newton-Raphson:

f_M (*n*)	*f*(*x*)	*f* '(*x*)	f_M (*n*+1)	Error
0.015604	-0.94701	255.612	0.019309	0.00370
0.019309	-0.10192	187.653	0.019852	0.00054
0.019852	0.00175	180.228	0.019842	0.00001
0.019842	-0.00007	180.356	0.019843	0.00000
0.019843	0.00000	180.351	**0.019843**	0.00000

- f_M = 0.019843
- **Δp = 1961740.328 Nw/m^2 = 20.017 Kg/cm^2 = 284.652 psi**

Cálculos para el Caso 2:

- Q = 4 gal/min = 2.523*10^{-4} m^3/s
- D = 0.622 pulg = 1.579*10^{-2} m
- L = 100 pie = 30.48 m
- ρ = 80.2 lb$_m$/pie^3 = 1284.68 Kg/m^3
- μ = 0.05 lb$_m$/(pie*s) = 7.44*10^{-2} Kg/(m*s)
- ε = 0.005 pulg = 1.27*10^{-5} m

- u_m = Q/Sección = 4*Q/(π*D^2) = 1.2873 m/s
- Re = 351.29 $\Rightarrow$ Régimen Laminar
- f_M = 0.182185
- **Δp = 370109.68 Nw/m^2 = 3.776 Kg/cm^2 = 53.703 psi**