UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL ROSARIO
Departamento de Ingeniería Química

Cátedra: Integración IV

Tema: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Alumnos: Damián Matich, Marcos Bossi y Juan M. Pignani

Profesores: Dr. Nicolás Scenna, Dr. Alejandro Santa Cruz y Dra. Sonia Benz

Año de cursado: 1999

Problema 1:

Encontrar la solución del siguiente sistema problema de valores iniciales:

$$y' = \frac{1}{2}(1+t)y^2; \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo (0.0; 0.5) para t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5 mediante el método de Euler-Gauss. Calcular el error relativo comparando con la solución exacta.

Algoritmo:

El método de Euler es un método explícito de resolución de EDO's, que avanza paso a paso en el tiempo en el tiempo sin utilizar métodos iterativos.

$$y = y(t_0) + h * f\left[t_i, y(t_0)\right]$$

Para efectuar la integración general entre t_i y t_{i+1}, el algoritmo se expresa a través de la siguiente ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + h * f(t_i, y_i)$$

donde h es el paso de integración.

El método modificado de Euler, que se conoce con el nombre de Euler-Guass incluye una etapa correctora para acelerar la convergencia:

$$\begin{aligned} y_i^c &= y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i-1}, y_{i-1})\right) \Rightarrow \text{ etapa correctora} \\ y_{i+1}^p &= y_i^c + h * f(t_i, y_i^c) \qquad \Rightarrow \text{ etapa predictiva} \end{aligned}$$

El valor de y_i utilizado en cada intervalo, excepto el primero donde $y_0 = y(t_0)$ es inexacto, siendo el resultado de cálculos previos, los cuales involucran los errores de truncamiento acumulados en la etapa anterior.

Resolución:

$$f(t_i, y_i) = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(1+t)y^2$$
$$t = [0.0; 0.5], \quad \text{con } h = 0.1$$

Integrando $f(t_i, y_i)$ obtenemos: $y(t_i) = \dfrac{-4}{(1+t)^2 + 4C}$, que por la condición inicial $C = -\dfrac{5}{4} \Rightarrow$ $y(t_i) = \dfrac{-4}{(1+t)^2 - 5}$.

El algoritmo se implementó en una planilla de cálculo Excel como se muestra a continuación:

	A	B	C	D	E	F
	t_i	y_i	$f(t_i, y_i)$	y_i^c	$y(t_i)$	**Error relativo**
1	$t_{inicial}$	$y_i = y(t_0)$	dy_i/dt_i	-	y_i	0
2	0.1+A1	B1+0.1*C1	0.5*(1+A2)*B2^2	B1+(0.1/2)*(C1+C2)	(-4)/((1+A2)^2-5)	(ABS(D2-E2)/E2)*100
3	0.1+A2	D2+0.1*C2	0.5*(1+A3)*B3^2	B2+(0.1/2)*(C2+C3)	(-4)/((1+A3)^2-5)	(ABS(D3-E3)/E3)*100
4	0.1+A3	D3+0.1*C3	0.5*(1+A4)*B4^2	B3+(0.1/2)*(C3+C4)	(-4)/((1+A4)^2-5)	(ABS(D4-E4)/E4)*100

Cálculos:

t_i	y_i	$f(t_i, y_i)$	y_i^c	$y(t_i)$	**Error relativo**
0.0	1.0000	0.5000	-	1.0000	0.0000
0.1	1.0500	0.6064	1.0553	1.0554	0.0085
0.2	1.1160	0.7472	1.1177	1.1236	0.5265
0.3	1.1924	0.9242	1.1995	1.2085	0.7392
0.4	1.2919	1.1684	1.2970	1.3158	1.4258
0.5	1.4139	1.4993	1.4253	1.4545	2.0088

Problema 2:

Resolver el problema anterior mediante el método de Runge-Kutta de 4to orden. Evaluar el error relativo y comparar los resultado para ambos métodos.

Algoritmo:

La solución de una EDO por expansión directa en series de Taylor de la función objetivo no es práctica si se necesita retener derivadas de orden superior, ya que, con excepción de los casos más simples, las derivadas de orden superior que se necesitan conservar son bastante complejas.

El método de Runge-Kutta es un método de simple paso que involucra la evaluación de derivadas de primer orden y que produce resultados equivalentes en seguridad a las fórmulas de Taylor de orden superior.

Todos los métodos de Runge-Kutta tienen algoritmos de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + h * \phi(t_i, y_i, h)$$

donde ϕ representa una aproximación adecuada a $f(t, y)$ sobre el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. La función ϕ recibe el nombre de *función incremento.*

Método de Runge-Kutta de 4to orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(a\,k_1 + b\,k_2 + c\,k_3 + d\,k_4)$$

donde: k_1, k_2, k_3 y k_4 son valores aproximados de la derivada, calculados en el intervalo $t_i \le t \le t_{i+1}$. Se utilizan diversos algoritmos de 4to orden. El siguiente se le atribuye a Kutta:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_i + h,\ y_i + h\,k_3)$$

Resolución:

El algoritmo se implementó en una planilla de cálculo Excel como se muestra a continuación:

	A	B	C	D	E	F	G	H
	t_i	$h*k_1$	$h*k_2$	$h*k_3$	$h*k_4$	y_i	$y(t_i)$	**Error relativo**
1	$t_{inicial}$	-	-	-	-	$y_i = y(t_0)$	y_i	0
2	0.1+A1	0.1*(0.5*(1+A1)*F1^2)	0.1*(0.5*(1+(A1+0.1/2))*(F1+B2/2)^2)	0.1*(0.5*(1+(A1+0.5*0.1))*(F1+0.5*C2)^2)	0.1*(0.5*(1+(A1+0.1))*(F1+D2)^2)	F1+(1/6)*(B2+2*C2+2*D2+E2)	-4/(((1+A2)^2) -5)	(ABS(F2-G2))/G2
3	0.1+A2	0.1*(0.5*(1+A2)*F2^2)	0.1*(0.5*(1+(A2+0.1/2))*(F2+B3/2)^2)	0.1*(0.5*(1+(A2+0.5*0.1))*(F2+0.5*C3)^2)	0.1*(0.5*(1+(A2+0.1))*(F2+D3)^2)	F2+(1/6)*(B3+2*C3+2*D3+E3)	-4/(((1+A3)^2) -5)	(ABS(F3-G3))/G3
4	0.1+A3	0.1*(0.5*(1+A3)*F3^2)	0.1*(0.5*(1+(A3+0.1/2))*(F3+B4/2)^2)	0.1*(0.5*(1+(A3+0.5*0.1))*(F3+0.5*C4)^2)	0.1*(0.5*(1+(A3+0.1))*(F3+D4)^2)	F3+(1/6)*(B4+2*C4+2*D4+E4)	-4/(((1+A4)^2) -5)	(ABS(F4-G4))/G4
5	0.1+A4	0.1*(0.5*(1+A4)*F4^2)	0.1*(0.5*(1+(A4+0.1/2))*(F4+B5/2)^2)	0.1*(0.5*(1+(A4+0.5*0.1))*(F4+0.5*C5)^2)	0.1*(0.5*(1+(A4+0.1))*(F4+D5)^2)	F4+(1/6)*(B5+2*C5+2*D5+E5)	-4/(((1+A5)^2) -5)	(ABS(F5-G5))/G5

Cálculos:

t_i	$h*k_1$	$h*k_2$	$h*k_3$	$h*k_4$	y_i	$y(t_i)$	**Error relativo**
0.0	-	-	-	-	1.0000	1.0000	0.0000
0.1	0.0500	0.0552	0.0554	0.0613	1.0554	1.0554	$2.8801*10^{-08}$
0.2	0.0613	0.0678	0.0682	0.0758	1.1236	1.1236	$5.8742*10^{-08}$
0.3	0.0757	0.0843	0.0849	0.0949	1.2085	1.2085	$7.7055*10^{-08}$
0.4	0.0949	0.1065	0.1075	0.1212	1.3158	1.3158	$4.5617*10^{-08}$
0.5	0.1212	0.1373	0.1390	0.1587	1.4545	1.4545	$1.4646*10^{-07}$

Comparación entre los resultados obtenidos en el Problema 1 y en el Problema 2:

	y_i		Error relativo	
t_i	**Euler-Gauss**	**Runge-Kutta**	**Euler-Gauss**	**Runge-Kutta**
0.0	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.1	1.0553	1.0554	0.0085	$2.8801*10^{-08}$
0.2	1.1177	1.1236	0.5265	$5.8742*10^{-08}$
0.3	1.1995	1.2085	0.7392	$7.7055*10^{-08}$
0.4	1.2970	1.3158	1.4258	$4.5617*10^{-08}$
0.5	1.4253	1.4545	2.0088	$1.4646*10^{-07}$

Como se puede observar el método de Runge-Kutta presenta en todo momento un error relativo considerablemente menor con respecto al método de Euler-Gauss.