

Integración IV

Modelado individual de equipos en estado dinámico (I)

2022

Profesor: Dr. Nicolás J. Scenna
JTP: Dr. Néstor H. Rodríguez
Aux. 1ra: Dr. Juan I. Manassaldi

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si $y = f(x)$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la
variable dependiente
respecto de la independiente

La denominación de “ordinaria” se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Introducción

Expresión implícita:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$$

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^n\right) = 0$$

Orden: máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Grado: grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Lineal: la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

No Lineal: la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^n\right) = 0$$

Diremos que una función $y: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada n -ésima de y en todo punto del intervalo $[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

Introducción

Para encontrar $y(x)$ (solución) es necesario efectuar n integraciones, lo cual implica que deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1} \end{array} \right.$$

Introducción

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

Balance de materia en sistemas dinámicos

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Flujo de masa que} \\ \text{ingresa al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Flujo de masa que} \\ \text{abandona el sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de variación} \\ \text{de la masa dentro del sistema} \end{array} \right]$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo 

- La ecuación de diseño en estado estacionario que estamos acostumbrados a usar dice que "lo que entra, sale".
- La versión dinámica dice lo mismo con la adición de la palabra "eventualmente".
- El lado derecho será una derivada parcial o una derivada ordinaria de la masa dentro del sistema con respecto a la variable independiente tiempo (t).

Balance de materia en sistemas dinámicos

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{ingresa al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de masa que} \\ \text{abandona el sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de la masa dentro del sistema} \end{array} \right]$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo 

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que ingresan al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de moles} \\ \text{del componente i} \\ \text{que abandonan el sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de formación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{por reacción química} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{velocidad de variación} \\ \text{de moles del componente i} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right]$$

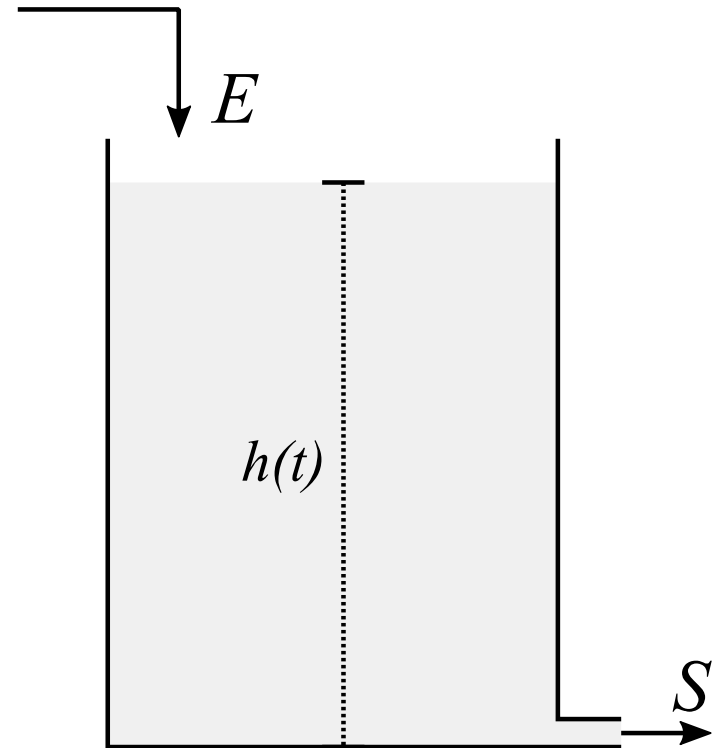
Las unidad de esta ecuación es moles/tiempo 

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

- Balance de materia en el tanque: **Acumulación = Entrada – Salida**

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

$M \rightarrow$ Masa de fluido dentro del tanque
 $m_e \rightarrow$ Flujo masico de entrada de fluido
 $m_s \rightarrow$ Flujo masico de salida de fluido

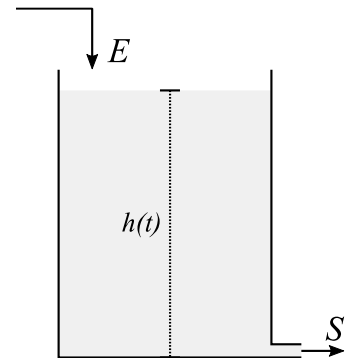
$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{d \rho A_T h}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

¡Fácilmente medible!

ρ cte

A_T cte



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$$m_e = \rho E \quad E \rightarrow \text{Caudal volumetrico de entrada}$$

$$m_s = \rho S \quad S \rightarrow \text{Caudal volumetrico de salida}$$

$$m_s = \rho A_s v_s \quad A_s \rightarrow \text{Area de salida del tanque}$$

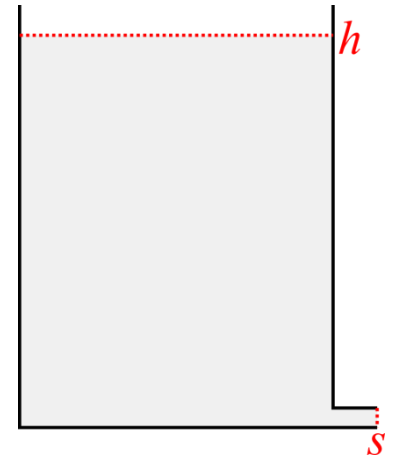
$$v_s \rightarrow \text{velocidad de salida del tanque}$$

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{v_h^2 \rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho gh = \frac{v_s^2 \rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho gh_s}$$

$v_h = 0$ $P_h = P_s$ $h_s = 0$

$$\rho gh = \frac{v_s^2 \rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Luego: $\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

EDO

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

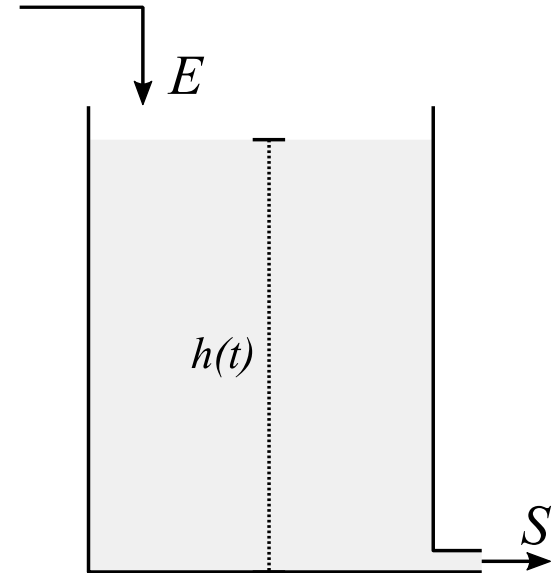
$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$t = 0 \rightarrow h = h_0$ (problema de valor inicial)

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Ejemplo practico:

- Vaciado del tanque ($E=0$)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos



$$A_T = \frac{\pi D_T^2}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_T \frac{dh}{dt} = -A_s \sqrt{2gh} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi D_T^2}{4} \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^2}{4} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^2}{D_T^2} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f_i(x, y_i) \Delta x$$

$x \rightarrow$ Variable independiente

$y \rightarrow$ Variable dependiente

$\Delta x \rightarrow$ Incremento o salto

$$\frac{dh}{dt} = - \underbrace{2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}}_{f(x,y)}$$

Diagrama de anotaciones:
Una flecha verde apunta desde el símbolo y en el denominador dh hacia el símbolo y en la expresión $f(x,y)$.
Otra flecha verde apunta desde el símbolo t en el denominador dt hacia el símbolo x en la expresión $f(x,y)$.

$$h_{i+1} = h_i + f(t_i, h_i) \Delta t$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

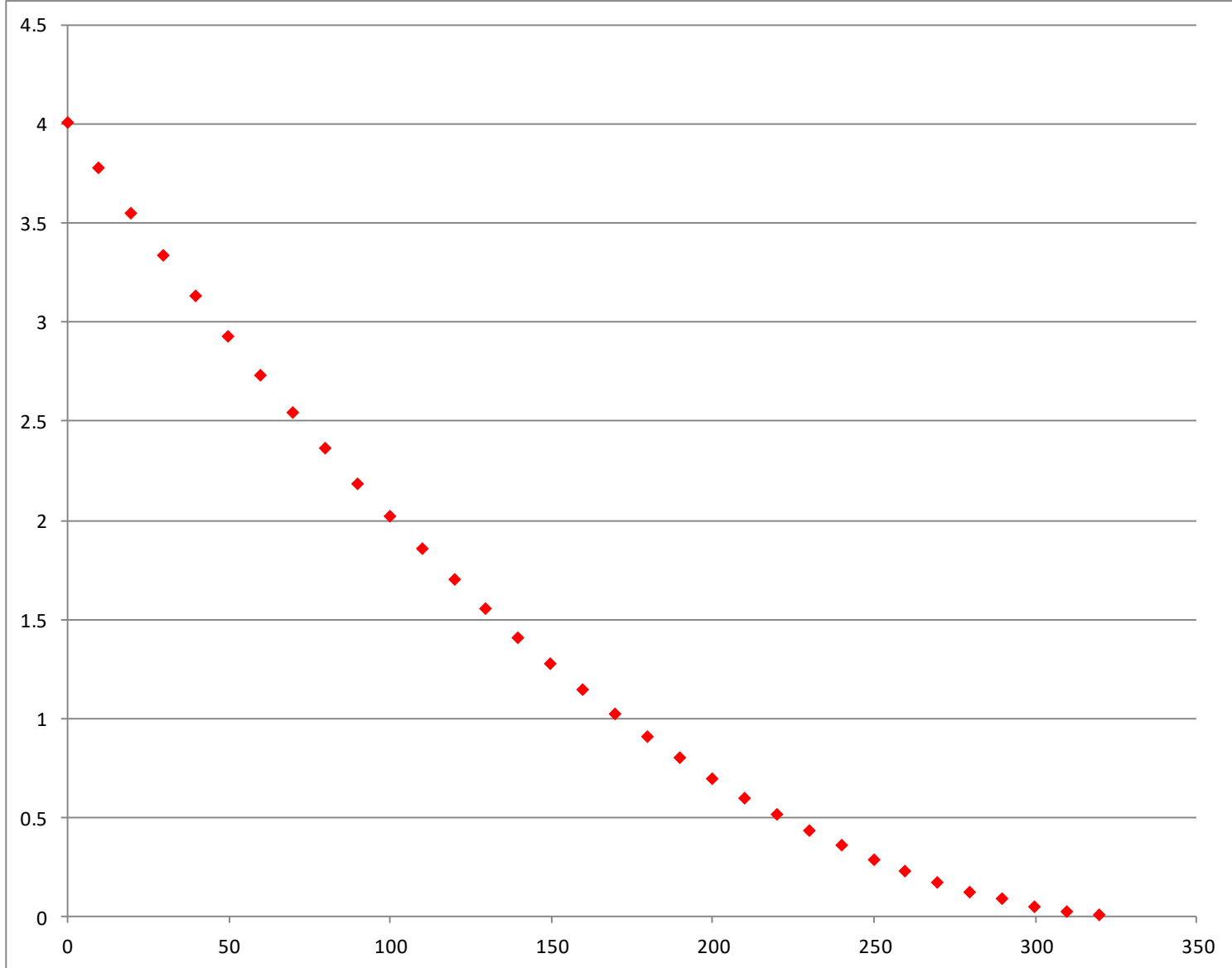
Solución Utilizando el método de Euler ($\Delta t = 10 \text{ seg}$):

i	t	h	f
0	0	4	-0.02284996
1	10	3.77150039	-0.02218771
2	20	3.54962326	-0.02152517
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
32	320	0.006625	-0.00092993

$$h_{i+1} = h_i + f(t_i, h_i) \Delta t$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

h [m]



t [s]

Método de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de 4to orden (mas difundido) corresponde a:

$$\Delta y = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1)$$

$$k_3 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_2)$$

$$k_4 = f(x_{i+1}, y_i + \Delta x k_3)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando Runge-Kutta de 4er orden :

$$\frac{dh}{dt} = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh} \rightarrow f(t, h) = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \varnothing \Delta t \quad \varnothing = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, h_i)$$

$$k_2 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2) \quad k_4 = f(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

i	t	h	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	4	-0.02284996	-0.022817305	-0.02281735	-0.0227847
1	1	3.97718267				

Ejemplo para $t=0$ ($i=0$) y $\Delta t=1$ seg:

$$f(t, h) = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$k_1 = f(t_i, h_i) \rightarrow k_1 = f(0, 4)$$

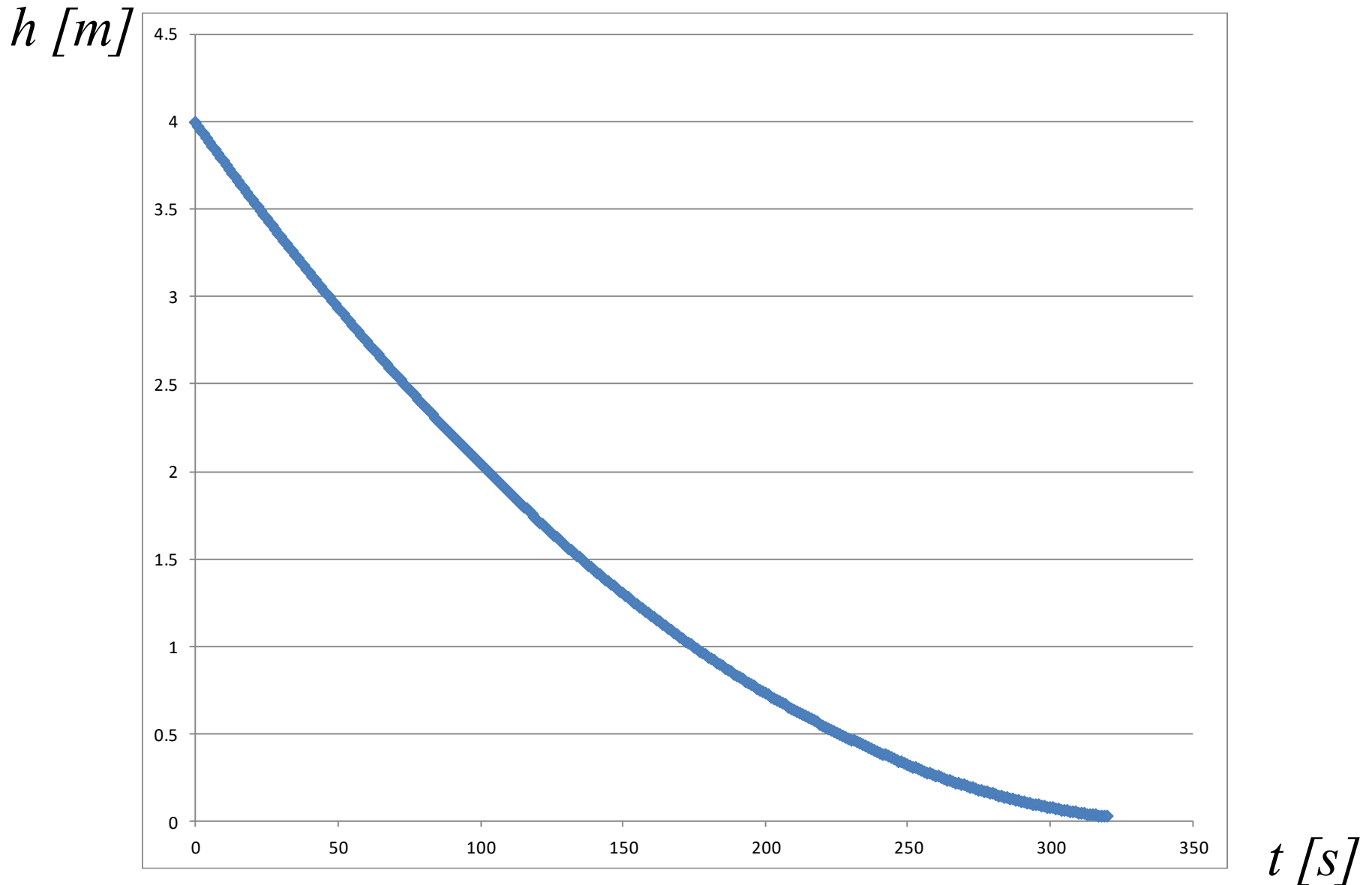
$$k_2 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1) \rightarrow k_2 = f(0.5, 4 + 0.5 \times 1 \times k_1)$$

$$k_3 = f(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2) \rightarrow k_3 = f(0.5, 4 + 0.5 \times 1 \times k_2)$$

$$k_4 = f(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3) \rightarrow k_4 = f(1, 4 + 1 \times k_3)$$

$$\begin{cases} \varnothing = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ h_1 = h_0 + \varnothing \Delta t \end{cases}$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Métodos Implícitos de Resolución de EDOs

- El avance se realiza paso a paso en el tiempo pero se realiza un proceso iterativo para dar por finalizado el paso.
- Métodos más difundidos:
 - Euler implícito
 - Euler-Gauss

Método Implícito de Euler

Algoritmo: $\underline{y_{i+1}} = y_i + f(\underline{x_{i+1}}, \underline{y_{i+1}}) \Delta x$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

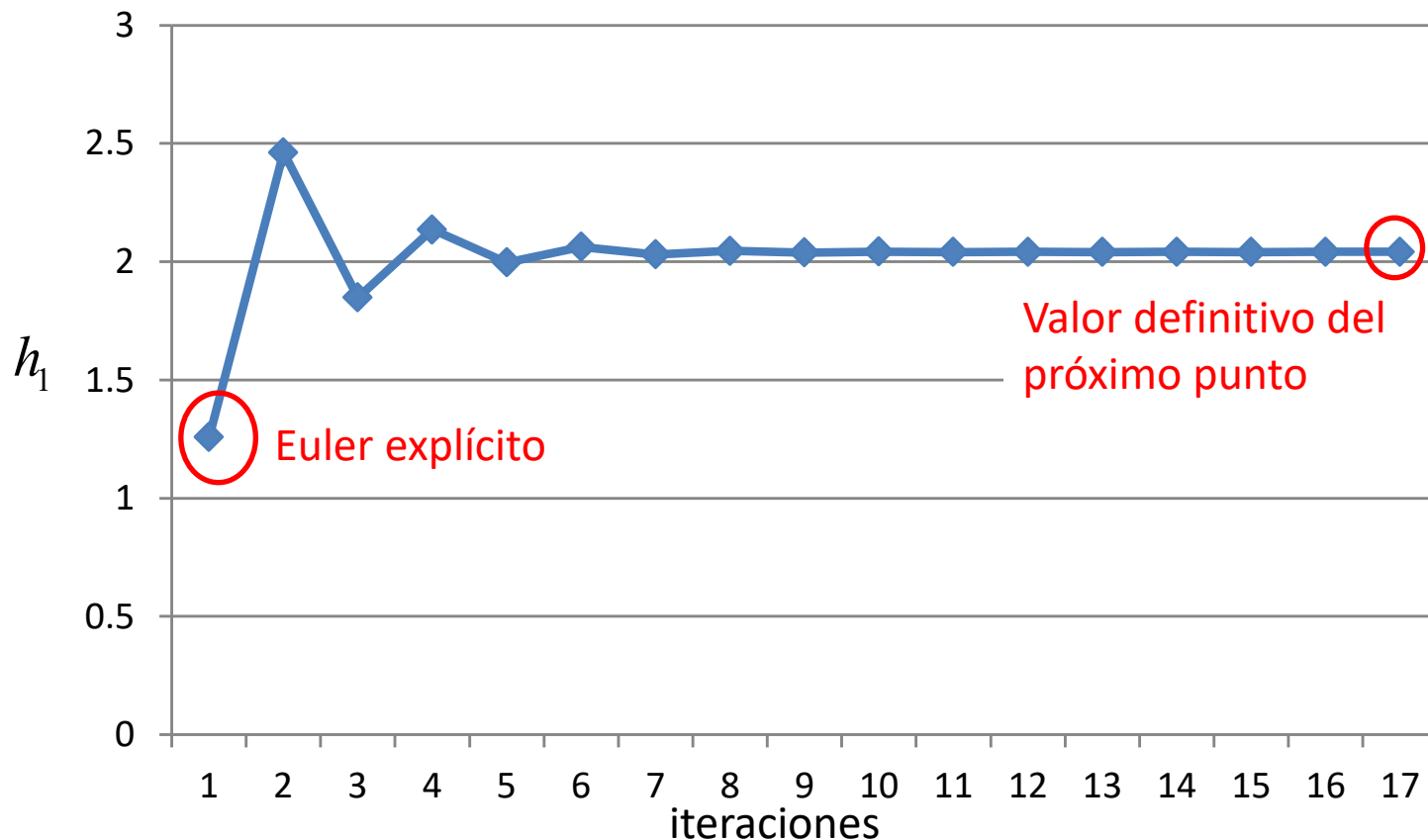
$$\frac{dh}{dt} = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh} \quad h_{i+1} = h_i + f_i(t_{i+1}, h_{i+1}) \Delta t$$

$$h_{i+1} = h_i - 2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh_{i+1}} \Delta t$$

Método Implícito de Euler

Ejemplo: $h_0 = 4\text{ m}$; $\Delta t = 120\text{ seg}$

$$h_1 = 4 - 2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2 \times 9.8 \times h_1} \times 120$$



Método Implícito de Euler-Gauss

Algoritmo:

$$\underline{y_{i+1}} = y_i + \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \underline{y_{i+1}}) \right]$$


Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

Análisis:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} \left[\boxed{y_i + f(x_i, y_i)} + \boxed{y_i + f(x_{i+1}, y_{i+1})} \right]$$

Euler explícito

Euler implícito

Modelos simples de válvulas

- Las válvulas de control son conceptualmente orificios de área variable.
- Se las puede considerar simplemente como una restricción que cambia su tamaño de acuerdo a un pedido por parte del controlador u operador.
- Al pasar un fluido por una restricción , la fórmula (para líquidos) que vincula el caudal con la diferencia de presión entre la entrada y la salida es:

$$Q = k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula

$\rho \rightarrow$ Densidad del fluido

$k \rightarrow$ Constante del orificio

$$Q = k' \sqrt{\frac{\Delta P^*}{G}}$$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido

Modelos simples de válvulas

- El predominio histórico de los fabricantes de válvulas en Estados Unidos ha llevado a que las características de las válvulas se den a menudo en unidades estadounidenses.
- Para gases suele utilizarse la misma ecuación pero utilizando la gravedad específica referenciada al aire y el caudal expresado de forma estándar.

$$Q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula [*US gpm*]

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula [*psi*]

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho/\rho_{60^\circ F}^{agua}$ [*adim*]

$C_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 °F

$$Q = K_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula [*m³/h*]

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula [*bar*]

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho/\rho_{60^\circ F}^{agua}$ [*adim*]

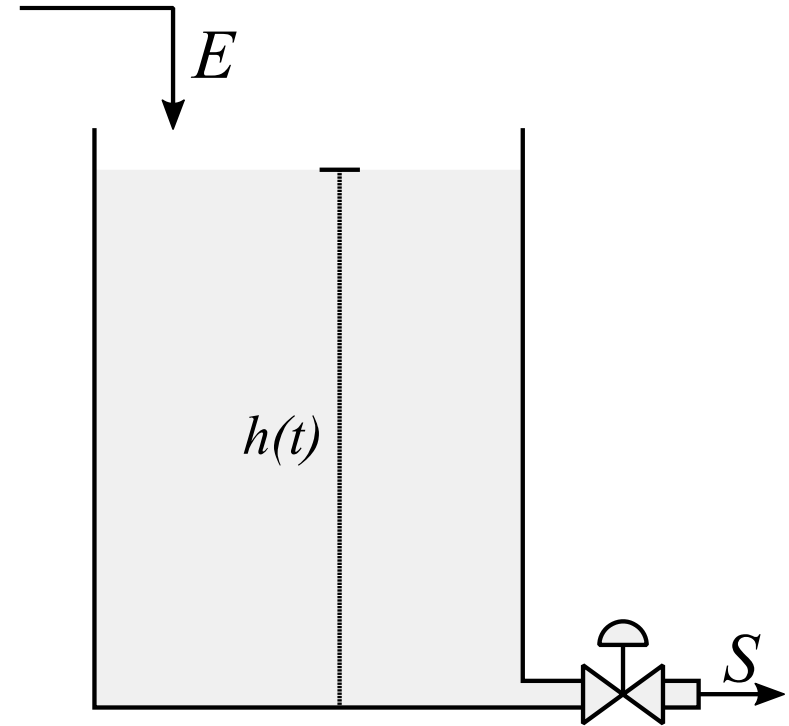
$K_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 °F

$$C_V = 1.15 K_V$$

Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s \quad M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

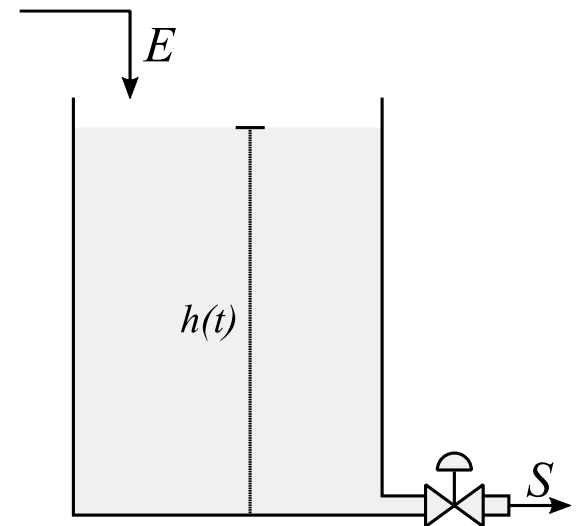
ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho S$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$



Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

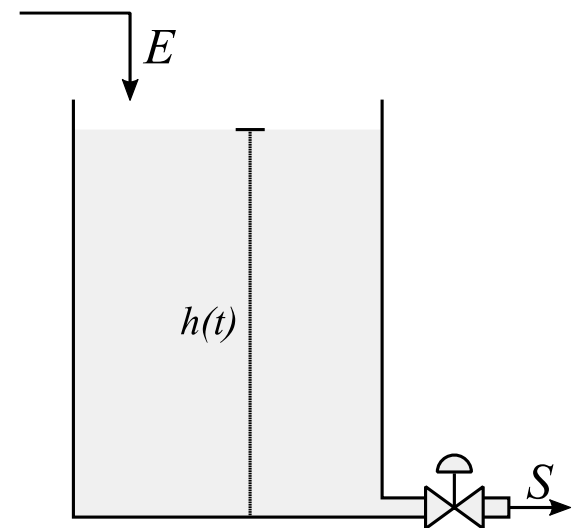
$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

$$S = C_v \sqrt{\Delta P_s / \rho} \rightarrow S = C_v \sqrt{(P_f - P)_s / \rho}$$

$$P_0 = P_s$$

$$S = C_v \sqrt{(\cancel{P_0} + \cancel{\rho gh} - \cancel{P_s})_s / \cancel{\rho}}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T} \sqrt{gh}$$



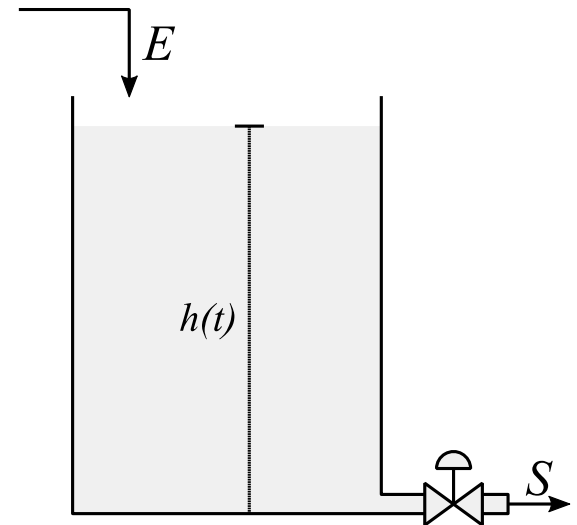
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Ejemplo practico:

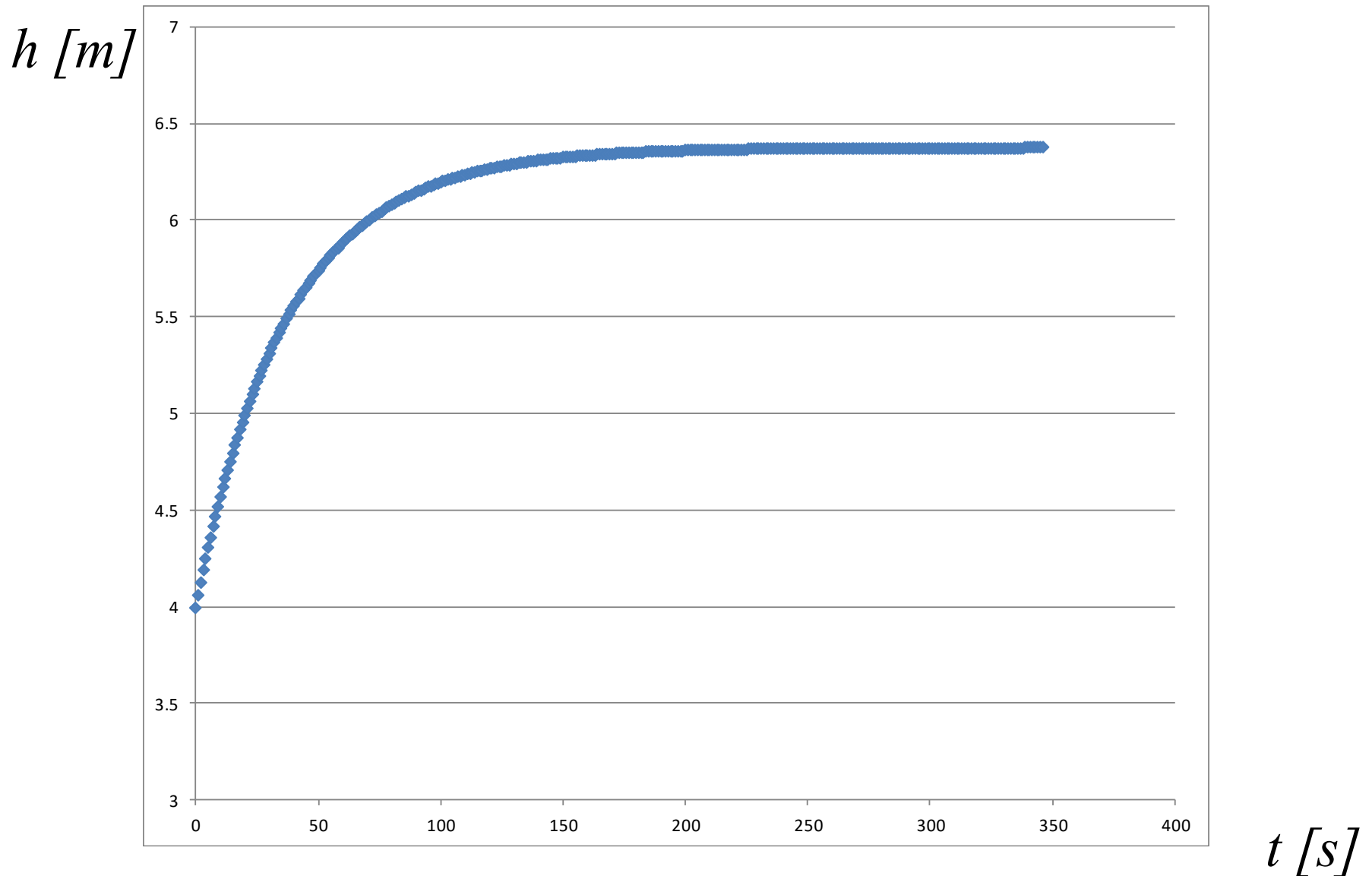
- Caudal de entrada ($E=0.25 \text{ m}^3/\text{seg}$)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_v de la válvula de descarga: 0.0316 m^2

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T} \sqrt{gh}$$

$$t = 0 \rightarrow h = 4 \text{ m}$$



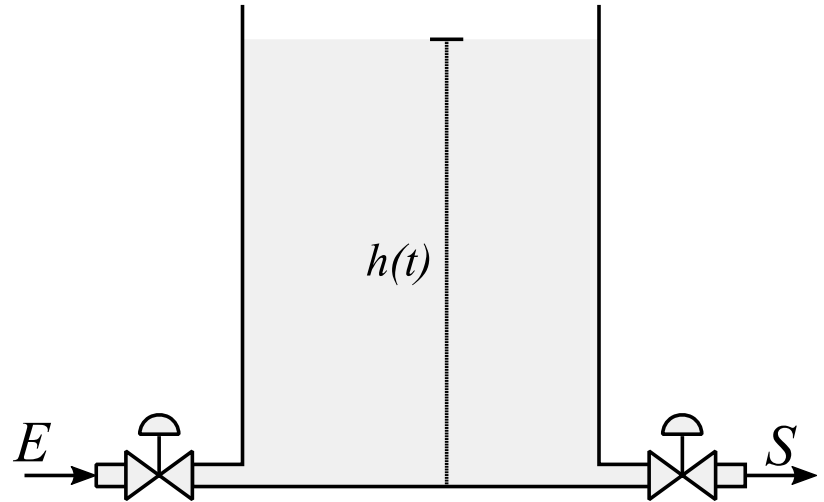
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas

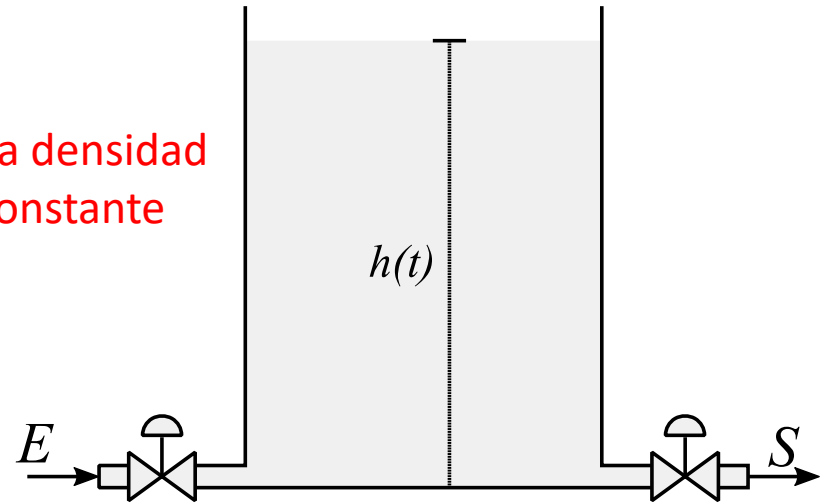


Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

- Balance de materia en el tanque:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

¡Cuidado!: Solo para densidad
y área transversal constante



$$E = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_f) / \rho}$$

$$S = C_{v2} \sqrt{(P_f - P_s) / \rho}$$

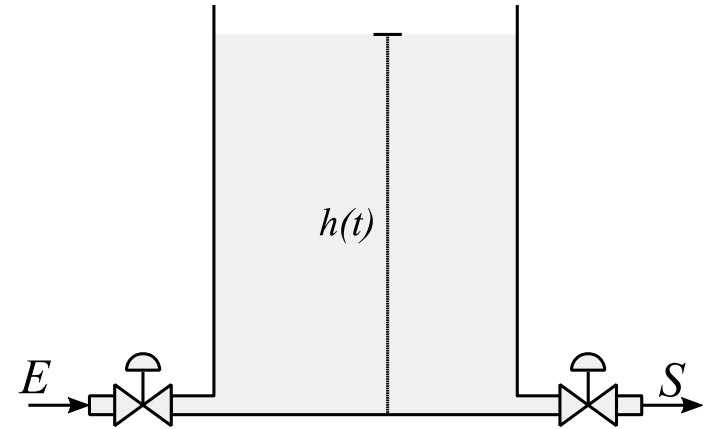
$$E = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_0 - \rho gh) / \rho} \quad S = C_{v2} \sqrt{(P_0 + \rho gh - P_s) / \rho}$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_0 - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_0 + \rho gh - P_s) / \rho}$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

Ejemplo practico:

- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m²
- Densidad del fluido: 1000 kg/m³
- Presión en la superficie del liquido $P_0 = 101325 \text{ Pa}$
- Presión de descarga igual a la superior del tanque ($P_s = P_0$)
- Presión de entrada: $P_E = 202650 \text{ Pa}$

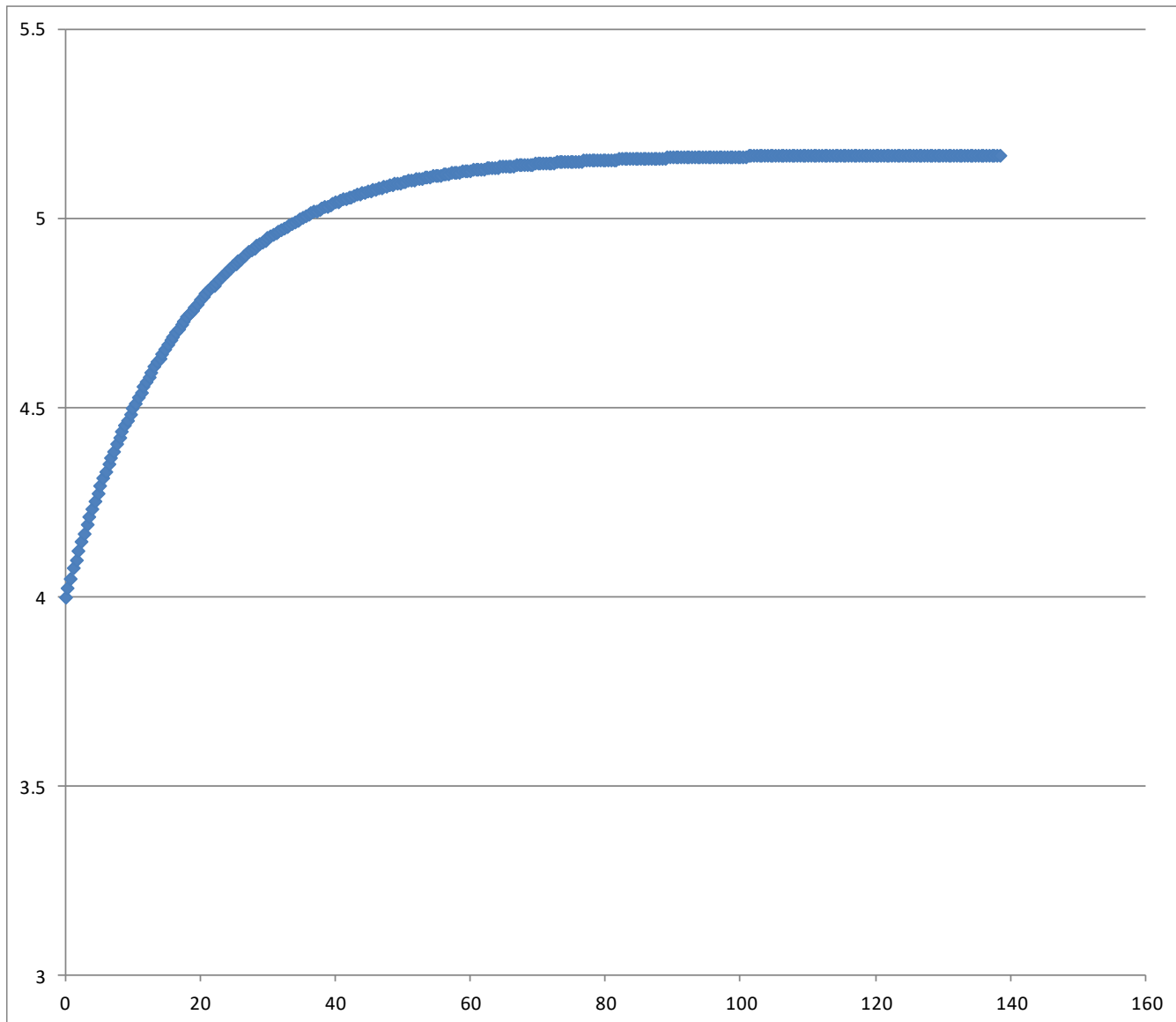


$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_0 - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_0 + \rho gh - P_s) / \rho}$$

$$t = 0 \rightarrow h = 4 \text{ m}$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

$h [m]$

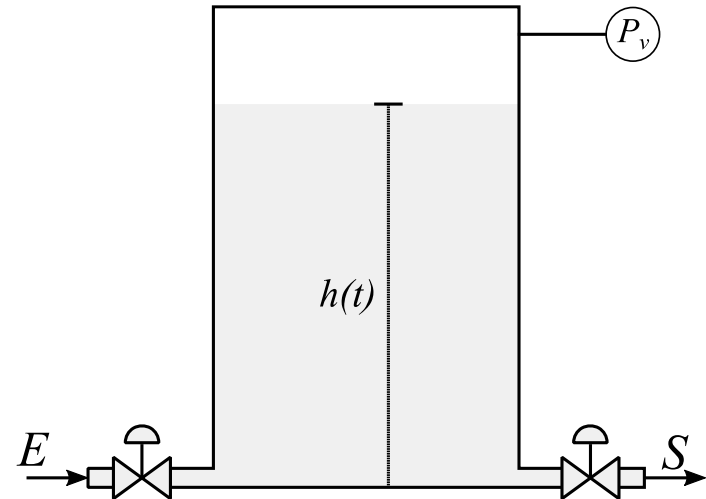


$t [s]$

Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- El vapor sobre el líquido se encuentra en equilibrio.
- Holdup de vapor despreciable

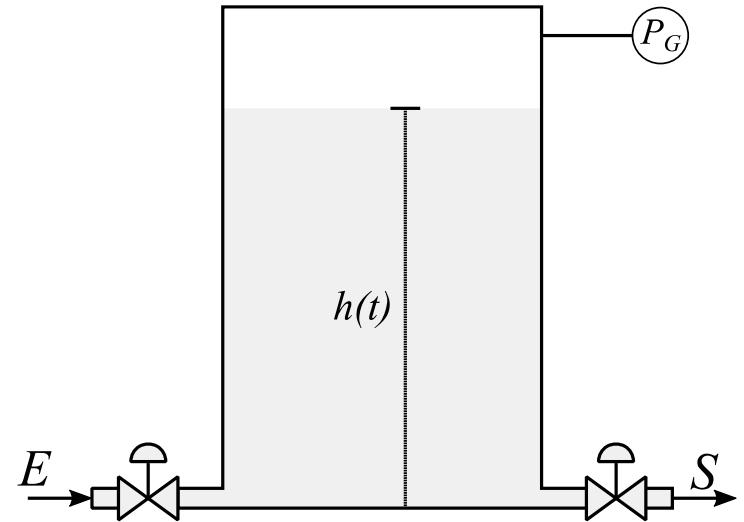


$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_v - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_v + \rho gh - P_s) / \rho}$$

Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- Holdup de vapor no despreciable y constante



Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{P_E - P_G - \rho gh / \rho} - C_{v2} \sqrt{P_G + \rho gh - P_s / \rho}$$

¡Varía con la altura!

$$M_G = \rho_G V_G \quad \text{Holdup del gas no despreciable y constante}$$

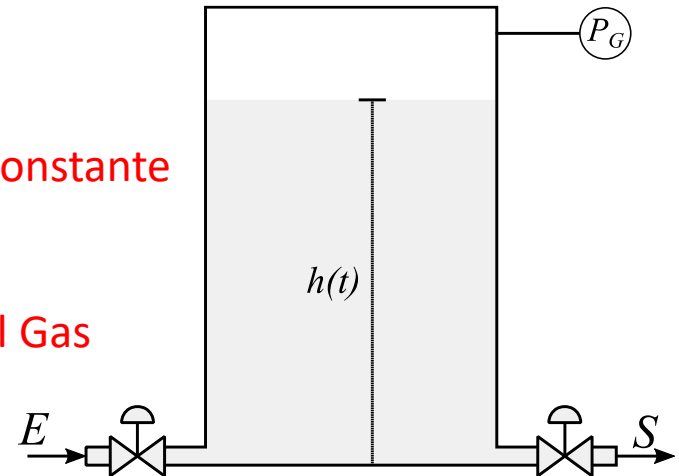
$$\rho_G = \frac{P_G}{R'T} \quad \text{Asumiendo comportamiento ideal del Gas}$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{R'T_G^0} = \frac{P_G V_G}{R'T_G}$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{T_G^0} = \frac{P_G V_G}{T_G} \quad \text{Se desprecia la variación de temperatura}$$

$$V_G = V_T - A_T h$$

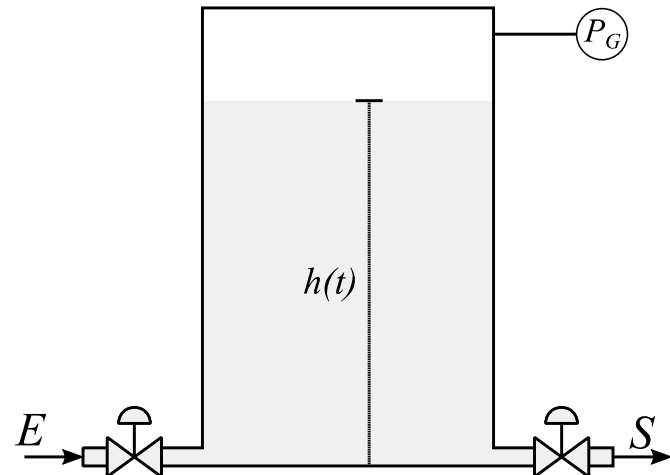
$$P_G = \frac{P_G^0 (V_T - A_T h^0)}{(V_T - A_T h)}$$



Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_G - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_G + \rho gh - P_s) / \rho}$$

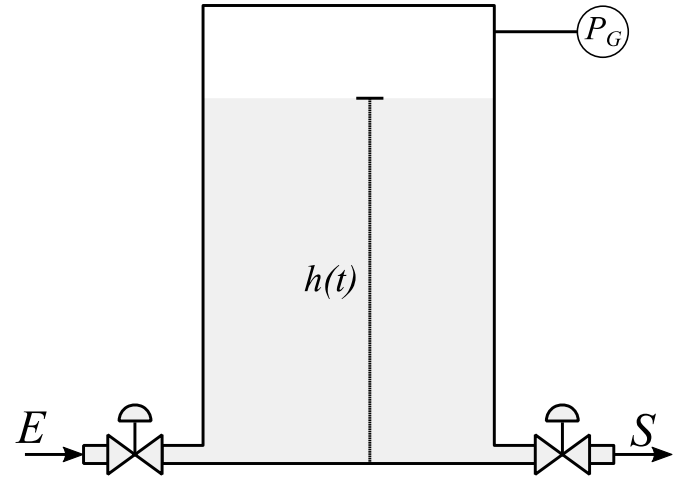
$$P_G = \frac{P_G^0 (V_T - A_T h^0)}{(V_T - A_T h)}$$



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

Ejemplo practico:

- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Altura del tanque: 10 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión de descarga : $P_s = 101325 \text{ Pa}$
- Presión de entrada: $P_E = 202650 \text{ Pa}$
- Presión inicial del gas: $P_G^0 = 101325 \text{ Pa}$

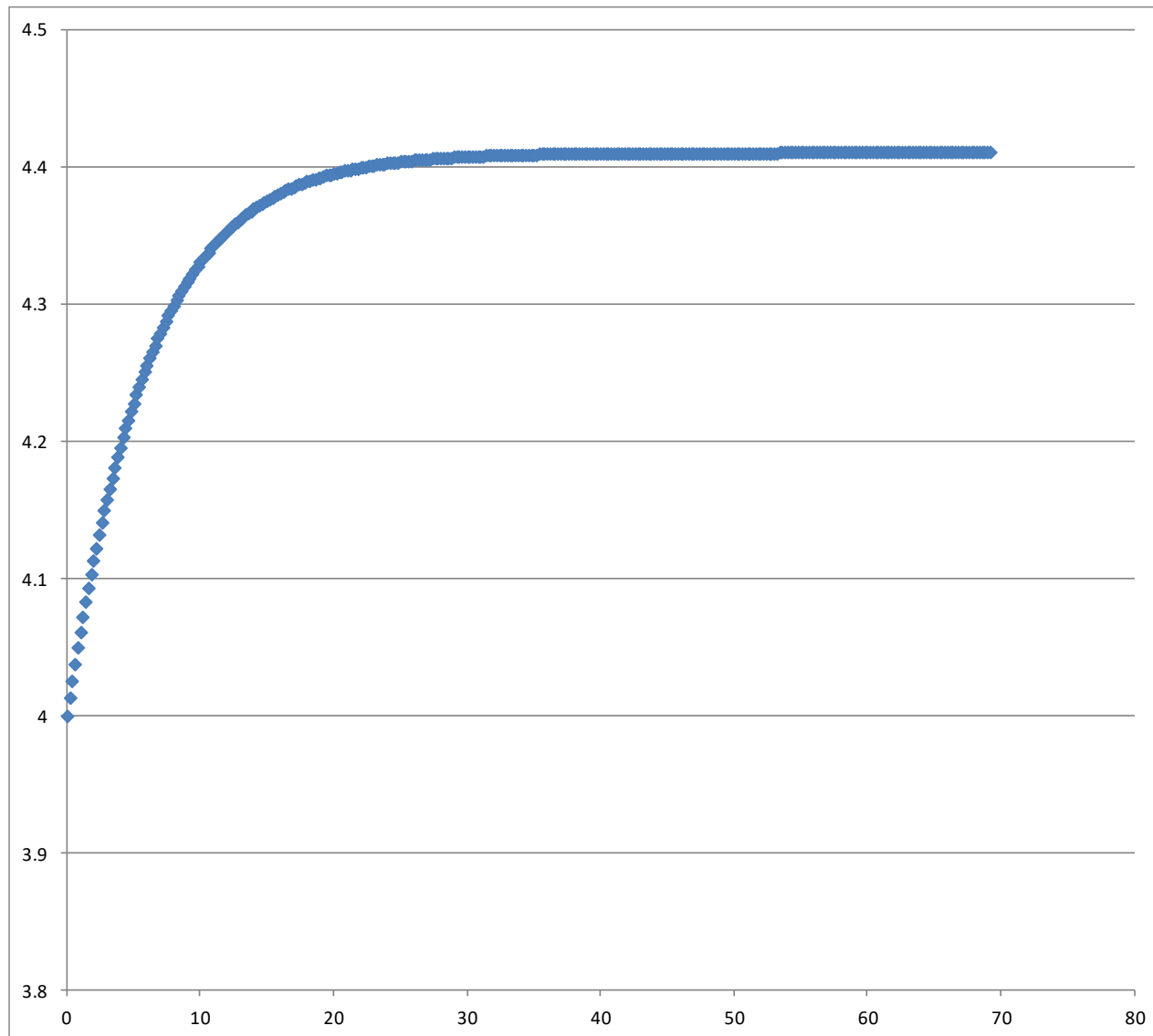


$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1} \sqrt{(P_E - P_G - \rho gh) / \rho} - C_{v2} \sqrt{(P_G + \rho gh - P_s) / \rho}$$

$$P_G = P_G^0 \left(V_T - A_T h^0 \right) / \left(V_T - A_T h \right)$$

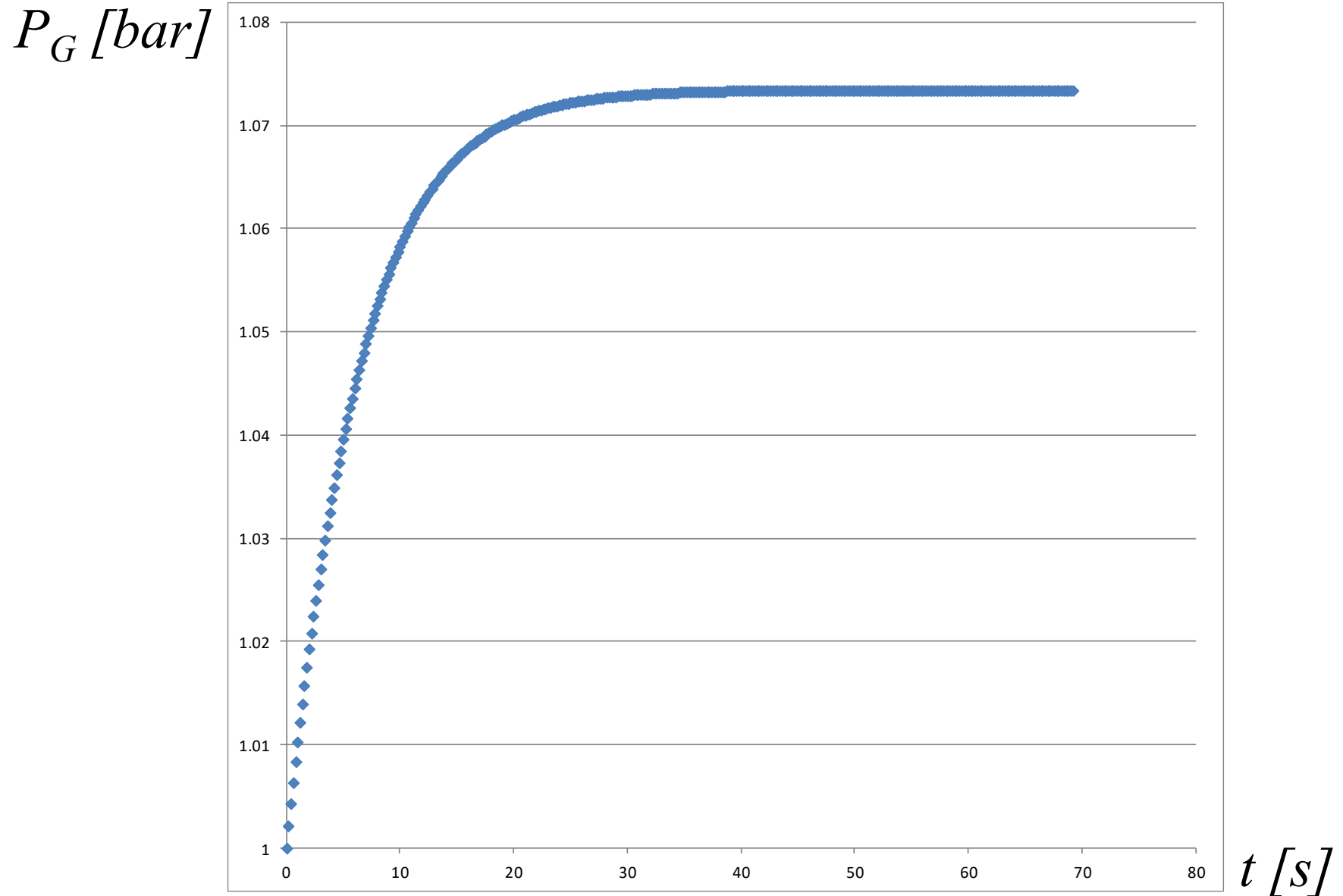
Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

$h [m]$



$t [s]$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Sistema de EDOs

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

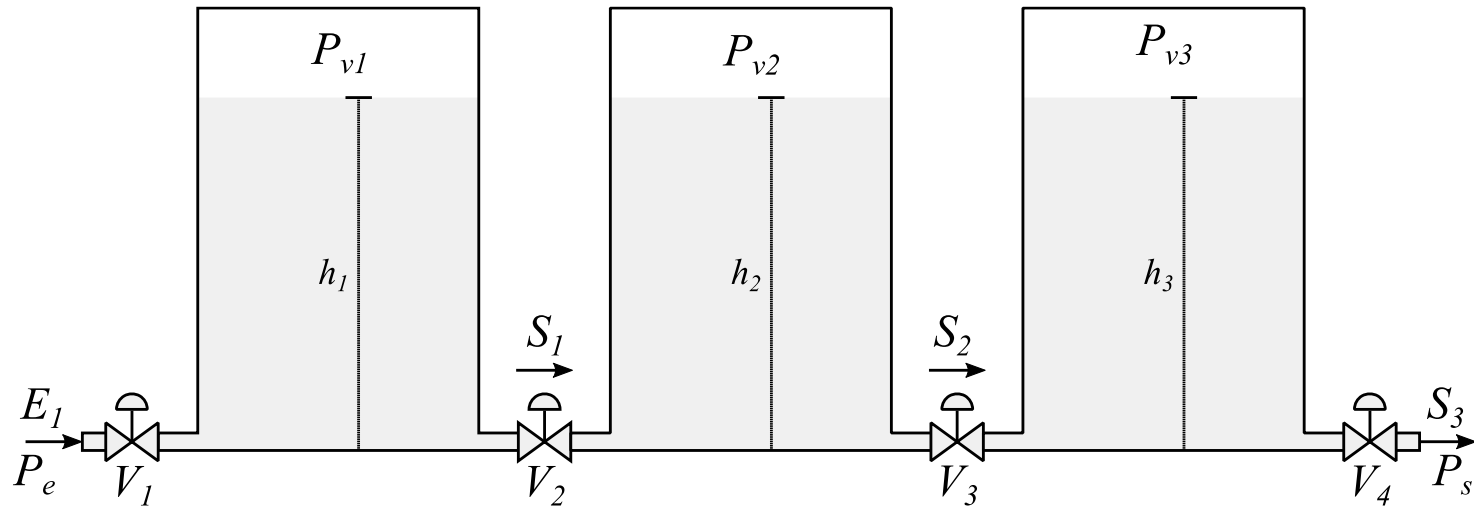
$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \\ F_2(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0 \end{cases}$$

Introducción

Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

Tanques en serie



$$\frac{dM_1}{dt} = m_{e1} - m_{s1} \xrightarrow{\text{pcte}} A_{T_1} \frac{dh_1}{dt} = E_1 - S_1$$

$$\frac{dM_2}{dt} = m_{e2} - m_{s2} \xrightarrow{\text{pcte}} A_{T_2} \frac{dh_2}{dt} = S_1 - S_2$$

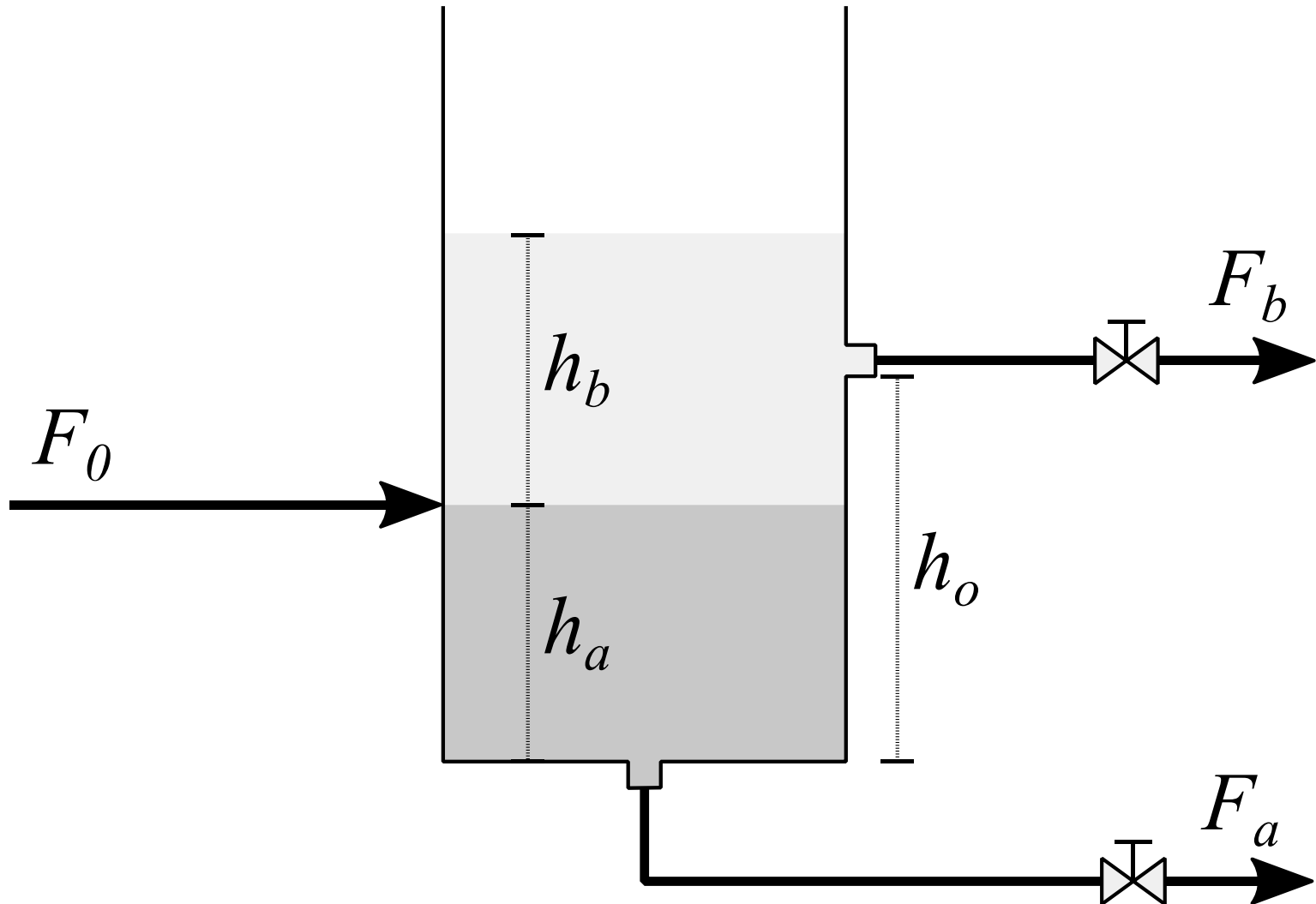
$$\frac{dM_3}{dt} = m_{e3} - m_{s3} \xrightarrow{\text{pcte}} A_{T_3} \frac{dh_3}{dt} = S_2 - S_3$$

$$A_{T_1} \frac{dh_1}{dt} = E_1 - S_1$$

$$A_{T_2} \frac{dh_2}{dt} = S_1 - S_2$$

$$A_{T_3} \frac{dh_3}{dt} = S_2 - S_3$$

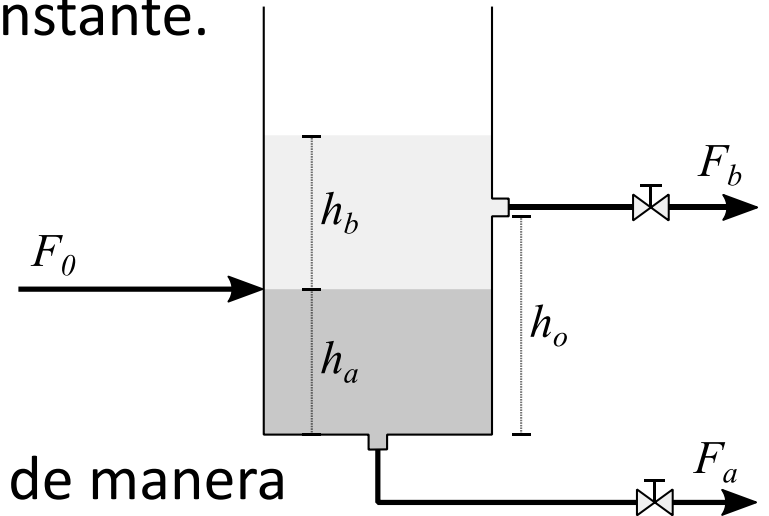
Ejemplo: Decantador con válvulas manuales



Ejemplo: Decantador con válvulas manuales

Hipótesis

- Sistema adiabático.
- La densidad de ambos fluidos es constante.
- No hay reacción química.
- Tanque cilíndrico.
- Presiones de salida conocidas.
- Caudal de alimentación constante.
- El equilibrio entre fases se produce de manera instantánea.
- Las válvulas se operan de manera manual y son del tipo on/off
- Líquidos perfectamente inmiscibles



Ejemplo: Decantador con válvulas manuales

- Balance de materia por componentes en el tanque:

$$\frac{dM_a}{dt} = m_{ea} - m_{sa}$$

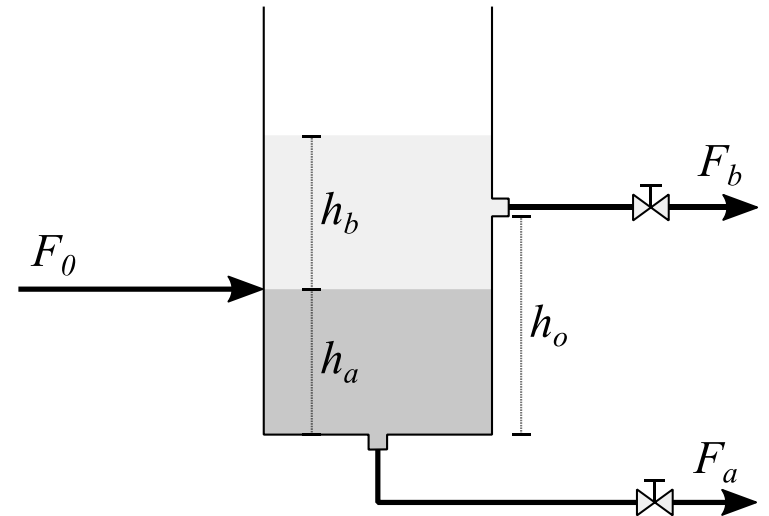
variación entra sale

$$\frac{d\rho_a A_T h_a}{dt} = \rho_a F_0 w_a - \rho_a F_a$$

Fracción en volumen

$$A_T \frac{dh_a}{dt} = F_0 w_a - F_a$$

$$A_T \frac{dh_b}{dt} = F_0 w_b - F_b$$



Ejemplo: Decantador con válvulas manuales

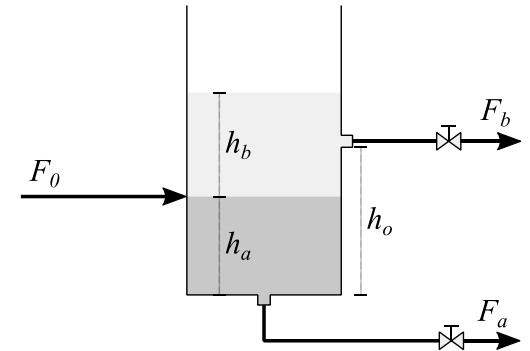
- Caudales de salida (válvulas abiertas):

$$F_a = C v_a \sqrt{\frac{\Delta P_a}{\rho_a}} \rightarrow \Delta P_a = P_0 + \rho_a g h_a + \rho_b g h_b - P_0$$

Suponemos presión de descarga idéntica a la superior

$$F_a = C v_a \sqrt{\frac{\rho_a g h_a + \rho_b g h_b}{\rho_a}}$$

$$F_a = C v_a \sqrt{g h_a + r g h_b} \leftarrow r = \frac{\rho_b}{\rho_a}$$



$$F_b = C v_b \sqrt{\frac{\Delta P_b}{\rho_b}} \rightarrow \Delta P_b = P_0 + \rho_b g (h_a + h_b - h_o) - P_0$$

$$F_b = C v_b \sqrt{\frac{\rho_b g (h_a + h_b - h_o)}{\rho_b}}$$

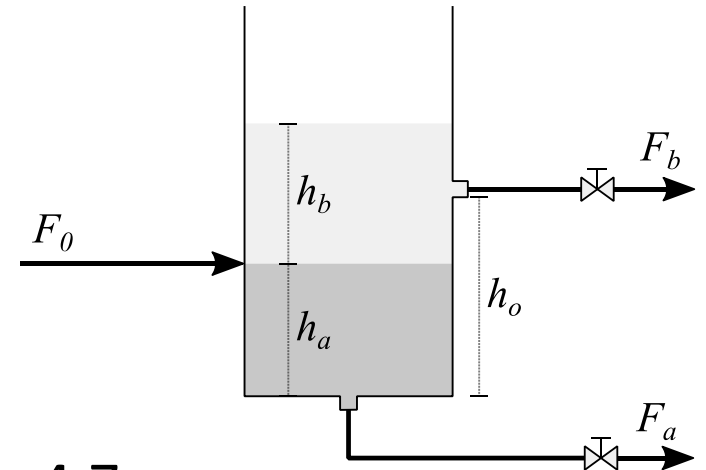
$$F_b = C v_b \sqrt{g (h_a + h_b - h_o)}$$

Ejemplo: Operación de un decantador

Ejemplo practico:

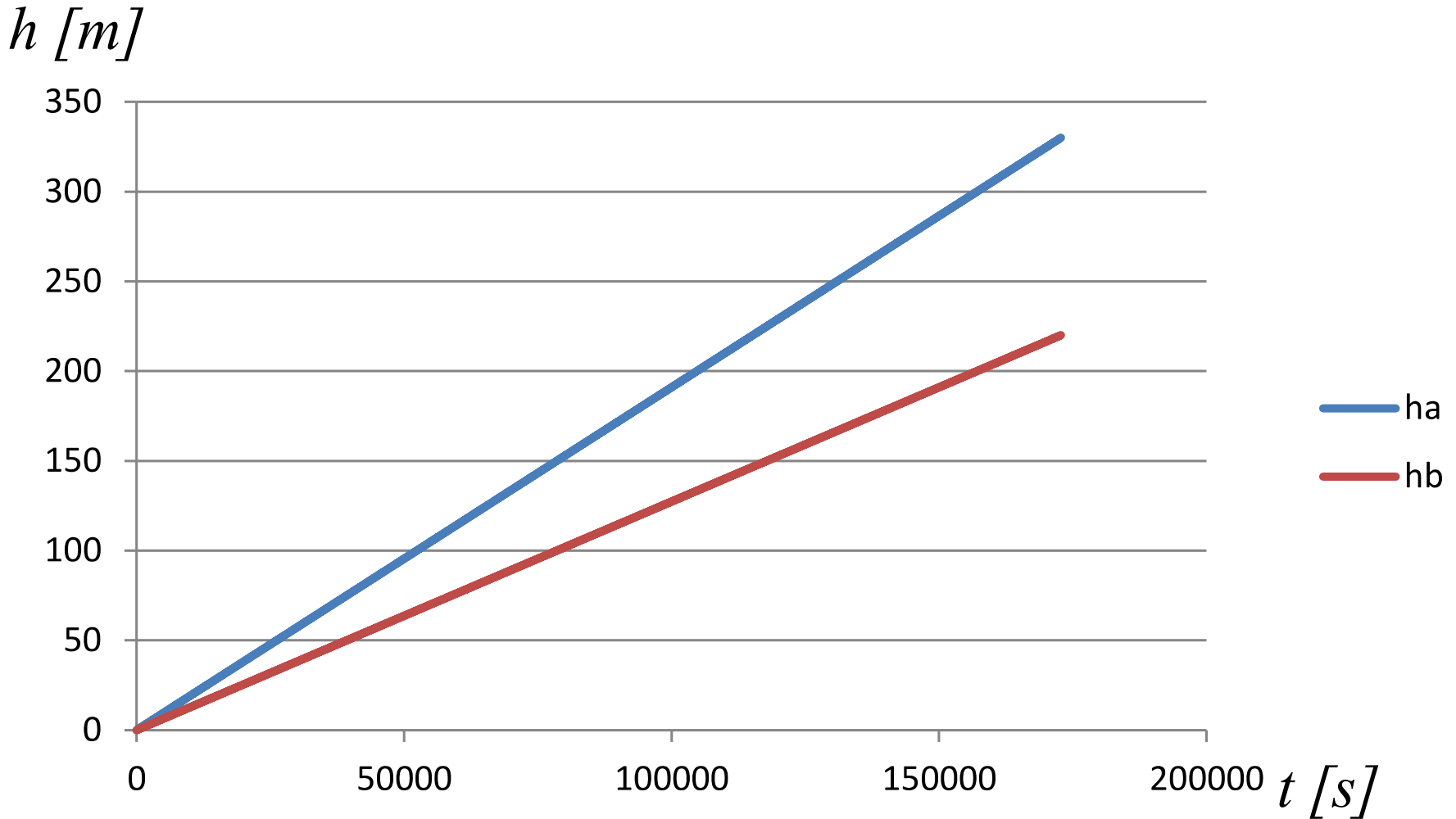
- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Altura del orificio de salida superior: $h_o = 4.7$ m
- Caudal de entrada: $0.01 \text{ m}^3/\text{seg}$
- C_{va} y C_{vb} de las válvulas: 0.00072 m^2
- Relación de densidad del fluido: $r = 0.8$
- Fracción en volumen de alimentación: $w_a = 0.6$ y $w_b = 0.4$

↙ Consideramos que no existe compresión o expansión en el mezclado



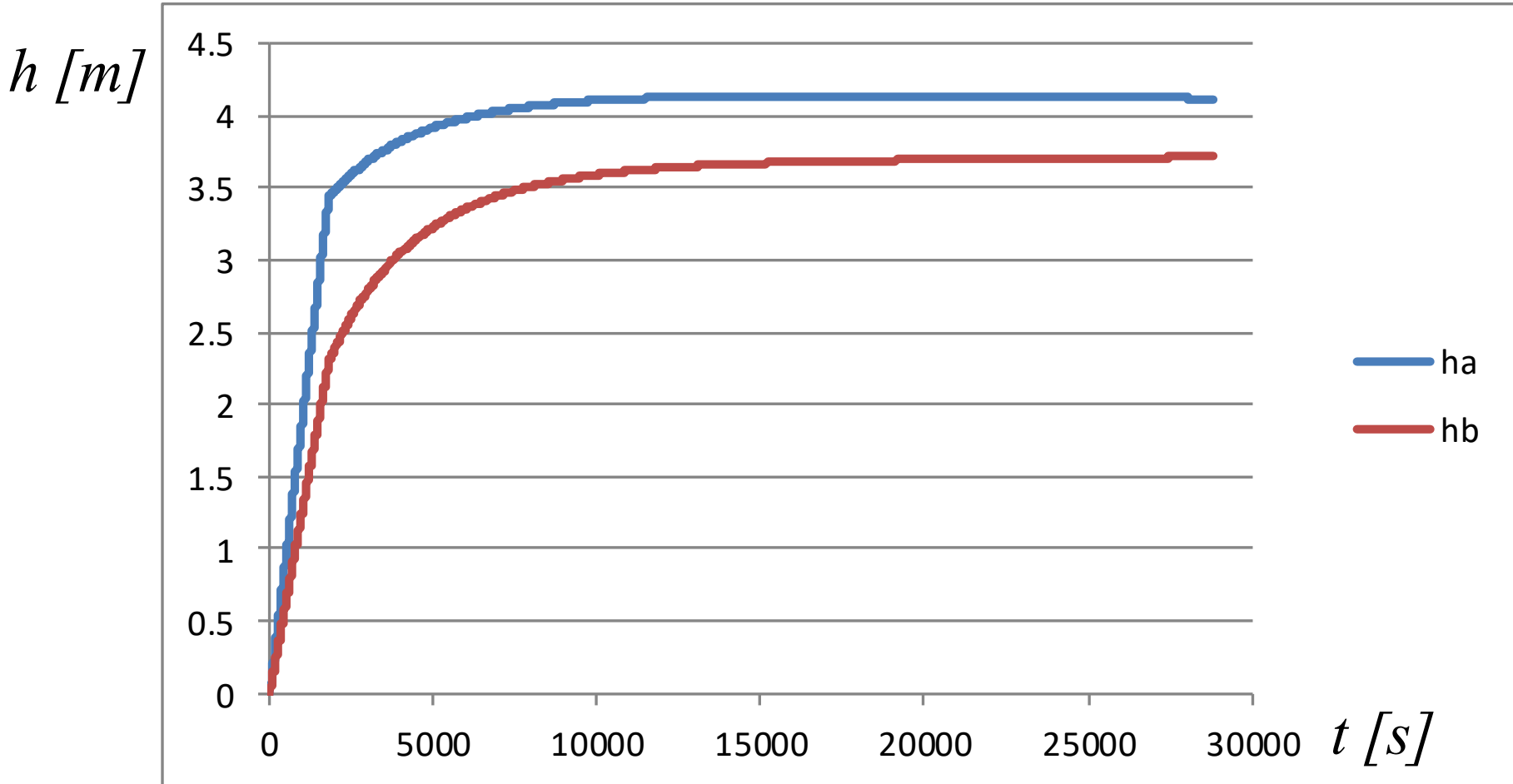
Ejemplo: Operación de un decantador

- Si no se abre ninguna de las válvulas el tanque rebalsa:



Ejemplo: Operación de un decantador

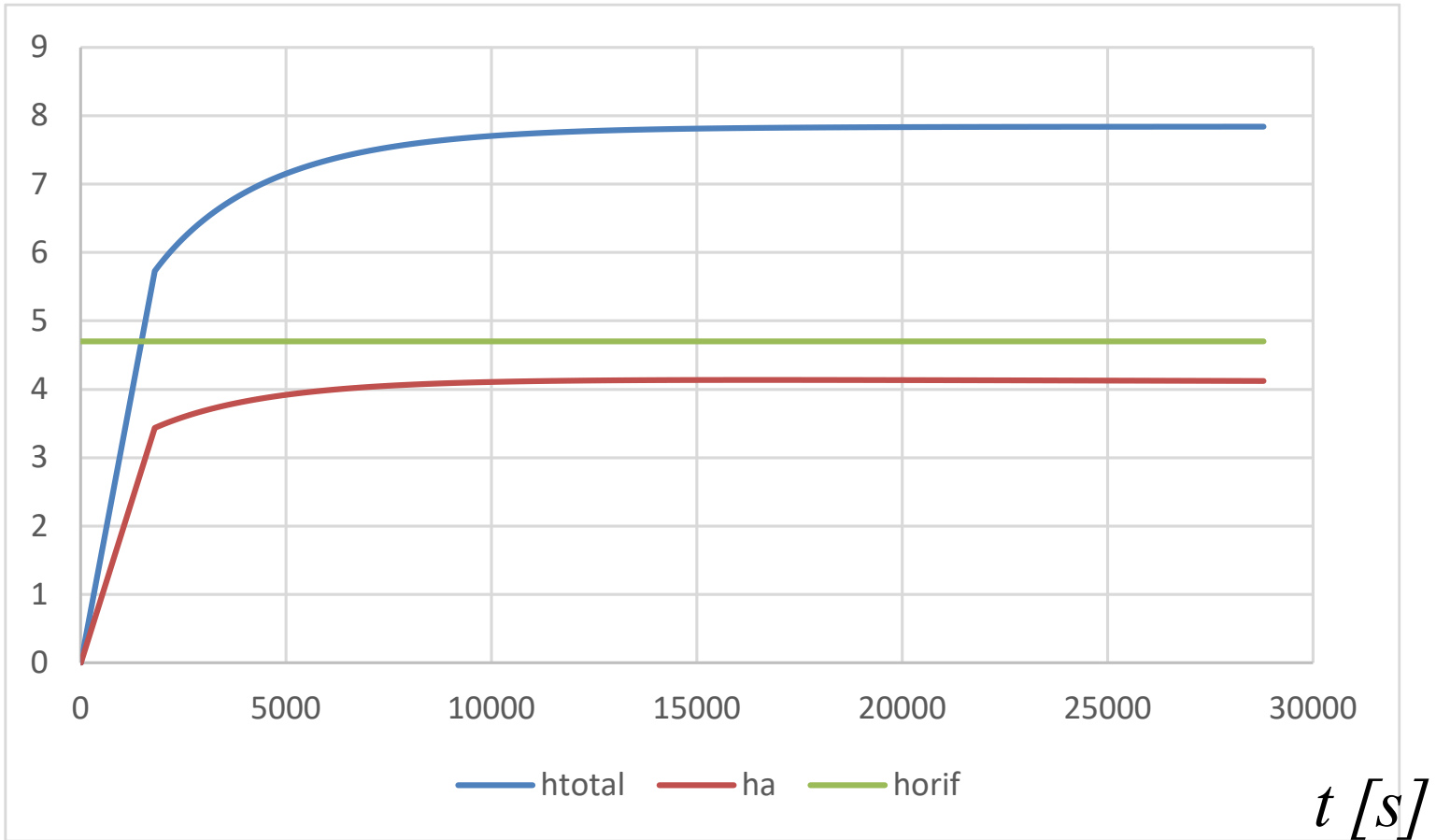
- Al observar la evolución de la altura se propuso abrir las dos válvulas a la media hora de transcurrido el llenado:



Ejemplo: Operación de un decantador

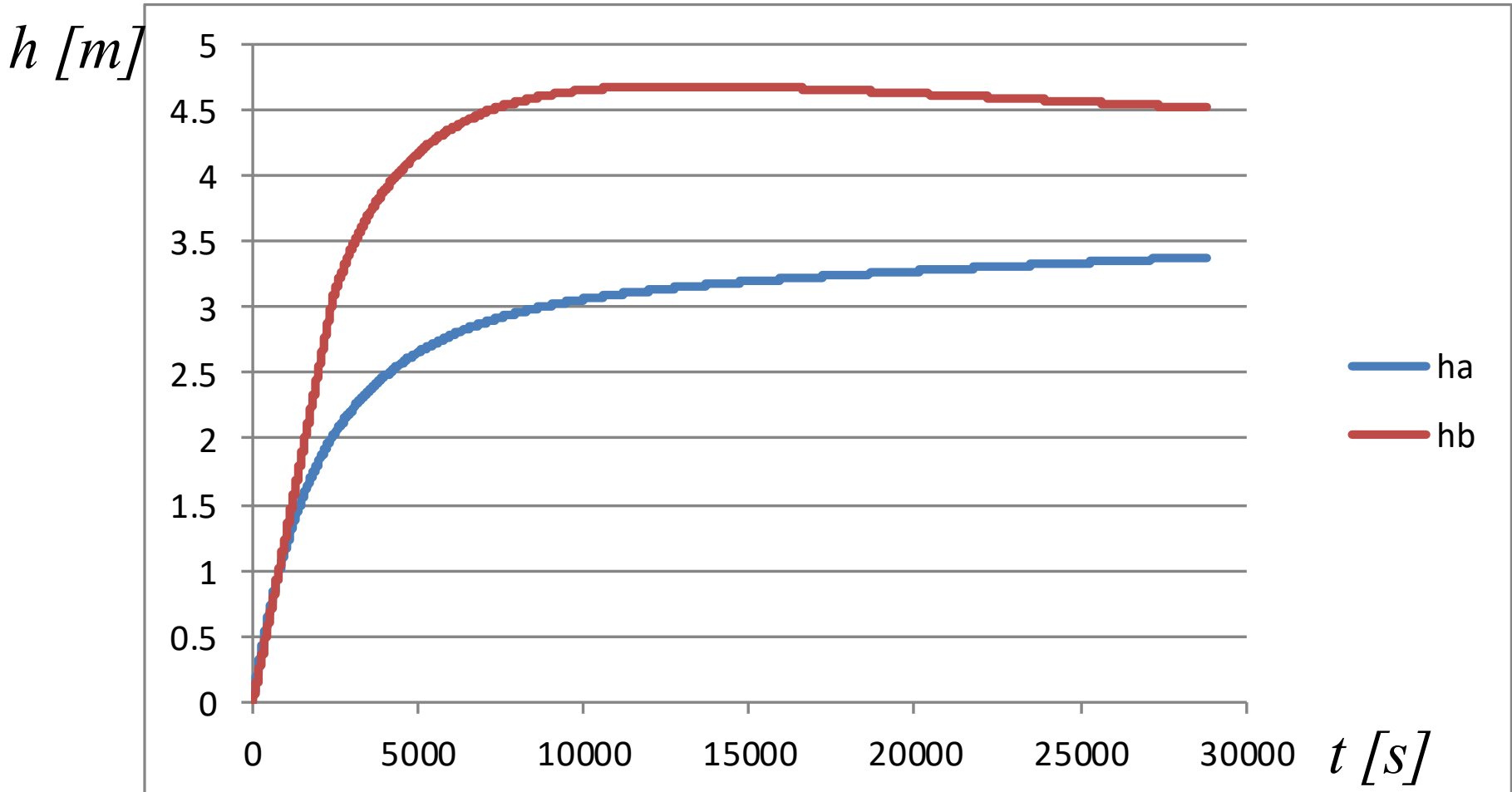
- Al observar la evolución de la altura se propuso abrir las dos válvulas a la media hora de transcurrido el llenado:

h [m]



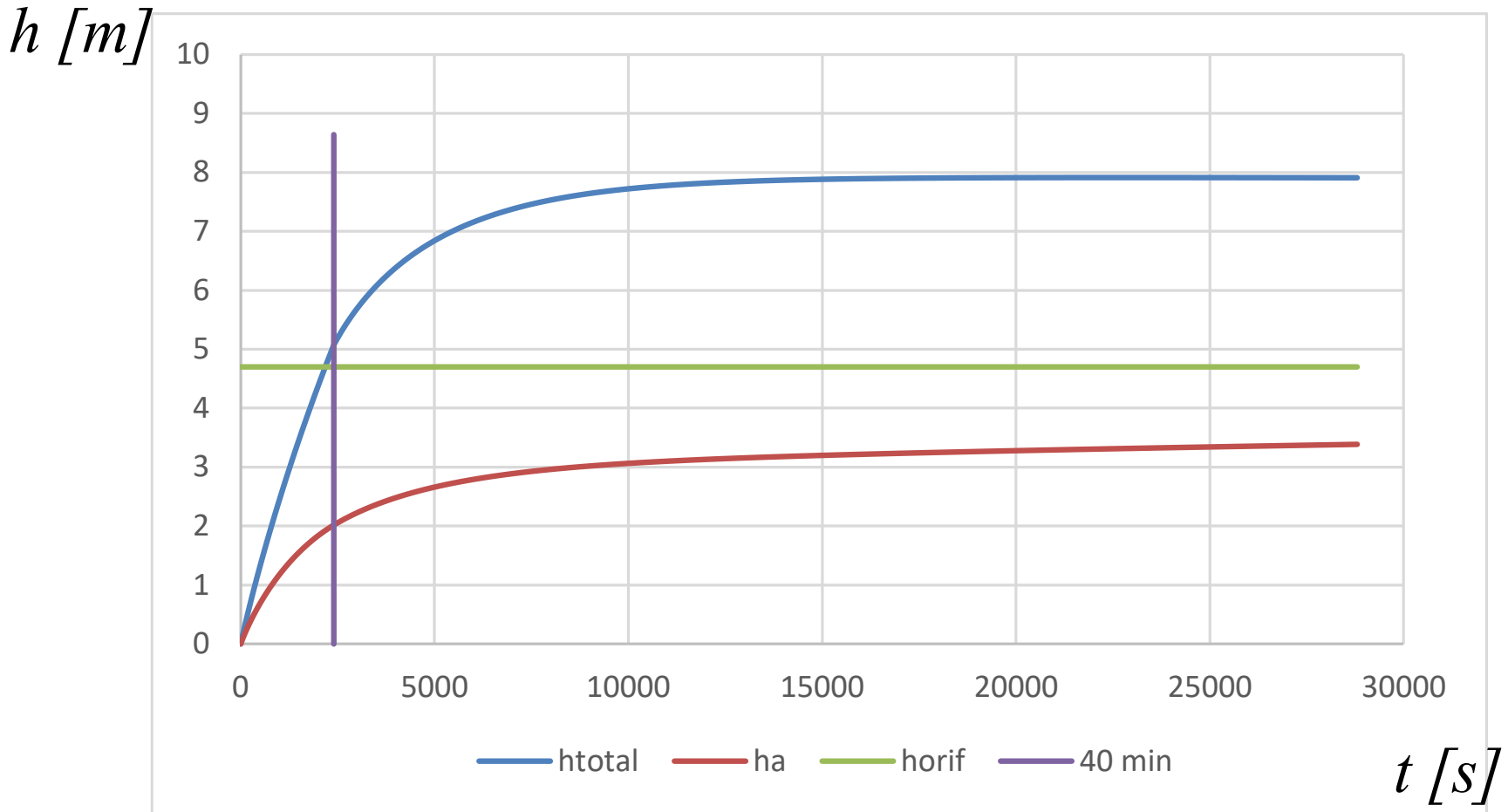
Ejemplo: Operación de un decantador

- Otra alternativa es comenzar con la válvula de fondo abierta y activar la superior a los 40 minutos de transcurrido el llenado:

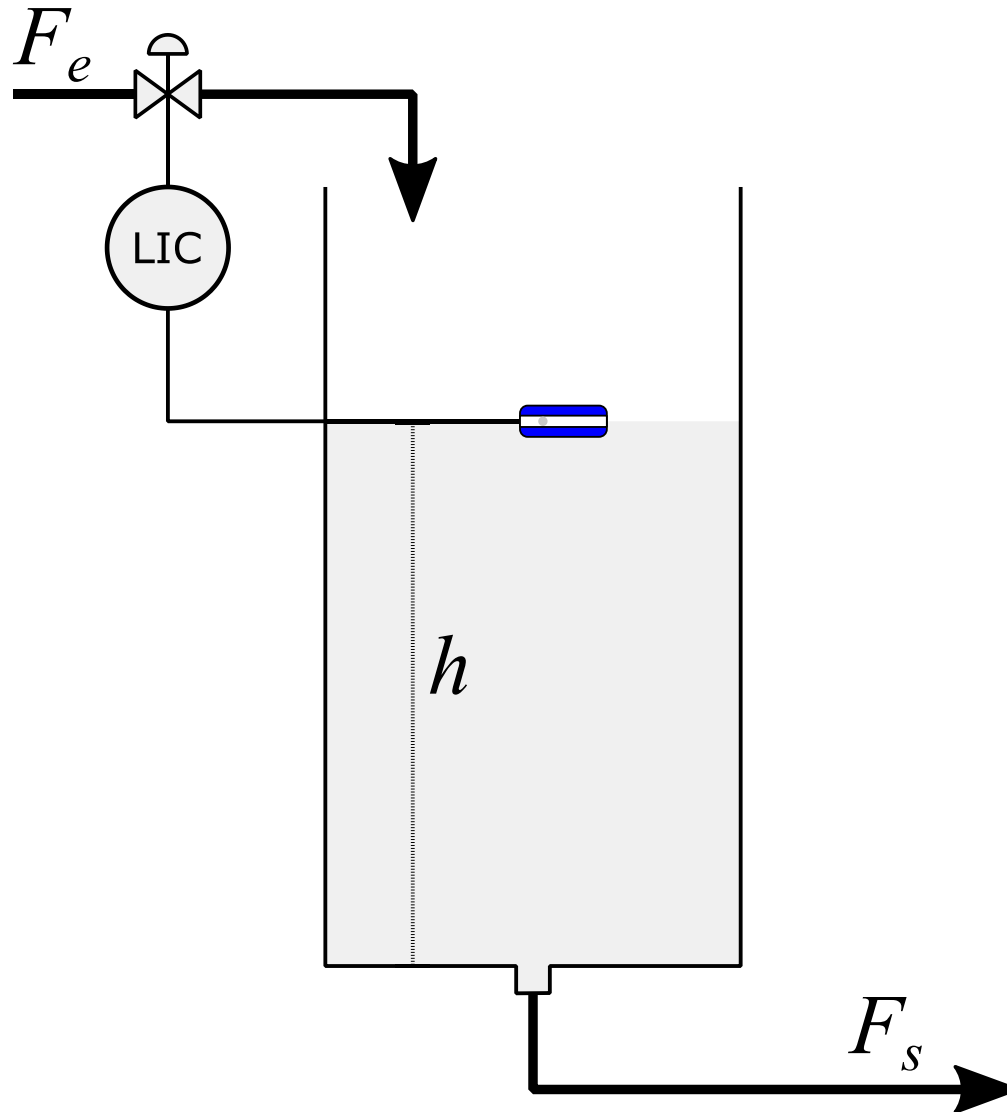


Ejemplo: Operación de un decantador

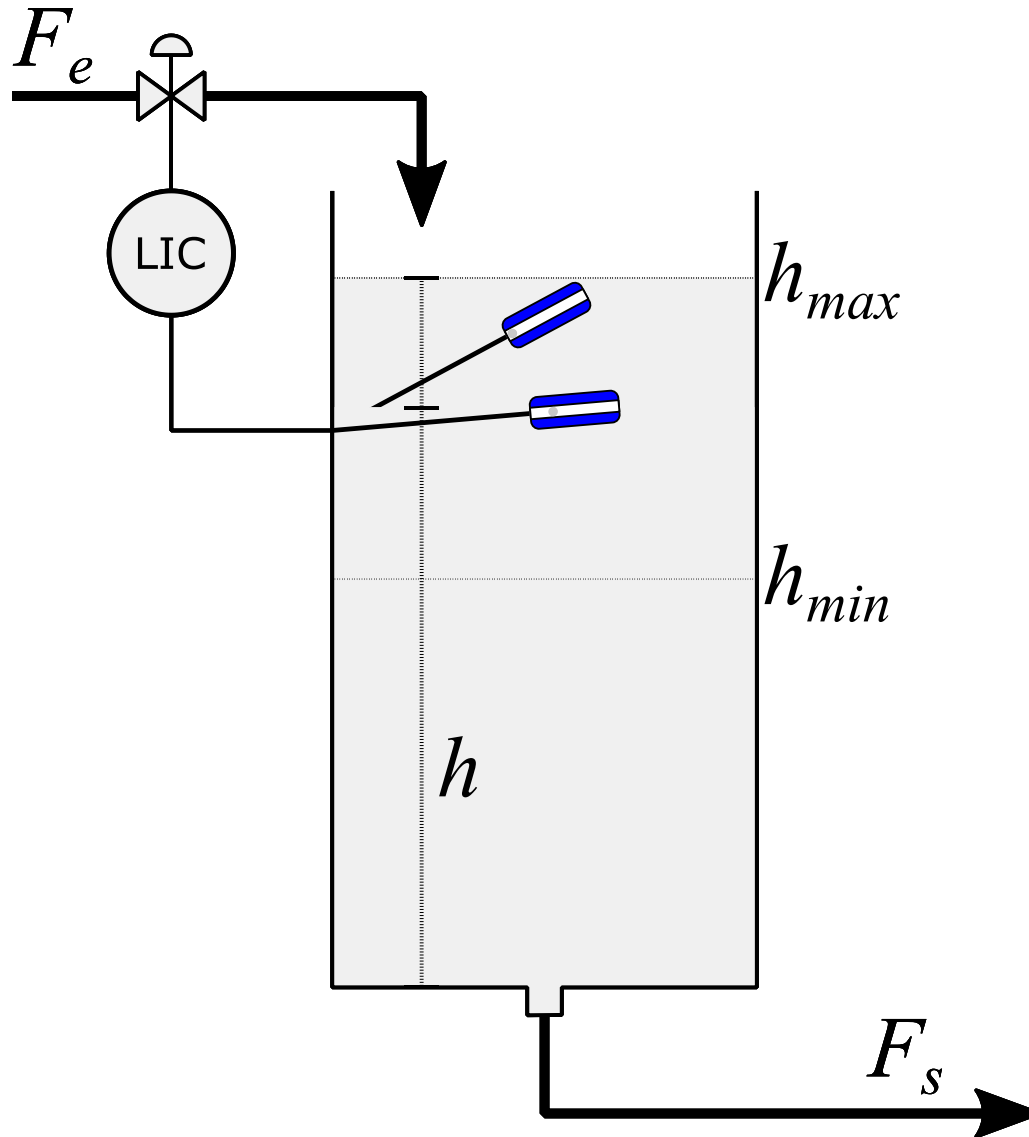
- Otra alternativa es comenzar con la válvula de fondo abierta y activar la superior a los 40 minutos de transcurrido el llenado:



Ejemplo: Control de nivel con un flotante



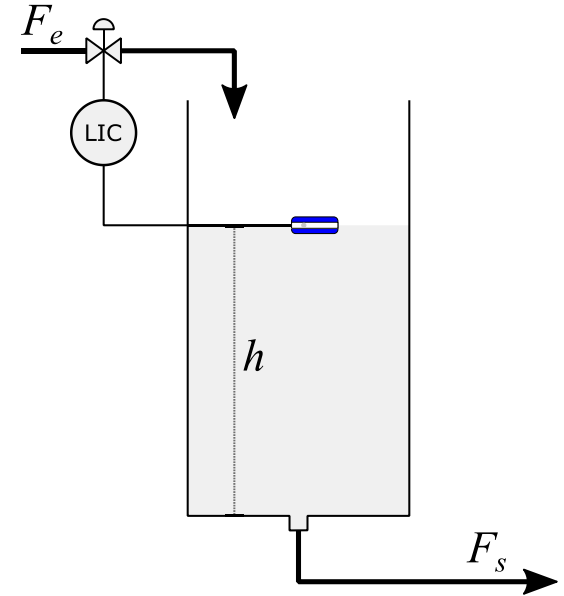
Ejemplo: Control de nivel con un flotante



Ejemplo: Control de nivel con un flotante

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Control on/off mediante un flotante

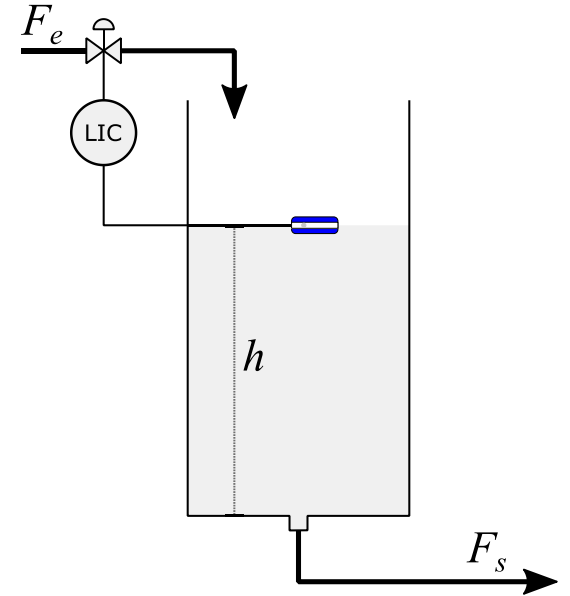


Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}$$

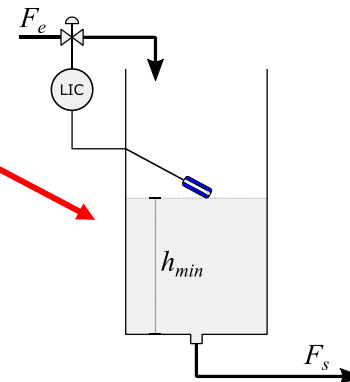
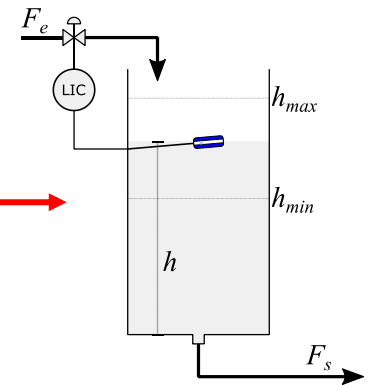
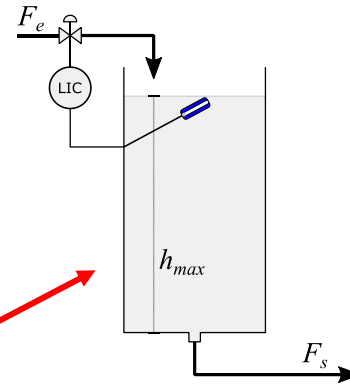
Similar al tanque abierto con salida gravitatoria



Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Caudal de entrada:

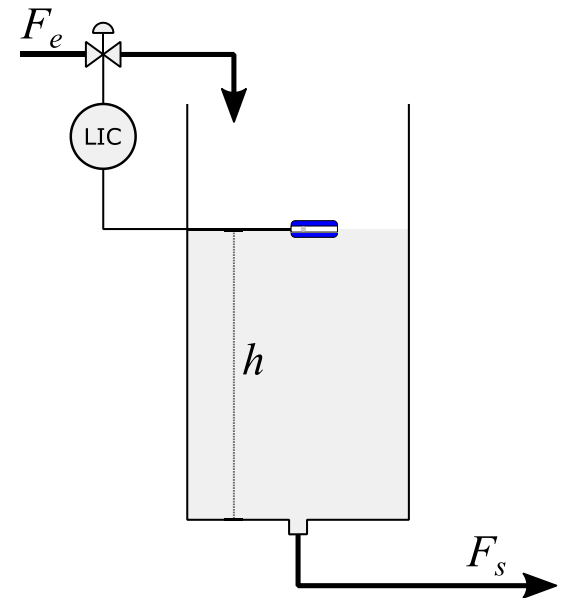
$$F_{e_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i \geq h_{\max} \\ F_{e_{i-1}} & \text{si } h_{\min} < h_i < h_{\max} \\ F & \text{si } h_i \leq h_{\min} \end{cases}$$



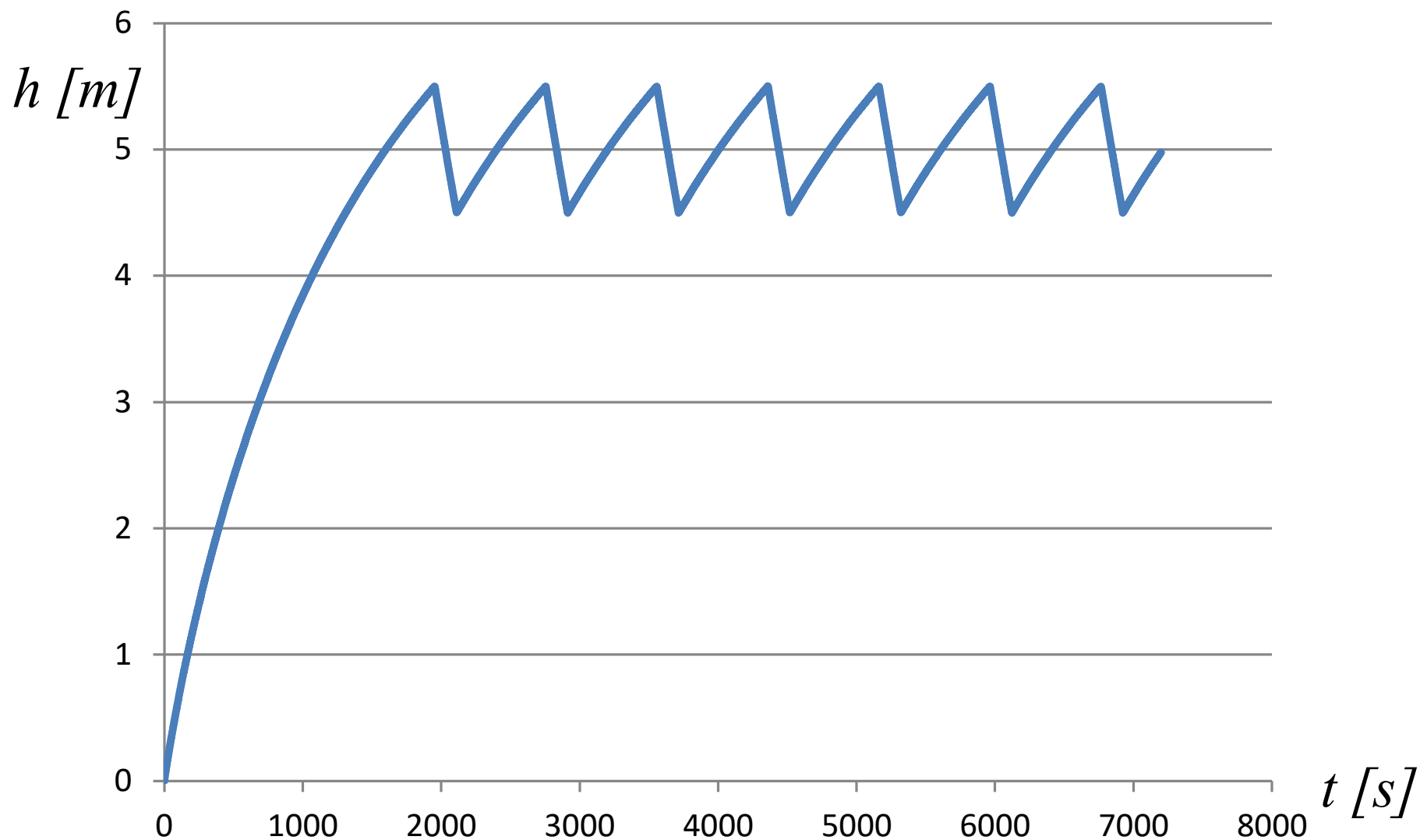
Ejemplo: Control de nivel con un flotante

Ejemplo practico:

- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Diámetro del orificio de salida tanque: 0.0508 m
- Caudal de entrada al activarse la válvula: $F=0.025 \text{ m}^3/\text{seg}$
- Rango del flotante: $h_{min} = 4.5 \text{ m}$ y $h_{max} = 5.5 \text{ m}$



Control de nivel con un flotante (altura vs tiempo)



Control de nivel con un flotante (caudal de salida vs tiempo)

$Q [m^3/s]$

0.025

0.02

0.015

0.01

0.005

0

0

1000

2000

3000

4000

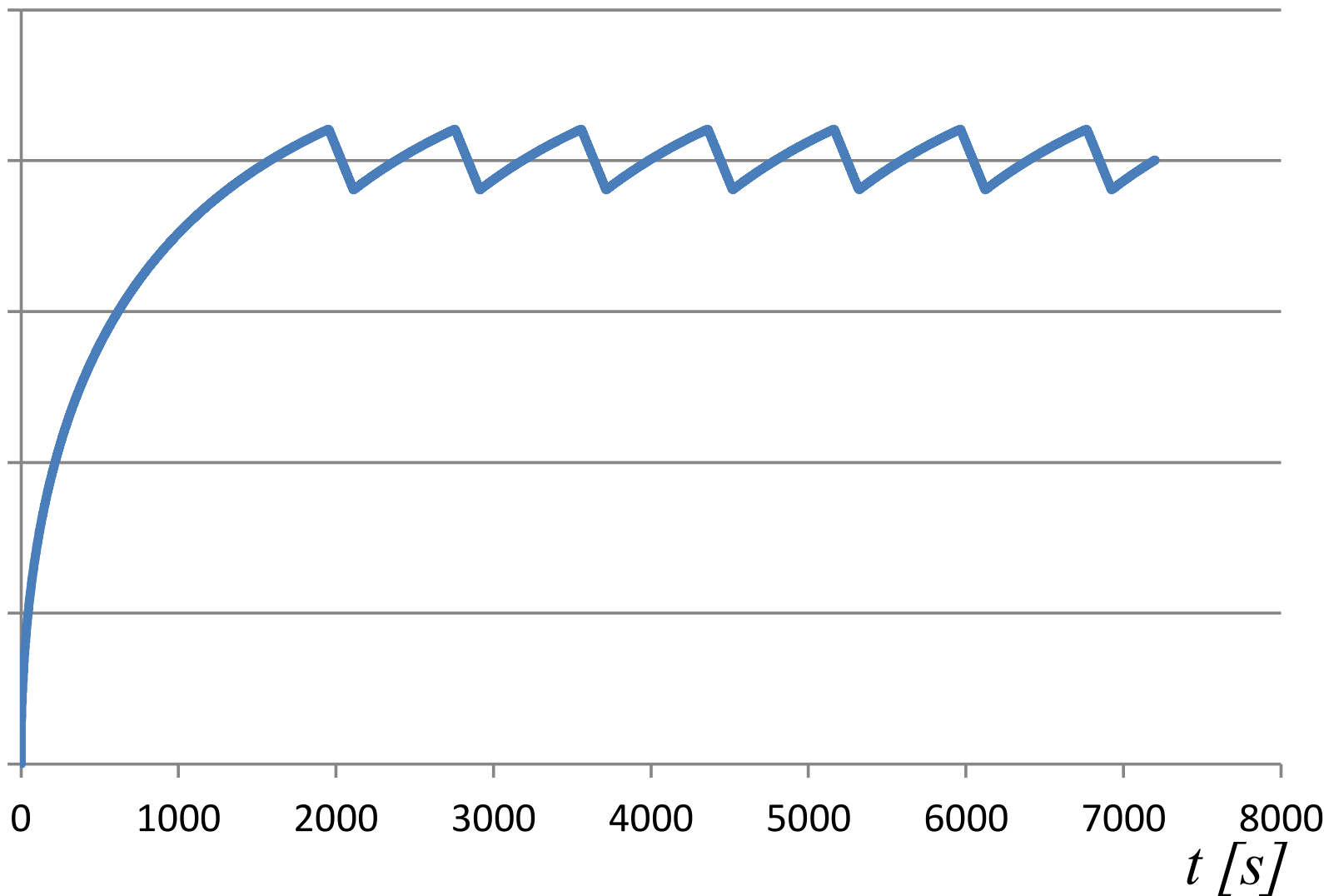
5000

6000

7000

8000

$t [s]$



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)

$Q [m^3/s]$

0.03

0.025

0.02

0.015

0.01

0.005

0

0

1000

2000

3000

4000

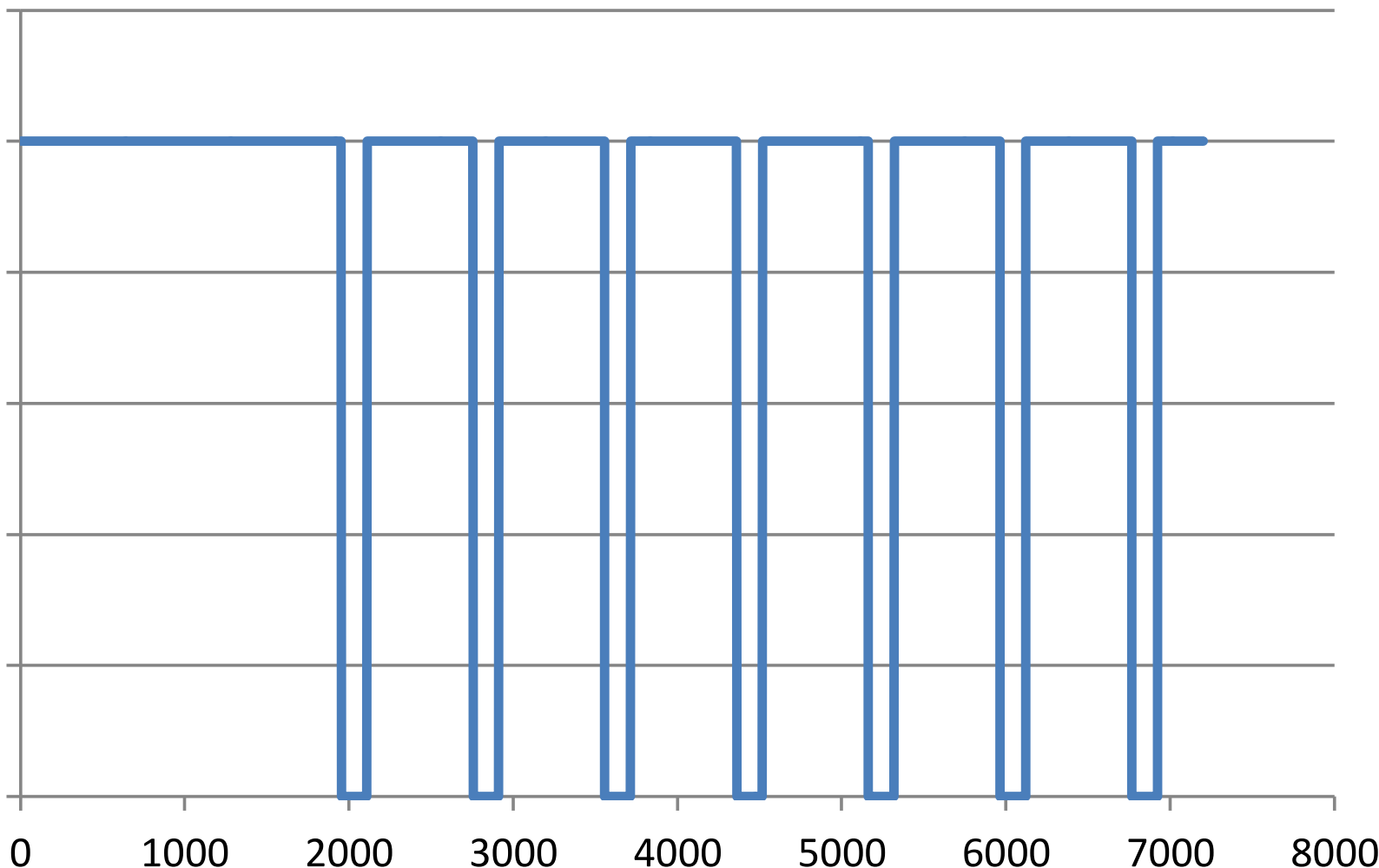
5000

6000

7000

8000

$t [s]$



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)

