# *Diseño, Simulación, Optimización y Seguridad de Procesos*

## *Modelado y Optimización*

*Dr. Nicolás José Scenna*
*Dr. Néstor Hugo Rodríguez*
*Dr. Juan Ignacio Manassaldi*

## *Contenido*

El presente capítulo introduce al lector a los conceptos de Optimización con un breve repaso al Modelado. Los temas están abordados desde la necesidad de Optimización (Introducción) que requiere a su vez del empleo de Modelos Matemáticos del Proceso o sistema físico en General (Primera Parte) hasta la aplicación de herramientas y algoritmos matemáticos necesarios para su resolución (Segunda Parte).

El tema en estudio está muy ligado a la posibilidad de emplear algoritmos informáticos cada vez más rigurosos y extensos los, que a su vez, requieren de poderosos Hardware para poder resolverlos en tiempos más o menos adecuados.

En consecuencia, el tema, lejos de agotarse, podría decirse que recién comienza, ya que las computadoras actuales y futuras permiten y lo seguirán haciendo, resolver problemas de optimización que en el pasado ni siquiera podían plantearse.

## *Indice*

# Introducción

En ocasiones es necesario optimizar un proceso, esto es, elegir la mejor opción entre varias. El concepto de "mejor opción" es relativo. Algunos ejemplos son:

1. Aumentar la producción de productos valiosos y/o reducir los productos contaminantes,
2. Reducir el consumo energético y/o los costos operativos.
3. Incrementar las ganancias.
4. Prolongar los periodos entre paradas.
5. Aumentar la confiabilidad del sistema.
6. Reducir los costos de mantenimiento o la utilización de determinados equipos.
7. Mejorar la utilización del "Staff".

Conceptos Matemáticos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Álgebra lineal y cálculo} \\ \text{Álgebra matricial y vectorial} \\ \text{Análisis real} \end{array} \right.$

Un problema simple requiere una toma de decisión intuitiva, mientras que un problema complejo puede tener infinitas soluciones lo que requiere la aplicación de la teoría de optimización.

## *Teoría de optimización*

Procedimientos numéricos de cálculos

## *Ejemplos de aplicación de optimización en la Industria Química*

1. Determinación de los mejores lugares para la ubicación de la planta.
2. Itinerario para la distribución del crudo y de los productos.
3. Dimensionamiento de tubería y layout.
4. Diseño de plantas enteras y de equipos.
5. Organigrama de mantenimiento y reemplazo de equipos.
6. Planificación y análisis de operaciones existentes.
7. Evaluación de datos de planta para construir un modelo del proceso.
8. Control de sistemas dinámicos.

Un ejemplo típico, es la elección del diámetro económico de una tubería. Es bien sabido que a

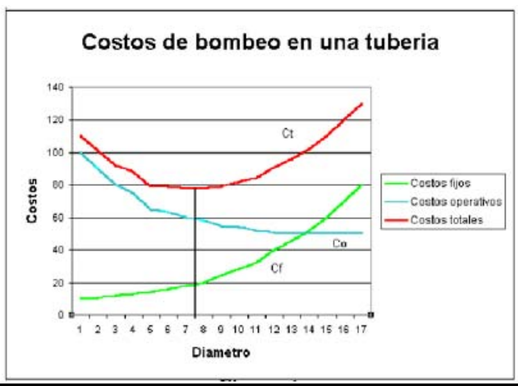



**Figura 1**

mayor diámetro mayor es el costo fijo (contiene más material) pero disminuyen los costos operativos (potencia de bombeo). A menores diámetros, disminuyen los costos fijos pero aumentan los operativos. La solución óptima será aquella que minimice la suma de ambos costos, es decir el costo total. En algunos nomogramas se puede hallar este diámetro económico sabiendo el gasto de fluido y su densidad.

En la figura 1 se aprecia lo anterior. La línea vertical indica el diámetro de costo total más bajo, esto es el diámetro económico.

## *Resultados prácticos:*

Adaptación de platos de alimentación

Ahorros 980.000 $/año

Inversión de capital: 40.000 $/año

Optimización de una planta de gas

Ahorros 500.000 $/año

Inversión de capital 0 $/año

Eliminación de cuellos de botella en una unidad de alquilación

Ahorros 1.500.000 $/año

Se incrementó la capacidad

Optimización de una refinería

Ahorros 4.000.000 $/año

Se maximizó el beneficio de la planta.

Se logró la distribución de producto óptima.

## *Jerarquía de los niveles de optimización.*

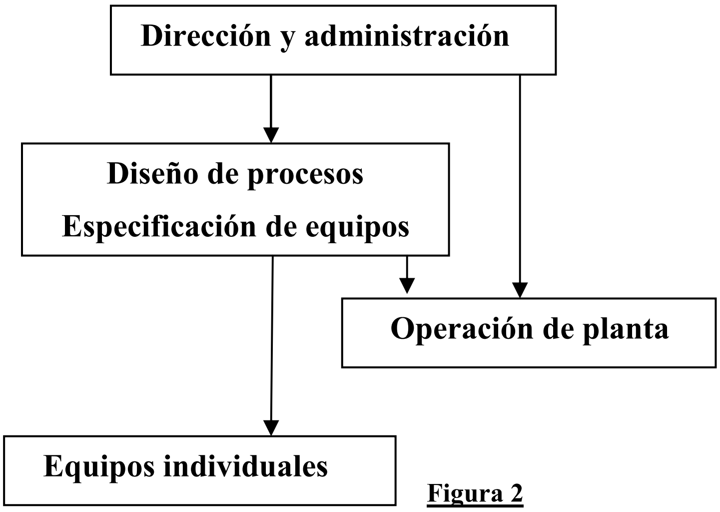



**Figura 2**

### *Requisitos para la aplicación de la teoría de optimización a problemas concretos de ingeniería*

1. Definir los límites del sistema.
2. Elegir un criterio cuantitativo para medir la perfomance del sistema, índice que permita identificar el mejor diseño.

   Factor económico: Capital total, costo anual, retorno sobre la inversión, relación costo-beneficio, etc.

   Factor tecnológico: Tiempo de producción mínimo, velocidad de producción máxima, utilización de energía mínima
3. Seleccionar las variables del sistema que servirán para caracterizar y/o identificar a las alternativas candidatas.

   Variables independientes del sistema.

   Parámetros del sistema.
4. Definir un modelo matemático que exprese la forma en que las variables están relacionadas.

   Modelo matemático: Es una representación matemática de los aspectos esenciales de un sistema y que presenta conocimiento del mismo en una manera útil (Eykhoff, 1974).

   Aspectos a considerar en el modelado:

   a) Ecuaciones de balances de materia y de energía.
   b) Relaciones de diseño.
   c) Ecuaciones que describen el fenómeno físico.
   d) Inecuaciones que definen los rangos de operación permitidos, especifican los requerimientos de perfomance máxima o mínima y/o fijan los límites en las disponibilidades de los recursos.

   Los puntos 1,2,3 y 4 constituyen la formulación del problema de optimización

# Primera parte: Modelado

Modelar significa simular. Esto es, que la "caja negra" que representa al sistema debe dar resultados acordes a él. En otras palabras, cuando estimulamos al modelo con una señal, esperamos que los resultados del mismo sean similares a los que daría el sistema real.

Los principales problemas que se plantean son:

a) Encontrar la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales (que usualmente se efectúa mediante un método iterativo).

b) Encontrar la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales mediante ecuaciones discretizadas en diferencias finitas que aproximan a las soluciones de las ecuaciones diferenciales continuas.

Con el fin de que el modelo se aproxime más a la realidad, éste se torna complejo en su formulación y difícil en su resolución. De ahí la necesidad de emplear métodos numéricos ya sean programados por el usuario o “enlatados”. Incluso éstos últimos requieren conocimientos teóricos para facilitar su manejo y, en ocasiones, en especial para problemas muy específicos, es más conveniente programar por sí mismo el modelo en una computadora.

## *Clasificación de los modelos*

Los modelos pueden clasificarse en:

| | | |
|---|---|---|
| Teóricos | vs. | Empíricos |
| Lineal | vs. | No lineal |
| Estacionario | vs. | No estacionario |
| Parámetros globales | vs. | Parámetros Distribuidos |
| Variables continuas | vs. | Variables discretas |

**Figura 3**

La forma matemática típica de los modelos es:

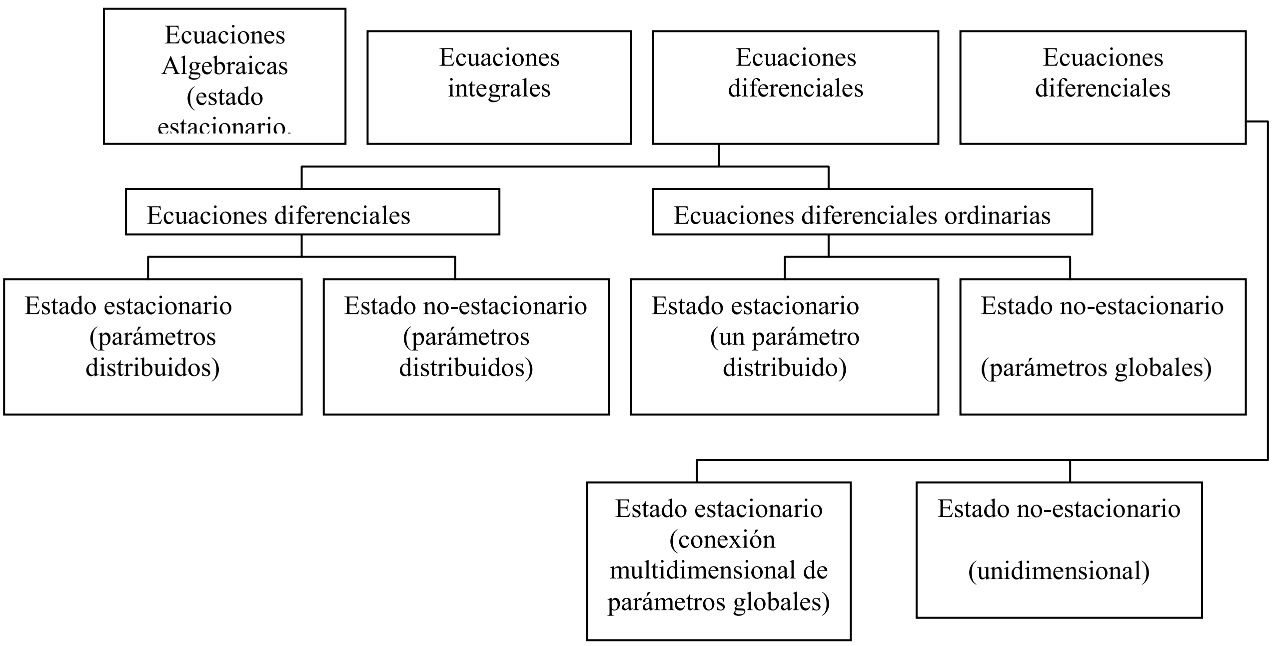



**Figura 4**

## *Modelado Matemático*

El principal problema consiste en identificar e incluir los principales fenómenos físicos y químicos que son relevantes para la situación que se desea modelar.

- No existe un único modelo para un sistema.
- Jerarquía de modelos de variada complejidad y detalles ajustados a objetivos y necesidades específicos.
- No existe ningún método de cómo construir un modelo matemático, solo lineamientos generales.

### Construcción del modelo

1. Formulación del modelo.
2. Transformación en una forma adecuada para la solución.
3. Solución y análisis.

La formulación involucra a la Física, a la Química y a la Ingeniería, mientras que la transformación y solución,a las Matemáticas y a los cálculos numéricos.

Como regla de oro para la formulación correcta del modelo conviene escribir todas las ecuaciones sin anticipar procedimientos de solución.

### Implementación de un modelo

a) Reformulación de ecuaciones y variables.

b) Elección del método de solución.

c) Elección del método numérico.

d) Generación de estimaciones iniciales de las variables.

e) Diseño de la arquitectura del programa.

f) Programación.

g) Ensayos del programa.

En todo problema de optimización y modelado hay dos objetivos en conflicto:

1- Construir un modelo suficientemente complejo que describa exactamente al sistema.

2- Construir un modelo tratable, que se pueda resolver mediante alguna técnica de resolución.

Este último problema va siendo minimizado más, cada día, con la aparición de computadoras y programas cada vez más poderosos. Al respecto, a luego se verán algunos tipos de simuladores, que como hemos dicho, no son otra cosa, que “resolvedores de modelos”.

## *Principales actividades en el desarrollo de un Modelo previo a su aplicación*

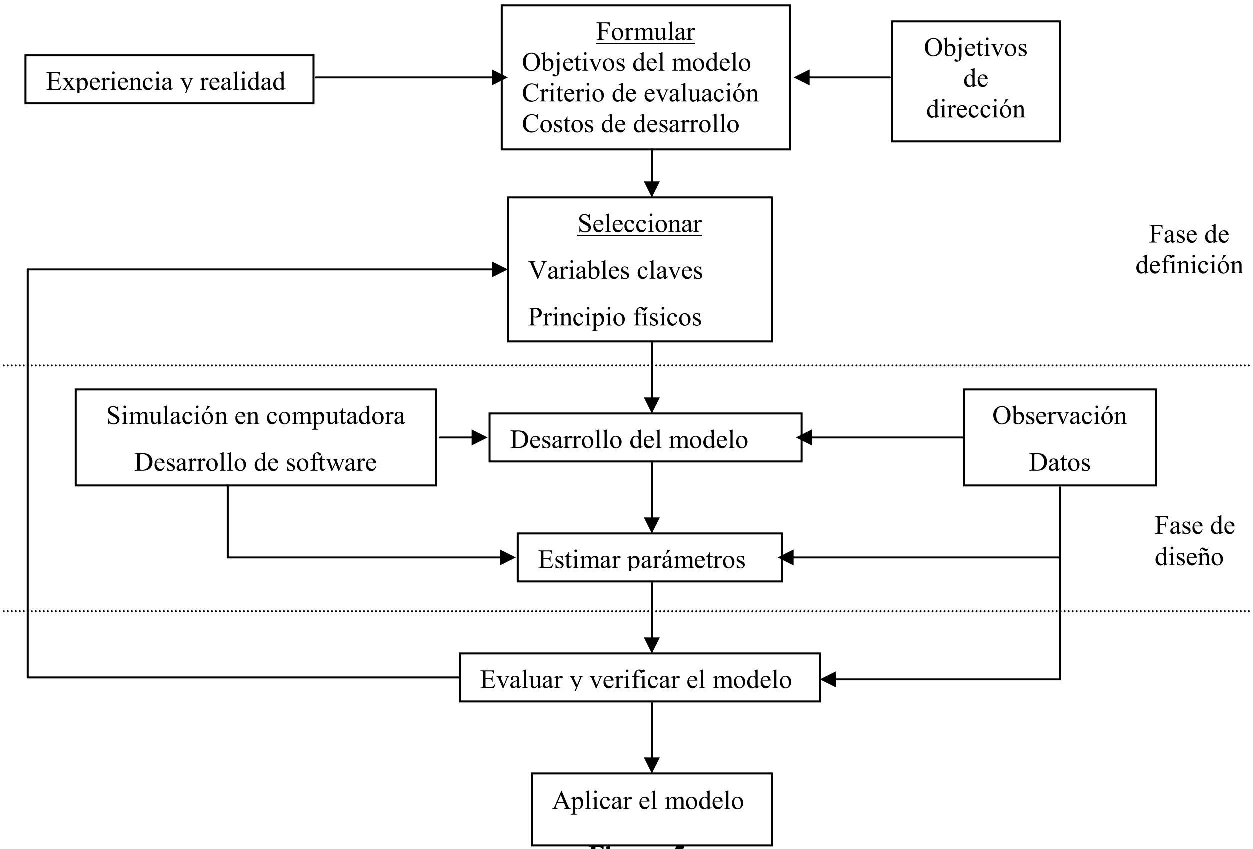



**Figura 5**

## *Clasificación de los métodos de simulación*

Consideramos simulador a algún algoritmo tal que una vez ingresados ciertos valores de entradas, entregue como resultado, el comportamiento que tendría el sistema real.

### Simulación cualitativa y cuantitativa.

La simulación cualitativa tiene por objeto el estudio de las relaciones causales y las tendencias temporales cualitativas de un sistema, como así también la propagación la propagación de perturbaciones a través de un sistema dado.

Los valores que puede tomar una variable se llama valor cualitativo (a diferencia de los valores numéricos cuantitativos) pudiendo ser absolutos o relativos a un valor de referencia dado. Sus valores pueden ser tales como +,-,0. Entre los campos de aplicación de estos simuladores cualitativos se encuentran los análisis de tendencias, supervisión y diagnóstico de fallas, análisis e interpretación de alarmas, control estadístico de procesos, etc.

La simulación cuantitativa, en cambio, es la que describe el comportamiento de un proceso, a través de un modelo matemático del mismo. Para ello resuelve los balances de materia, energía y cantidad de movimiento, junto a las ecuaciones de restricción que imponen aspectos funcionales del sistema.

## Modelos teóricos y experimentales

Obviamente son teóricos, todos aquellos basados en consideraciones que traten de predecir el comportamiento del sistema a través de la aplicación de principios físicos u químicos.

Sistemas como las redes neuronales, permiten también predecir valores de salidas en función de las entradas, pero para entrenar dicha red (o cualquier correlación numérica) requiere gran cantidad de información experimental, y su validez queda enmarcada dentro de los involucrados en dichos datos. Pero estos sistemas solo hacen tratamientos matemáticos sin considerar los fenómenos que involucran.

## Modelos lineales y no lineales

En casos de programación lineal, la función objetivo es una combinación lineal y su representación es una recta.

En los casos de programación no-lineal, la función objetivo o las restricciones o ambas no son lineales. Este tema se tratara con más detalles en la segunda parte de este capítulo.

## Simulación estacionaria y dinámica. Parámetros globales o distribuidos

La simulación estacionaria resuelve el sistema con independencia de la variable tiempo, lo que transforma al problema en un sistema de ecuaciones algebraicas, si el modelo es a parámetros globales. Esto último implica, que los valores de las variables son promediados, en el caso de parámetros distribuidos, entonces serán necesarias ecuaciones diferenciales a derivadas parcial, para reflejar la variación de dicha variable con la posición.

En la simulación dinámica, se pretende reflejar el comportamiento del sistema en su evolución transitorio entre dos estados estacionarios cualesquiera (por ejemplo: puestas en marcha o paradas). Si los parámetros son globales solo se requieren ecuaciones diferenciales respecto del tiempo, en los casos de parámetros distribuidos, se requieren además ecuaciones diferenciales parciales respectos de la posición.

## Variables continuas o discretas

Los modelos en los que las variables son continuas resultan más frecuentes, pero en ocasiones pueden presentarse casos en los que es necesaria la simulación de eventos discretos. Existen numerosos procesos en que solo pueden simularse desde este punto de vista. Por ejemplo, la simulación o diseño de plantas batch multiproducto o multipropósito, o ambas simultáneamente, poseen características que impone un modelo discreto para contemplar ciertos eventos de interés. En estos casos se requiere utilizar modelos especiales.

## *Simuladores de procesos químicos complejos*

No es lo mismo modelar un equipo individual o un proceso. En efecto, en el primer caso, solo se plantea calcular las salidas en función de las variables de entrada de acuerdo a los modelos antes citados.

Para el caso de un proceso, se deberá tener una biblioteca de módulos individuales para poder simular cada equipo u operación. Luego deberá considerarse la interacción entre los mismos, de acuerdo al diagrama de flujo que establece la conexión entre ellos. La situación se torna más compleja cuando existen reciclos ya que se requerirán técnicas de rasgado, particionado y ordenamiento, que permitan establecer el mínimo número de corrientes de corte, en las cuales iniciar el cálculo. En general, se emplean métodos numéricos iterativos, tanto para sistemas de ecuaciones algebraicas como de ecuaciones diferenciales.

Además, deberá disponerse de una importante biblioteca de propiedades fisicoquímicas tanto de sustancias puras como de mezclas.

Los simuladores más empleados son:

- Simuladores globales u orientados a ecuaciones.
- Simuladores secuenciales modulares.
- Simuladores híbridos o modular secuencial-simultáneo.

## Simuladores globales u orientados a ecuaciones

Bajo este enfoque, las ecuaciones que rigen cada equipo se integran entre sí, dando origen a un gran sistema de ecuaciones algebraicas que representan a todo el conjunto o planta a simular. La solución del problema consiste en resolver un gran sistema de ecuaciones algebraicas, por lo general, altamente no lineal.

El inconveniente de esta filosofía consiste en problemas de convergencia, para lo cual, las variables deben ser inicializadas cerca de la solución. El otro problema consiste en la existencia de varias soluciones matemáticamente factibles, por ser el sistema fuertemente no lineal.

Además debe citarse la pérdida de la asociación entre la ecuación y el equipo correspondiente, por lo que de haber inconvenientes, es difícil identificar el lugar correspondiente al mismo (en otras palabras a que equipo corresponde una ecuación en particular).

Como gran ventaja, cabe citar el hecho de que la velocidad de convergencia es cuadrática es decir mayor que en los modulares secuenciales. Además, el sistema basado en ecuaciones, permite adosar ecuaciones de restricción y funciones objetivos, por lo que la tarea de optimización (tema a tratar en el presente estudio) se puede realizar en forma directa. Esta flexibilidad es imposible en los simuladores secuenciales modulares, debido a que los módulos están orientados y definidos en forma rígida, por lo que no admiten la incorporación de restricciones y/o variables.

**Simuladores globales u orientados a ecuaciones.**

- Cada equipo se representa por las ecuaciones que lo modelan. El modelo es la integración de todos los subsistemas.
- Desaparece la distinción entre variables de proceso y parámetros operativos, por lo tanto se simplifican los problemas de diseño.
- Resolución simultánea del sistema de ecuaciones algebraicas (no lineales) resultante
- Mayor velocidad de convergencia
- Necesita una mejor inicialización (mejor cuanto mayor sea el problema a resolver).
- A mayor complejidad, menor confiabilidad en los resultados y más problemas de convergencia (soluciones sin sentido físico).
- Más difícil de usar por “no especialistas “.

## Simuladores secuenciales modulares

Estos simuladores resuelven cada tipo de equipo por separado usando las técnicas que son adecuadas para el mismo. El flujo de información coincide con el “flujo físico” de la planta.

Conceptualmente, bajo esta filosofía, para cada módulo de simulación (equipos) deberá plantearse su modelo matemático. Deberá considerarse, además, los grados de libertad, a fin de que la solución sea única. El enfoque en la teoría secuencial modular impone conocer las condiciones de las corrientes de entradas y por su parte, calculan las condiciones de las corrientes de salida y los correspondientes parámetros de operación si correspondiera. Esto impone cierta rigidez, que sacrifica, según el caso, la posibilidad de encontrar asignaciones tales que minimicen el tiempo de cómputo. Sin embargo esto resulta conveniente desde otro punto de vista, ya que de esta manera se impone una dirección al flujo de información entre módulos.

Para ciertos equipos, algunos parámetros deben ser ingresados por el operador. Por ejemplo, en un intercambiador de calor, son datos las condiciones de entrada pero U se deberá calcular por algún método específico o será incorporado como dato por el usuario (como U.A).

Características de un simulador modular secuencial

Para comprender el desempeño de un simulador secuencial es necesario estudiar la estructura y la arquitectura del mismo. Básicamente podríamos diferenciar en principio tres funciones o secciones perfectamente diferenciadas.

1) La lógica central o lógica general del simulador
2) Sección encargada de la estimación de las propiedades fisicoquímicas.
3) La biblioteca de módulos de equipos, es decir cada uno de los módulos que representan al comportamiento de válvulas, intercambiadores, sistema de destilación, sumadores, divisores, flash, compresores, etc.

La primer sección, es decir la lógica general o central o de administración a su vez comprende principalmente las siguientes subsecciones:

- La sección de entrada
- La sección de salida de resultados
- La lógica general de administración

*La lógica general de administración* propiamente dicha es la que está encargada de administrar los distintos procesos que deben ejecutarse para lograr la simulación de un proceso dado. Es decir deberá procesar el diagrama de flujos, decidir si puede resolverse en una secuencia lineal o si existen reciclos, seleccionar sobre cuáles variables deberá iterarse, determinar en función de las corrientes de corte el orden en el cual serán resueltos los equipos, etc. Esto es, deberá manipular un banco de algoritmos que permitan, dado el DFI (diagrama de flujo de información) de la planta, realizar el rasgado, particionado y ordenamiento o secuencia de resolución.

Por otra parte, al finalizar el proceso iterativo de acuerdo al criterio de convergencia definido por el usuario, procederá a detener el proceso de simulación, retener los resultados, es decir almacenar todos los valores convergidos de las corrientes de proceso, los valores y parámetros internos de los equipos, por ejemplo los perfiles internos de torres, composiciones, caudales, temperaturas y presiones de cada etapa, etc. Si no se lograra convergencia luego de una cantidad de iteraciones propiamente estipulada, la lógica central del simulador detendrá el proceso iterativo e informará al usuario por medio del mensaje de error que corresponda.

También, para facilitar la tarea del usuario, existirá un sistema de almacenamiento de información (por ejemplo un Administrador de Base de Datos), en el cual pueden almacenarse resultados de las diversas simulaciones para una misma planta, a los efectos de facilitar la presentación en forma gráfica de los resultados obtenidos, por comparación entre las distintas alternativas simuladas, si fuere necesario.

Por último esta lógica general de administración, que es el verdadero cerebro del simulador, podrá o no tener en cuenta interacciones con otros utilitarios o con otros programas. Por ejemplo, estos datos podrían ser empleados por algún programa de diseño. En general, los simuladores comerciales disponibles tienden cada vez más a incorporar programas específicos de cálculo a los efectos de facilitar la integración de tareas (simulación y Pre-diseño) por ejemplo.

A los efectos de la integrabilidad de la información, se procura que las herramientas del simulador sean compatibles con otras de uso comercial como procesadores de textos, planillas de cálculo, bases de datos, a fin de dar la máxima utilidad a la información.

En cuanto al *sistema de entrada/salida de datos*, es una parte fundamental de todo simulador de uso general. Se procurará que sea lo más amigable posible con el usuario, en general emplean entornos compatibles con Windows, donde cada equipo puede abrirse como una ventana para incorporarse o modificarse los parámetros del mismo. Esto permite al usuario inexperto o poco conocedor del tema pueda hacer uso del sistema.

Desarrollo de módulos generales para un simulador modular

En general, los items a tener en cuenta para abordar el desarrollo de módulos de simulación con el objeto de utilizarlos acoplados a la estructura de un simulador de procesos de propósitos generales son los siguientes:

- Esquema de funcionamiento de un módulo generalizado:

  Se deben considerar las posibles variantes acerca de los distintos tipos de datos conocidos (corrientes de entradas, de salidas, etc.), los grados de libertad, parámetros, filosofía de cálculo, relación con el sistema general, etc.

- Interrelación módulo de equipo -base de datos:

  Aquí se analiza la descripción de la estructura general de conexión (intercambio de datos) entre el módulo de simulación (equipo) y el sistema de almacenamiento de datos del simulador (constantes fisicoquímicos, parámetros de equipos, sistema de entrada-salida, etc.).

- Selección de parámetros de equipos:

  En este punto se describe la estructuración del módulo de acuerdo a las necesidades de la operación a simular. Esto es, definir los grados de libertad del sistema, los parámetros a fijar según los mismos, etc.

- Niveles de cálculo:

  En este punto se identifica la rigurosidad del cálculo que se desea (grados de simplificación).

- Interrelación módulo de equipo-fisicoquímica:

  Describe el esquema que relaciona los módulos de equipos con los programas de estimación de propiedades fisicoquímicas.

  Arquitectura típica de un simulador genérico, modular secuencial

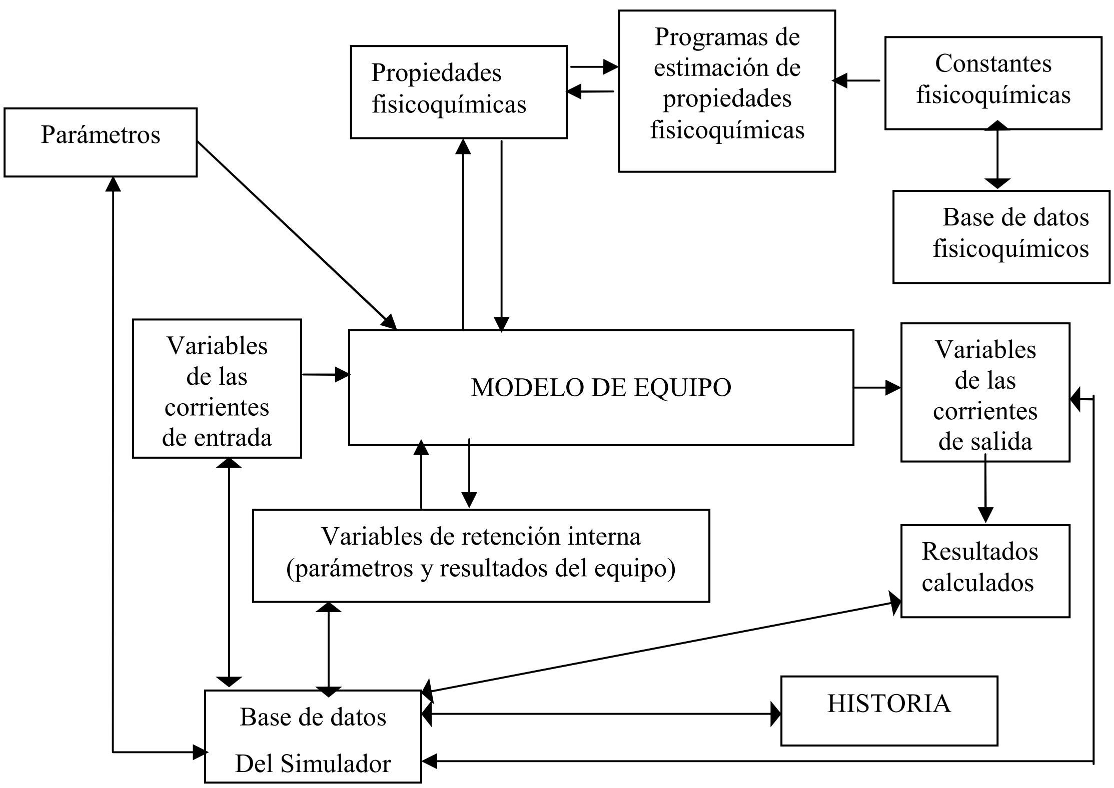



**Figura 6: Arquitectura típica de un simulador modular secuencial**

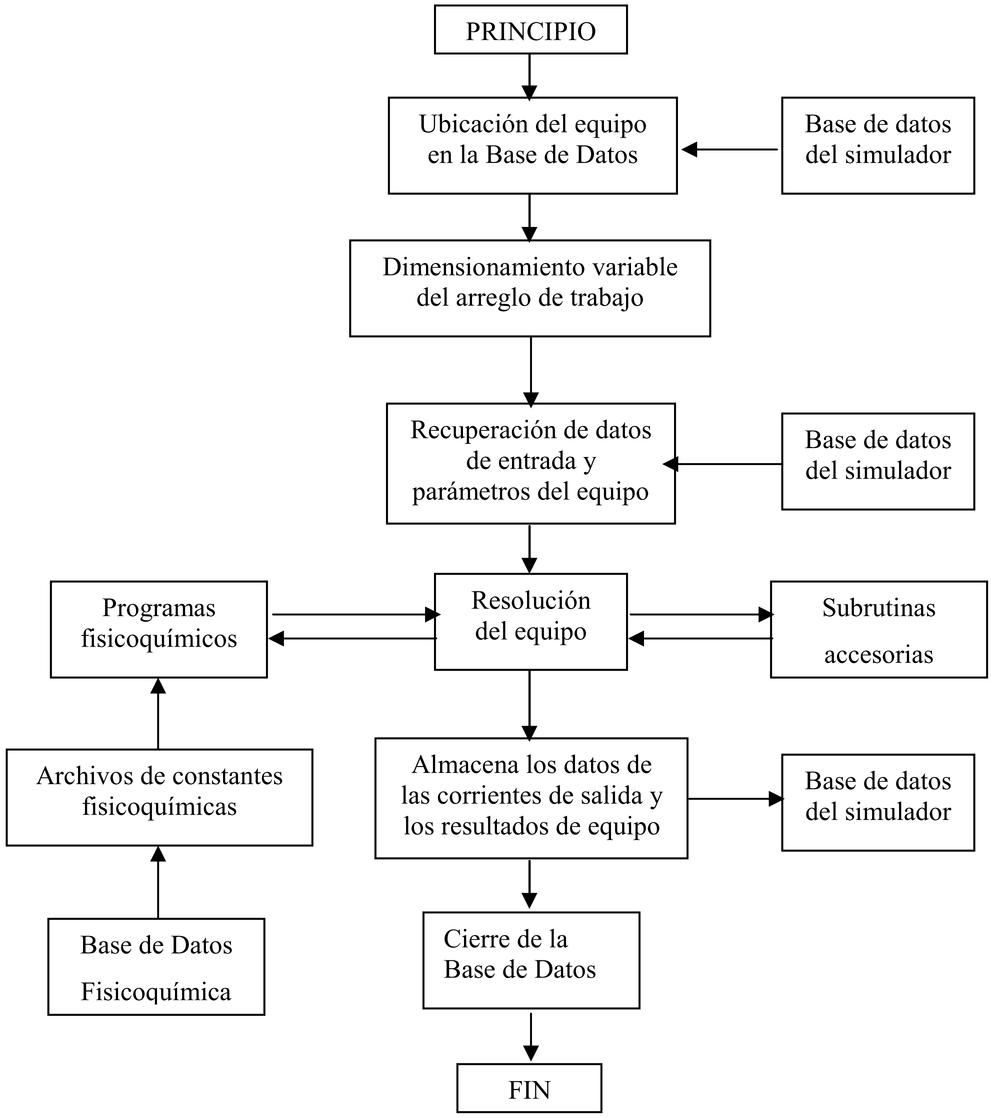



**Figura 7: Esquema de cálculo de cada módulo o equipo del simulador**

Un punto importante en la nueva generación de simuladores orientados al manejo de grandes cantidades de información es la administración y almacenamiento de la misma. En general debe definirse algún tipo de administrador de base de datos para lograr una integración entre los módulos de la lógica central, de ejecución, programas fisicoquímicos, entrada/salida de información, y almacenamiento de los datos en sí.

Finalmente, no se debe perder de vista, que el más potente algoritmo de cálculo, se torna inútil si las propiedades fisicoquímicas son pocos conocidas o si su calculo involucra errores muy importantes.

En ocasiones, para cálculos preliminares, conviene emplear métodos semirigurosos en los que el error introducido es pequeño (en comparación con aquellos que involucren a las propiedades fisicoquímicas) y que por otro lado se ejecutan más rápidamente. Esto no quita el hecho de que deban aplicarse métodos más rigurosos, pero los limita al cálculo final.

# Segunda parte: Optimización

Como ya habíamos mencionado, en los problemas de optimización existen dos objetivos en conflicto:

1. Construir un modelo suficientemente preciso que describa apropiadamente el problema.
2. Construir un modelo tratable, que se pueda resolver mediante alguna técnica de resolución.

## *Estructura de un problema de optimización*

Se buscará maximizar o minimizar una función llamada objetivo cuyas variables deber estar regidas, además, por cierto número de restricciones que pueden ser de igualdad o desigualdad.

Maximizar o minimizar $f(\underline{x})$ Función objetivo

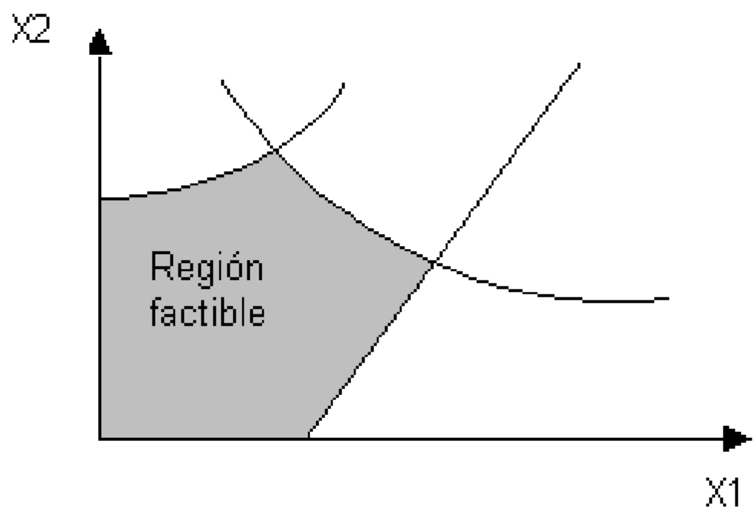
Sujeto a:

| | | |
|---|---|---|
| $H_k(\underline{x}) = 0$ | , $k=1,2,...,K$ | Restricciones de igualdad |
| $G_j(\underline{x}) \geq 0$ | , $j=1,2,...,J$ | Restricciones de desigualdad |
| $x_i^l \leq x_i \leq x_i^v$ | , $i=1,2,...,N$ | Restricciones de desigualdad |

## Región factible:

Es el conjunto de valores de las variables independientes que satisfacen simultáneamente las restricciones de igualdad y de desigualdad. Así por ejemplo, las condiciones de igualdad solo se satisfacen en una curva, en el caso de que se traten de solamente dos variables y, obviamente, pueda representarse en el plano. Para el mismo caso una condición de desigualdad, separa al plano en 2 zonas, una de valores factibles y la otra de valores no factibles.

Región factible de un problema de optimización que involucra a 2 variables.




## *Tipo de problemas*

1. Problemas no restringidos.
2. Problemas restringidos.

## Tamaño de los problemas

1. *Problemas de pequeña escala.*

   Menos de 5 variables incógnitas.

Menos de 5 restricciones.

Enfoque de resolución: Solución numérica computacional basada en conceptos de la teoría de optimización multiplicadores de Lagrange, teoremas de Kuhn-Tucker, etc.

2. *Problemas de escala intermedia.*

Número de variables incógnitas: 5 a 100.

Número de restricciones: 5 a 100.

Enfoque de resolución: Técnicas de búsqueda computacional a través del espacio de soluciones factibles y para cada punto mejorado.

PNL (programación no lineal): 100 a 200 variables.

PL (programación lineal): 400 restricciones y 1000 variables.

3. *Problemas de gran escala.*

Del orden de 1000 variables y restricciones.

Enfoque de resolución: Técnicas de resolución que utilizan estructuras especiales del problema de programación en gran escala.

## Algoritmos iterativos y convergencia.

Las computadoras digitales de alta velocidad permiten una alta capacidad para resolver en forma eficiente operaciones repetitivas, esto es, son ideales para ejecutar algoritmos iterativos.

Objeto del algoritmo:

Es la búsqueda de un vector óptimo $\underline{x}^*$ (solución).

1) Selecciona un vector inicial $\underline{x}_0$.
2) A partir de $\underline{x}_0$ genera un vector mejorado $\underline{x}_1$.
3) A partir de $\underline{x}_1$ genera un vector mejorado $\underline{x}_2$ y así sucesivamente encuentra una secuencia de puntos cada vez mejores,

$$\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k, \dots, \underline{x}_n,$$

que se aproximan a un punto solución $\underline{x}^*$

Programación lineal:

La secuencia generada permite encontrar la solución después de un número finito de pasos.

Programación no lineal:

Generalmente, la secuencia no alcanza en forma exacta a la solución del problema, pero converge hacia ella.

Aspectos de la teoría de algoritmos iterativos.

1- Concepción del algoritmo.

2- Análisis de la convergencia global.

3- Análisis de la convergencia local.

## Procedimiento genérico para resolver problemas de optimización

1- Analizar el proceso y definir las variables y características específicas de interés. Preparar una lista de todas las variables.

2- Determinar el criterio de optimización y especificar la función objetivo en términos de las variables listadas en 1), conjuntamente con los coeficientes.

3- Desarrollar, vía expresiones matemáticas, un modelo de proceso o equipo que relaciones las variables de entrada-salida de un proceso con los coeficientes asociados.

4- Si la formulación del problema es demasiado grande:

a) Dividirlo en partes manejables.

b) Simplificar la función objetivo.

5- Aplicar una técnica de optimización adecuada respecto a la formulación matemática del problema

6- Verificar las respuestas y examinar la sensibilidad de los resultados a cambios en los coeficientes e hipótesis del problema.

## *Programación lineal*

El modelo de programación lineal (LP) es extensamente utilizado en casi todas las áreas del conocimiento. La relación lineal entre variables le confiere la particularidad de ser un modelo fácil de generar y simple de resolver y analizar. Esto permite automatizar el proceso de generación del modelo, por lo que es posible generar grandes modelos LP. Publicaciones recientes han reportado trabajo con modelos LP de más de cien mil variables.

Para casos de 2 variables, puede emplearse el método gráfico. Para modelos de 2 a más variables, se emplea un algoritmo llamado SIMPLEX diseñado por Dantzig en la década del cincuenta. En la década del ochenta, se ha publicado el método de Karmarkar, pero aun, el simplex es más empleado.

En los casos de programación lineal, tanto la función objetivo, como las restricciones, son combinaciones lineales de las variables de interés:

Maximizar o minimizar: $f_0(X_1, X_2, ..., X_n)$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&f_1(X_1, X_2, ..., X_n) \leq b_1 \\
&f_2(X_1, X_2, ..., X_n) < b_2 \\
&.............................. \\
&f_k(X_1, X_2, ..., X_n) \geq b_k \\
&.............................. \\
&f_n(X_1, X_2, ..., X_n) = b_n
\end{aligned}
$$

Para interpretar mejor el uso de éstas técnicas, recurriremos a un ejemplo. La empresa Blue Ridge Hot Tubs, fabrica y vende dos modelos de baños calientes: Aqua-Spa y la Hydro-Lux. Su propietario y gerente, Howie Jones, necesita decidir cuanto de cada tipo producir durante el ciclo siguiente de producción. El baño en sí y las bombas, la compra prefabricadas, a las cuales le adiciona la tubería, para confeccionar dichos baños. Howie instala el mismo tipo de bombas a ambos baños. Su disposición de las mismas es de 200 en cada ciclo. Ambos baños tienen diferentes requerimientos de material y mano de obra. Así, cada Aqua-Spa requieren 9 horas de mano de obra y 12 pies de tubería mientras que cada Hydro-Lux requiere 6 horas de mano de obra y 16 pies de tubería. Howie, espera disponer de 1566 horas de mano de obra y 2880 pies de tubería en cada ciclo de producción. Cada Aqua-Spa provee de una ganancia de 350$ mientras que cada Hydro-Lux vendido reporta 300$. Su propietario confía en vender toda su producción. La pregunta es, ¿Cuántos Aqua-Spa y cuántos Hydro-Lux producir para maximizar las ganancias en cada ciclo?

### La formulación del modelo LP

Los pasos generales a seguir en la formulación de un modelo LP, son:

1. Comprender el problema.

A pesar de la obviedad del mismo, este paso debe ser previo al de formulación de la función objetivo, para que ésta enfoque realmente a la resolución de dicho problema.

En nuestro Caso implica, determinar el número a producir de cada tipo de baño caliente para obtener la máxima ganancia, disponiendo de 200 bombas, 1566 horas de mano de obra y 2880 pies de tubería.

2. Identificar las variables de decisión.

Así, en nuestro ejemplo, $X_1$ será la cantidad de Aqua-Spa y $X_2$ los de Hydro-Lux a producir.

3. Formular la función objetivo como combinación lineal de las variables de decisión.

Esta función expresa la relación matemática entre las variables que debe ser maximizada o minimizada.

En nuestro ejemplo: por cada Aqua-Spa vendido (X1), ingresan 350 $ y por cada Hydro-Lux (X2), en cambio, 300 $. La ganancia total será:

$350\ X_1 + 300\ X_2$ valor que se desea maximizar.

4. Formular las restricciones como combinación lineal de la variables de decisión.

Estos son valores que restringen las variables en el problema a resolver.

En nuestro ejemplo: tenemos tres restricciones. La primera en que el número de bombas disponibles es de 200, valor que no puede superarse. Esto se expresaría:

$$1\ X_1 + 1\ X_2 \leq 200$$

La segunda restricción es el número de horas disponibles: 1566. Cada baño requiere un numero diferente de horas, y juntas no deben superar el límite permitido:

$$9\ X_1 + 6\ X_2 \leq 1566$$

La tercera y última restricción es sobre los pies de tuberías disponibles. La cantidad total requerida deberá ser menor o igual que 2880:

$$12\ X_1 + 16\ X_2 \leq 2880$$

5. Identificar los límites superiores e inferiores de las variables.

En nuestro ejemplo, se asume que ni X1 ni X2 deben ser negativos o ceros, lo que se expresa en forma matemática, como:

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

## Modelo LP del problema

En resumen, el modelo planteado para el problema será:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MAX | 350 Xl + 300 X2 | | | | | | |
| Sujeto a: | 1 | X1 + | 1 | X2 | ≤ | 200 |
| | 9 | X1 + | 6 | X2 | ≤ | 1566 |
| | 12 | X1 + | 16 | X2 | ≤ | 2880 |
| | 1 | X1 | | | ≥ | 0 |
| | | | 1 | X2 | ≥ | 0 |

## Resolución intuitiva del modelo de LP

Esta se basa en un método gráfico. En primer lugar, dibujar un sistema de coordenadas cartesianas en las dos variables del problema. Cada restricción representada por una desigualdad, divide al espacio en dos zonas: una factible y la otra, no. Las igualdades, solo se cumplen en una recta. Una vez introducidas todas las restricciones quedará una zona en la que las variables asumen todas las restricciones.

Zona factible a las restricciones del problema:

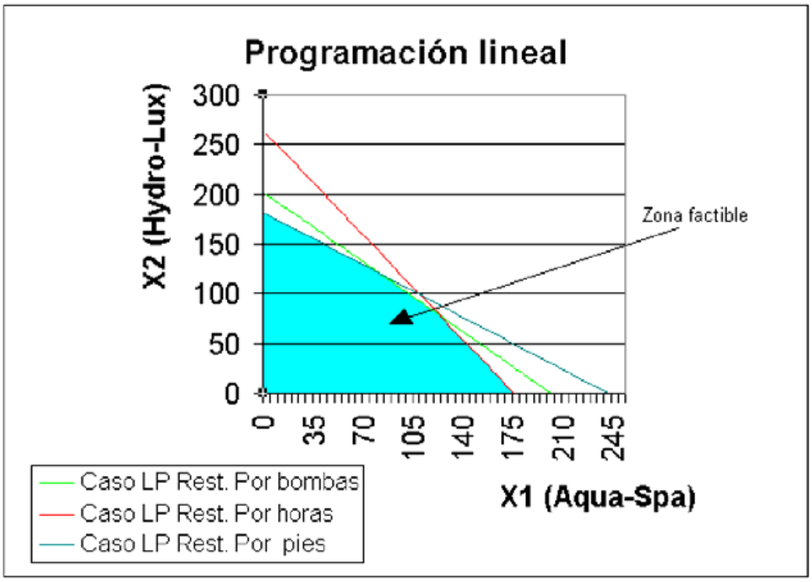



**Figura 8**

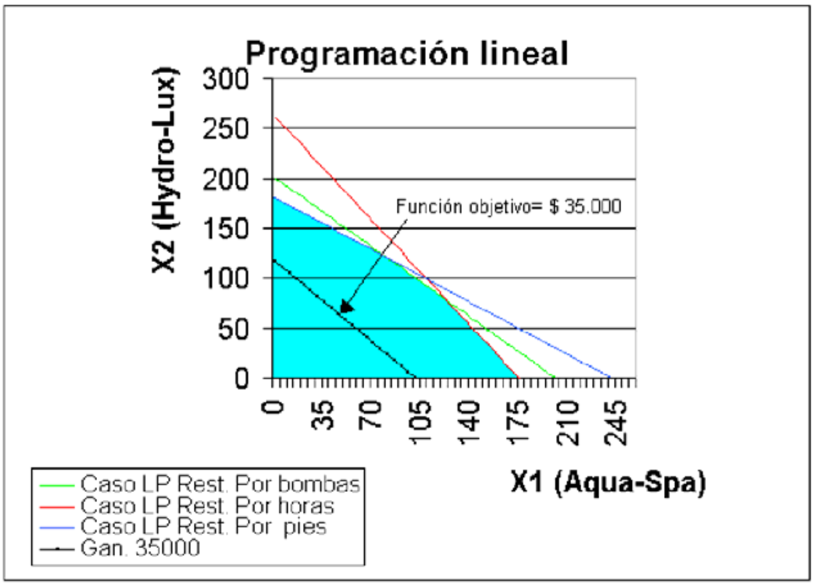



**Figura 9**

En algún punto de la zona pintada, las variables, maximizan la función objetivo. Ver que las condiciones de no-negatividad de las variables están incluidas en los ejes coordenados. Para seguir Supongamos un valor para la función objetivo (por ejemplo 35000 $) y grafiquemos su línea.

Supongamos ahora una ganancia de 52500 $ y grafiquemos este nuevo objetivo.

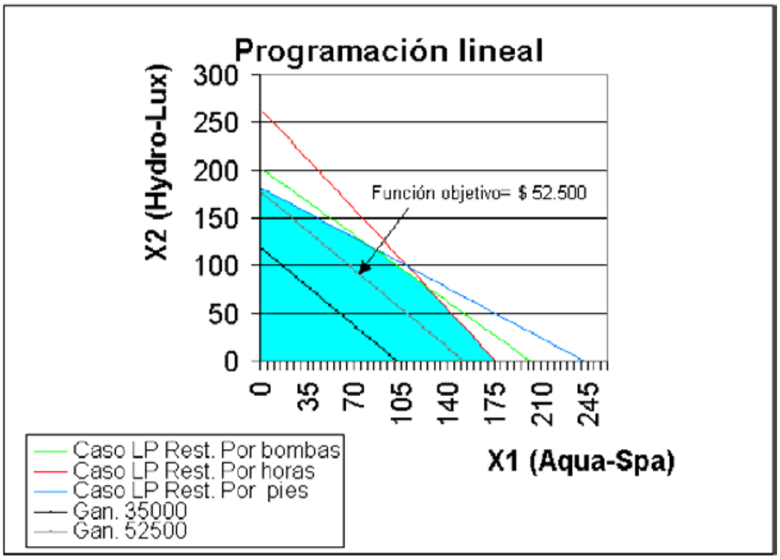



**Figura 10**

Vemos que la nueva solución es paralela a la anterior. Para hallar la óptima, se debe trazar una paralela que pase por el punto más alejado de la zona factible.

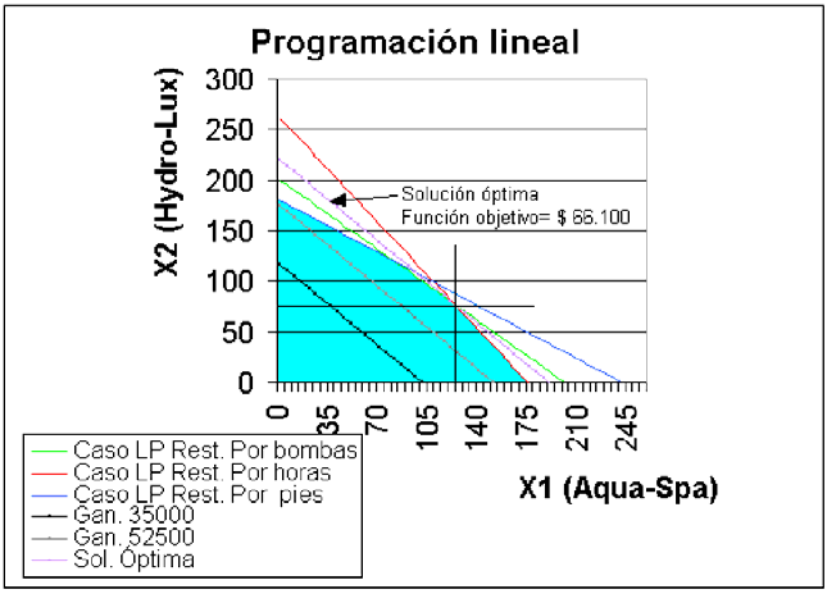



**Figura 11**

El punto óptimo se encuentra para $X_1$= 122 y $X_2$= 78. Esto significa que deberán producirse 122 Aqua-Spa y 78 Hydro-Lux para que la ganancia sea máxima, esto es:

$$350\ \$ * 122 \ + \ 300\ \$ * 78 = \ 66100\ \$$$

Cualquier otro punto que caiga en la zona factible, dará una menor ganancia, mientras que no puede haber otro punto de mayor ganancia y a la vez cumpla las restricciones del problema. De hecho, la solución óptima, siempre caerá sobre uno de los vértices generados por las rectas que representan las restricciones. En nuestro caso son cinco los vértices:

| Nº | $X_1$ | $X_2$ | Ganancia |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 $ |
| 2 | 0 | 180 | 54000 $ |
| 3 | 80 | 120 | 64000 $ |
| 4 | 122 | 78 | 66100 $ |
| 5 | 174 | 0 | 60900 $ |

El punto 4 es el óptimo.

## Condiciones especiales en modelos LP

Soluciones óptimas alternativas

Hemos visto que en nuestro ejemplo, la solución era única. Se debe a que la curva de nivel de máxima ganancia solo intercepta en un punto a la zona factible, precisamente en el vértice formado por las restricciones dadas por las bombas (línea verde, v) y por la disponibilidad de horas (línea roja, r), como se aprecia en una ampliación de dicha zona:

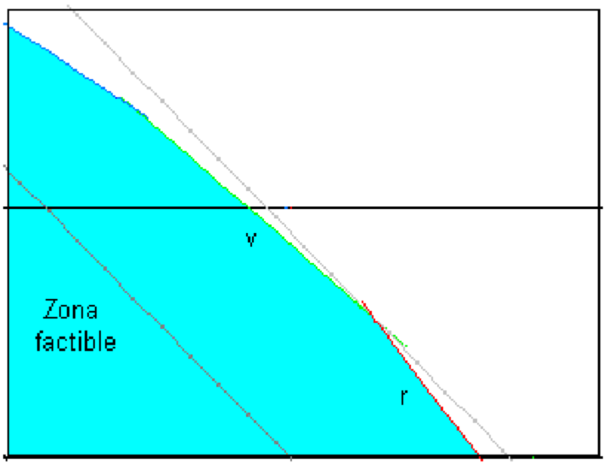



**Figura 12**

Vemos que si la curva de nivel representativa del objetivo fuera paralela algunas de las restricciones todos los puntos de intersección serían igualmente factibles e igualmente óptimos. Esto no es una dificultad, de hecho en casos de programación y optimización de múltiples objetivos, esto es muy deseable.

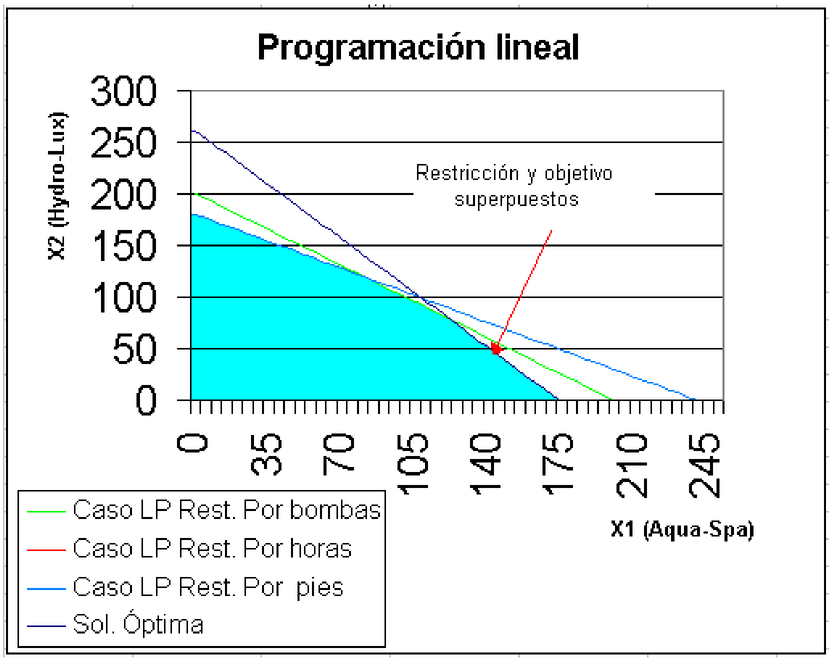



**Figura 13**

El caso se presentó al modificar las condiciones de la función objetivo. Si cada Aqua-Spa reporta 450 $ (en lugar de los 350 $) todos los puntos de intersección darán la misma ganancia de 78300 $.

Restricciones redundantes

Se presenta, cuando una restricción no determina, en sí, a la zona factible:

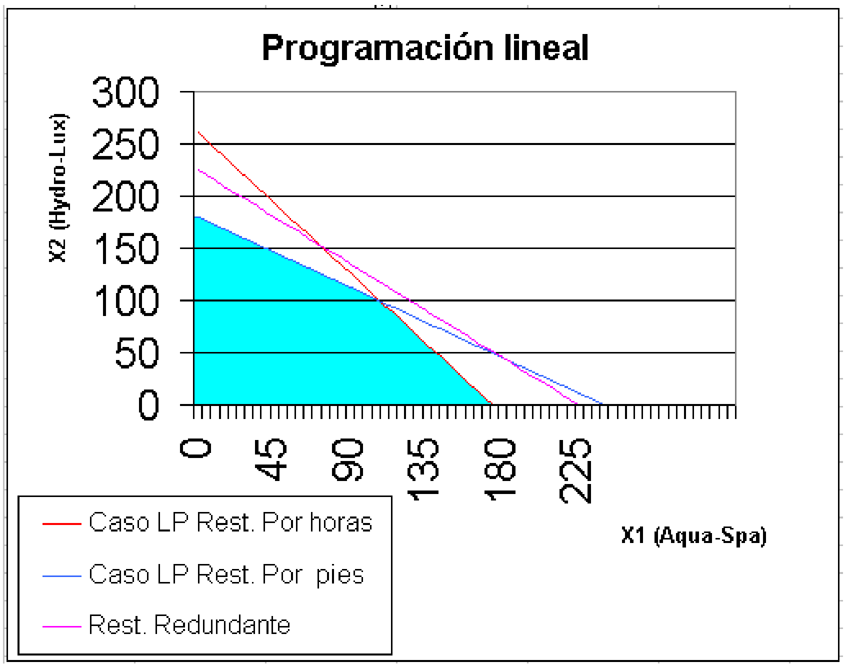



**Figura 14**

El modelo es el mismo al anterior, solo que se aumentó la disponibilidad de bombas de 200 a 225. Por lo tanto la condición redundante corresponde a las bombas. Esto significa que aunque se dispone de más bombas la solución óptima no mejora. En éste caso, el modelo podría resolverse sin ésta restricción.

Soluciones ilimitadas

Hemos visto, que las restricciones imponen un área cerrada, pero podría darse el caso, que el área sea infinita y, por lo tanto, siempre habrá una solución mayor hasta tender al infinito. Se dice, entonces, que la zona factible es ilimitada, por lo que el método de identificar la solución óptima a través de los vértices no puede aplicarse.

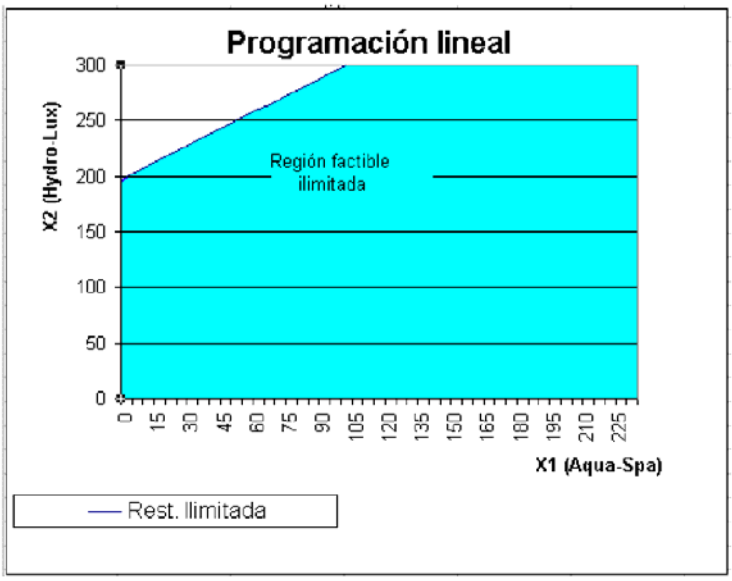



**Figura 15**

Solución Infactible

Se produce cuando las regiones factibles de cada restricción no se interceptan en ningún punto. En otras palabras habrá puntos que cumplan una o varias restricciones pero no todas. En éste caso el problema no tiene solución.

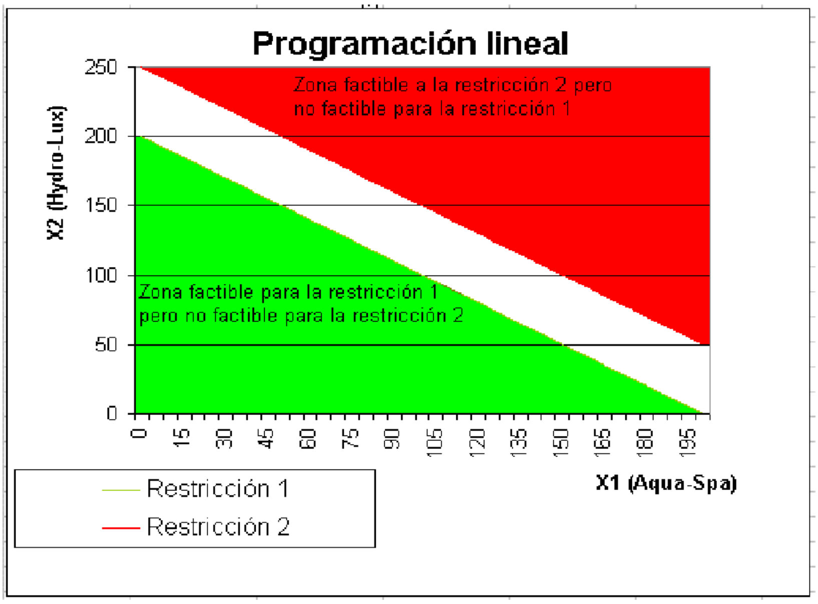



**Figura 16**

## Resumen para la resolución gráfica de problemas de programación lineal

1. Dibujar las rectas correspondientes a cada restricción
2. 
3. Identificar la zona factible, esto es, los puntos del gráfico que satisfacen simultáneamente a todas las restricciones.
4. Localizar la solución óptima por uno de los siguientes métodos:
    a. Dibujar una o más curvas de nivel para función objetivo y determinar la dirección en la cual la función objetivo logra su resultado deseado (máximo o mínimo). Trasladar en forma paralela una recta a dichas curvas de nivel en la dirección determinada hasta que la misma intercepte al punto más lejano. Determinar las coordenadas de dicho punto, el cual será el óptimo
    b. Identificar todos los puntos extremos de la región factible (vértices) y determinar el valor de la función objetivo en cada uno de ellos. Si la zona factible es limitada, el punto con el mejor resultado será el óptimo.

## Modelado y resolución de problemas LP con hojas de cálculos.

La resolución de éste tipo de problemas se ha vuelto tan importante que numerosos software de hoja de cálculos, como Excel, Quattro Pro y Lotus 1-2-3, han incorporado una herramienta llamada Solver que permite encontrar objetivos en funciones incorporadas en dichas planillas. El objetivo puede ser encontrar máximo, mínimo o simplemente un número determinado.

Además de la flexibilidad de los sistemas informáticos respecto de los gráficos, éstos últimos se vuelven inútiles cuando el problema incluye más de 2 variables. Como veremos a continuación, no solo los resultados son evaluados por el programa sino también los límites y sensibilidad de dichas soluciones.

A manera de ejemplo, resolveremos el mismo problema anterior aplicando el Solver de Excel, el cual puede encontrarse en herramientas, en caso de que no haya sido instalado.

<u>Pasos a seguir en la implementación de un problema LP en hoja de cálculo.</u>

1. Organizar los datos del modelo en la hoja.

   El objetivo es que el reporte final sea lo más claro a la hora de leerlo. Para ello, cada restricción, la función objetivo y las variables serán identificadas por etiquetas.
2. Reservar celdas separadas en la planilla para representar cada variable de decisión en el modelo algebraico
3. Crear una fórmula en una celda de la hoja para representar la función objetivo.
4. Para cada una de las restricciones, crear una fórmula en celdas apartes de la planilla que represente el miembro izquierdo de dichas fórmulas. Los valores que pueden tomar las restricciones se colocaran en celdas contiguas para facilitar su identificación con el valor que finalmente tomaran dichas restricciones.

<u>Implementado el modelo.</u>

Las celdas B5 y C5 contienen los valores que deseamos hallar (se inicializan con ceros). Las celdas B6 y C6 contienen las ganancia que provee cada baño vendido. La ganancia total será pues:

B5*B6 + C5*C6

Esta fórmula puede apreciarse en la figura 17, donde el valor es cero debido a que la variables fueron inicializadas así. La fórmula de la restricción por bombas disponibles está en la celda D9,

B5*B9 + C5*C9

Que deberá ser menor o igual al que figura en E9. La restricción por horas de operación disponibles está formulada en D10, y es,

B5*B10 + C5*C10

Cuyo valor deberá ser menor o igual que el que figura en E10. La fórmula de restricción por pies de tuberías disponibles está en la celda D11,y es,

B5*B11 + C5*C11

Que debe valer igual o menos que el que figura en la celda E11.

La hoja completa queda como la que se observa en la figura 17. Para resolver el problema se busca en herramientas el comando Solver. Aparecerá una pantalla como el de la figura 18. En la misma puede apreciarse donde se debe introducir la función objetivo, las celdas cambiantes (las variables que deseamos encontrar) y las restricciones. Esta última tiene un cuadro de diálogo que permite introducir igualdades, desigualdades o funciones lógicas como se aprecia en la figura 19.

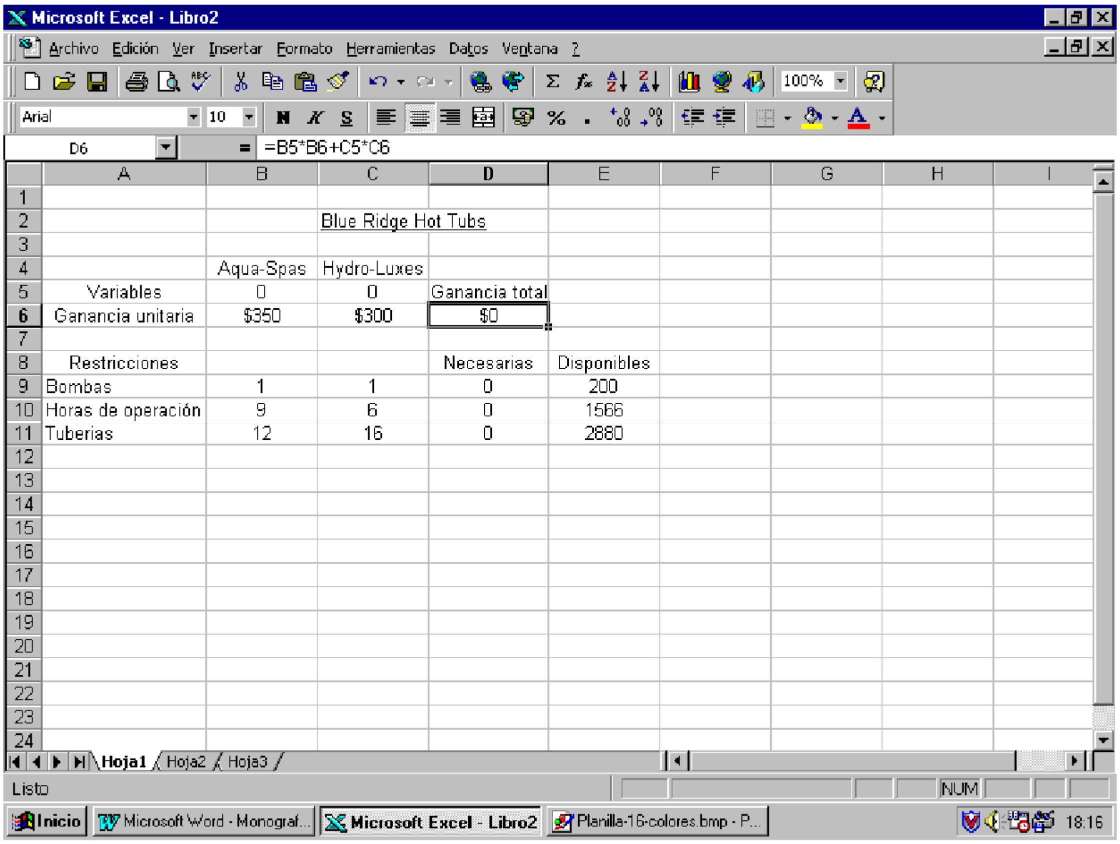



**Figura 17**


**Figura 18**

En nuestro caso nos interesa que los valores necesarios sean menores o iguales a los disponibles. A través del cuadro de diálogo de la figura 19, introducimos todas las restricciones incluso la de no negatividad de las variables de interés. La pantalla del Solver quedará como el de la figura 20.

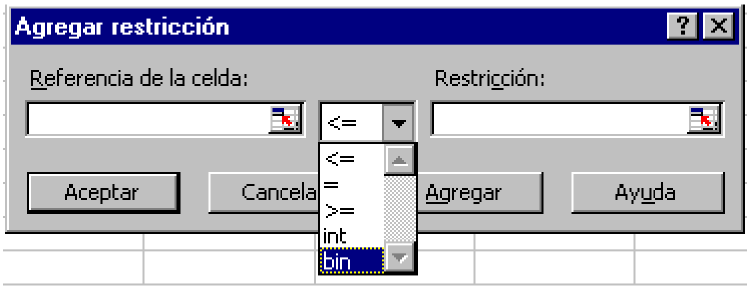



**Figura 19**


**Figura 20**

Al presionar en el botón Resolver, el Solver encuentra la solución y agrega en la planilla. Una vez resuelta, el Solver, suministra 3 informes: Respuestas, Sensibilidad y Límites.

Por lo pronto vemos que la solución buscada es igual al del método gráfico, esto es, que produciendo 122 Aqua-Spas y 78 Hydro-Luxes, se obtiene la máxima ganancia. En la figura 20 se aprecia que el objetivo buscado era el máximo, pero podría ser el mínimo o cualquier otro valor. La ganancia óptima será de 66.100 $. Se emplean todas las bombas, todas las horas, pero solo 2712 pies de tubería de los 2880 pies que se disponían.

Vemos lo sencillo que sería modificar algunas de las restricciones y encontrar una nueva solución.

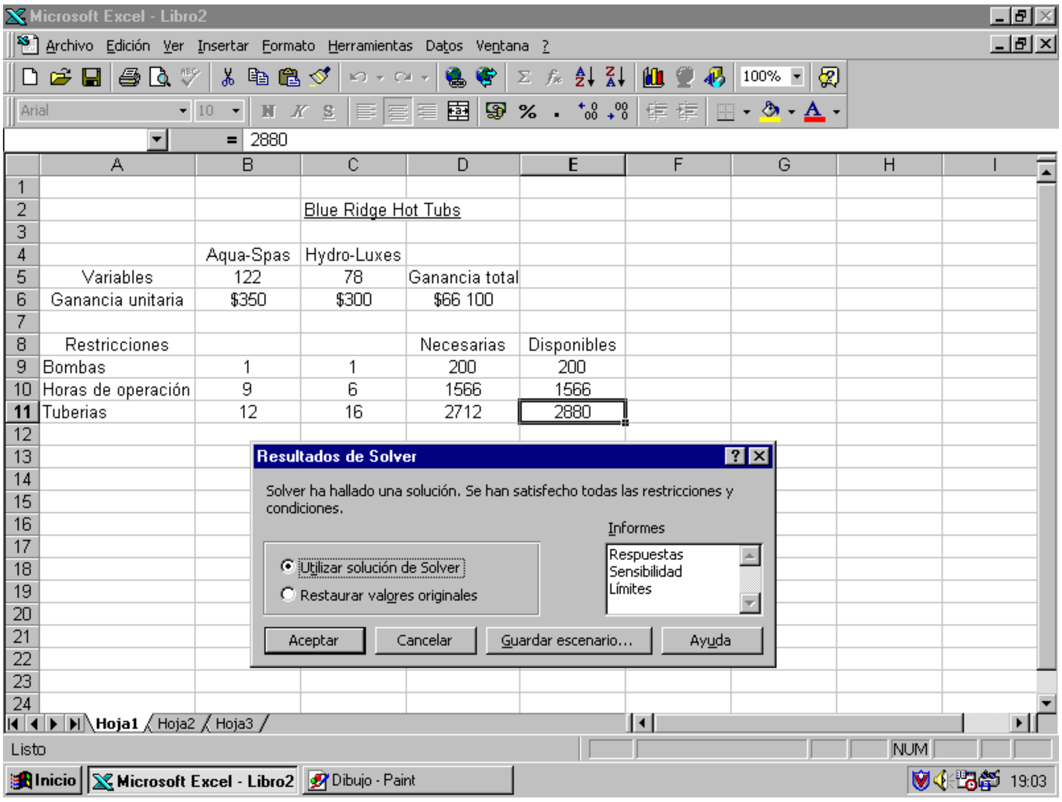
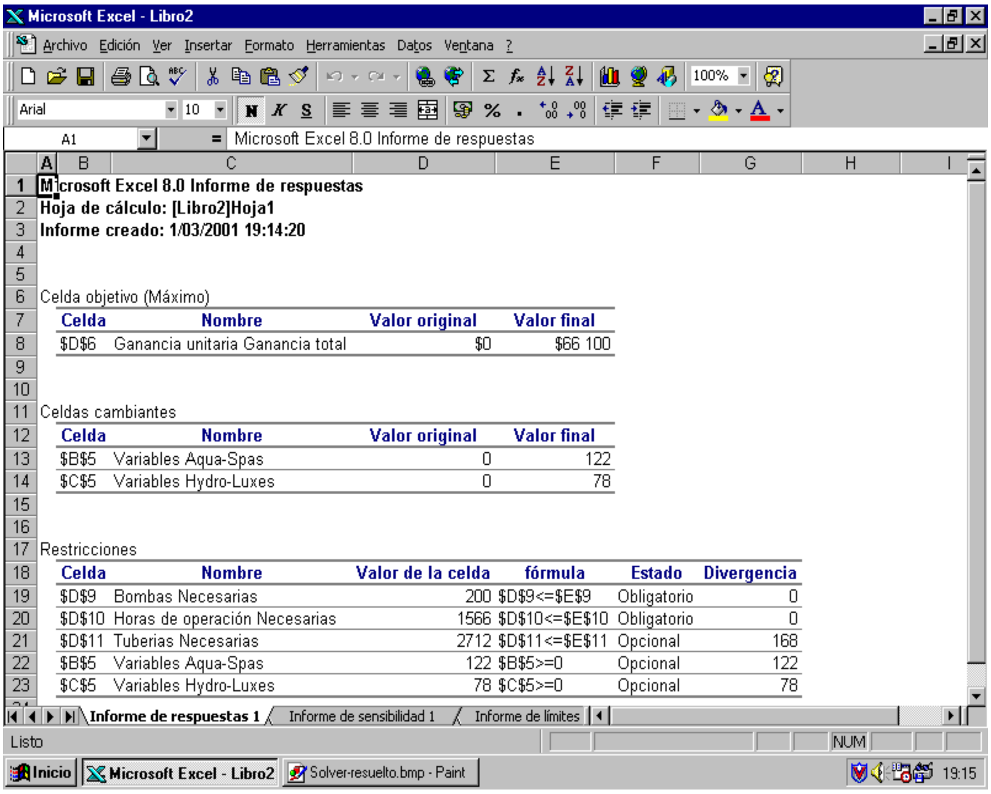



**Figura 21**

**Reporte de resultados**

En la figura 22 se aprecian los resultados. En la celda objetivo se lee $0 que es el valor inicial y $66.100 que es el valor final u óptimo. En celdas cambiantes, los valores iniciales y finales. En restricciones aparecen los valores necesarios y los disponibles y su diferencia (Divergencia). Cuando la divergencia es 0, la restricción es de cumplimiento obligatorio, en otros casos se dice que es opcional. Este tipo de informes (y los que se discutirán luego) son propicios para ser presentados puesto que son claros en su reporte de la solución.



Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [Libro2]Hoja1
Informe creado: 1/03/2001 19:14:20

Celda objetivo (Máximo)

| Celda | Nombre | Valor original | Valor final |
|---|---|---|---|
| $D$6 | Ganancia unitaria Ganancia total | $0 | $66 100 |

Celdas cambiantes

| Celda | Nombre | Valor original | Valor final |
|---|---|---|---|
| $B$5 | Variables Aqua-Spas | 0 | 122 |
| $C$5 | Variables Hydro-Luxes | 0 | 78 |

Restricciones

| Celda | Nombre | Valor de la celda | fórmula | Estado | Divergencia |
|---|---|---|---|---|---|
| $D$9 | Bombas Necesarias | 200 | $D$9<=$E$9 | Obligatorio | 0 |
| $D$10 | Horas de operación Necesarias | 1566 | $D$10<=$E$10 | Obligatorio | 0 |
| $D$11 | Tuberias Necesarias | 2712 | $D$11<=$E$11 | Opcional | 168 |
| $B$5 | Variables Aqua-Spas | 122 | $B$5>=0 | Opcional | 122 |
| $C$5 | Variables Hydro-Luxes | 78 | $C$5>=0 | Opcional | 78 |

**Figura 22**

## Reporte de sensibilidad

Facilita información acerca de la sensibilidad de la solución a que se realicen pequeños cambios en la fórmula definida en el cuadro Definir celda objetivo del cuadro de diálogo Parámetros de Solver o de las restricciones. No se genera este informe para los modelos que tengan restricciones enteras. En modelos no lineales, el informe facilita los valores para las gradientes y los multiplicadores de Lagrange. En los modelos lineales, el informe incluye costos reducidos, otros precios, coeficiente de objetivos (con aumentos y disminuciones permitidos) y rangos de restricciones hacia la derecha.

En la figura 23 se aprecia dicho informe. El multiplicador de Lagrange dá una buena medida del mejoramiento de la función objetivo al aumentar la restricción correspondiente en un valor unitario. Así, en la restricción correspondiente a Bombas, el multiplicador de Lagrange es igual a 200, esto quiere decir que si aumentamos el número de bombas disponibles de 200 a 201, la ganancia aumentará en 200 $, lo que daría un valor total de 66.300 $. En cambio si aumentamos en una hora las disponibles para mano de obra, el aumento es de solo 16.66666, lo que llevaría la ganancia total a 66.116 $ con 67 centavos. Por último, si aumentáramos en un pie la longitud de tuberías disponibles, la ganancia no varía.

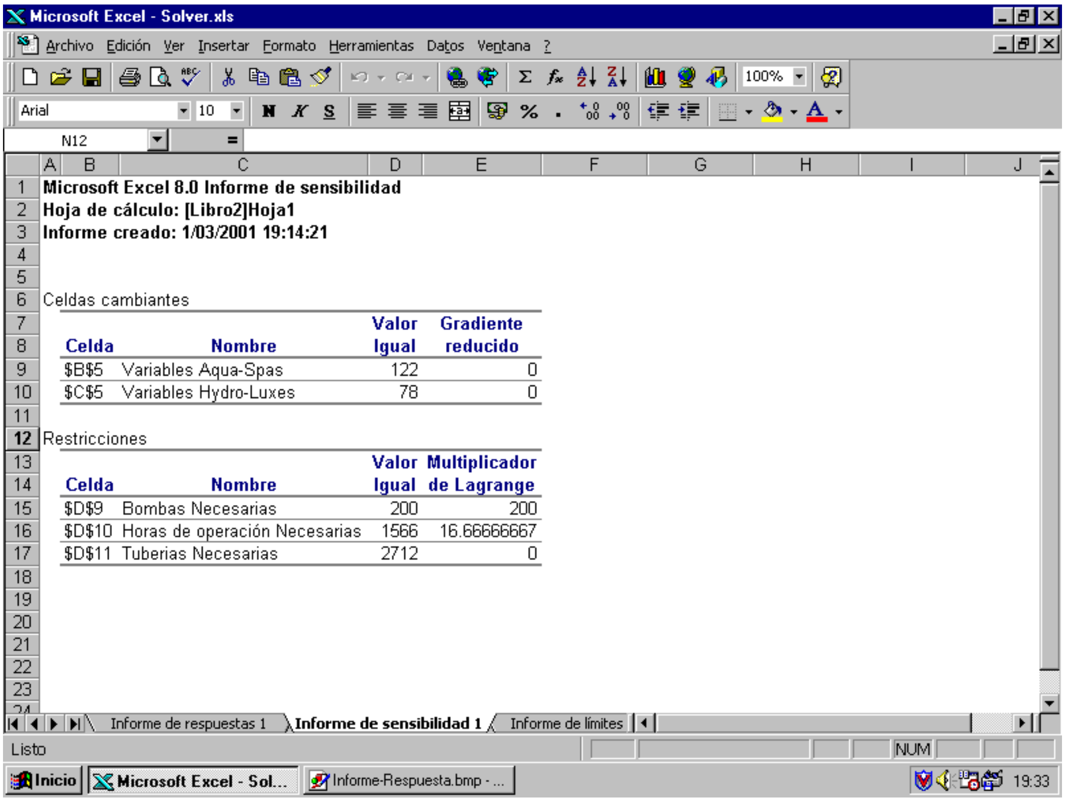
Este tipo de reporte, nos indica claramente sobre cual restricción deberíamos trabajar para mejorar la ganancia. Es claro que los pies de tuberías disponibles no son críticos, en cambio, sobre las otras dos restricciones, conviene mejorar la correspondientes a las bombas, que reditúan más que en el caso de las horas de mano de obra.

El gradiente reducido es igual a la ganancia unitaria menos los valores unitarios de los recursos consumidos. Por ejemplo:

Gradiente reducido del Aqua-Spa = 350 - 200 * 1 - 16.67 * 9 - 0 * 12 = 0

Gradiente reducido del Hydro-Lux= 300 - 200 * 1 - 16.67 * 6 - 0 * 16 = 0

En aquellos casos en los que la ganancia marginal es menor que el valor marginal de bienes requeridos para su producción, no producen una solución óptima.



Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Libro2]Hoja1
Informe creado: 1/03/2001 19:14:21

Celdas cambiantes

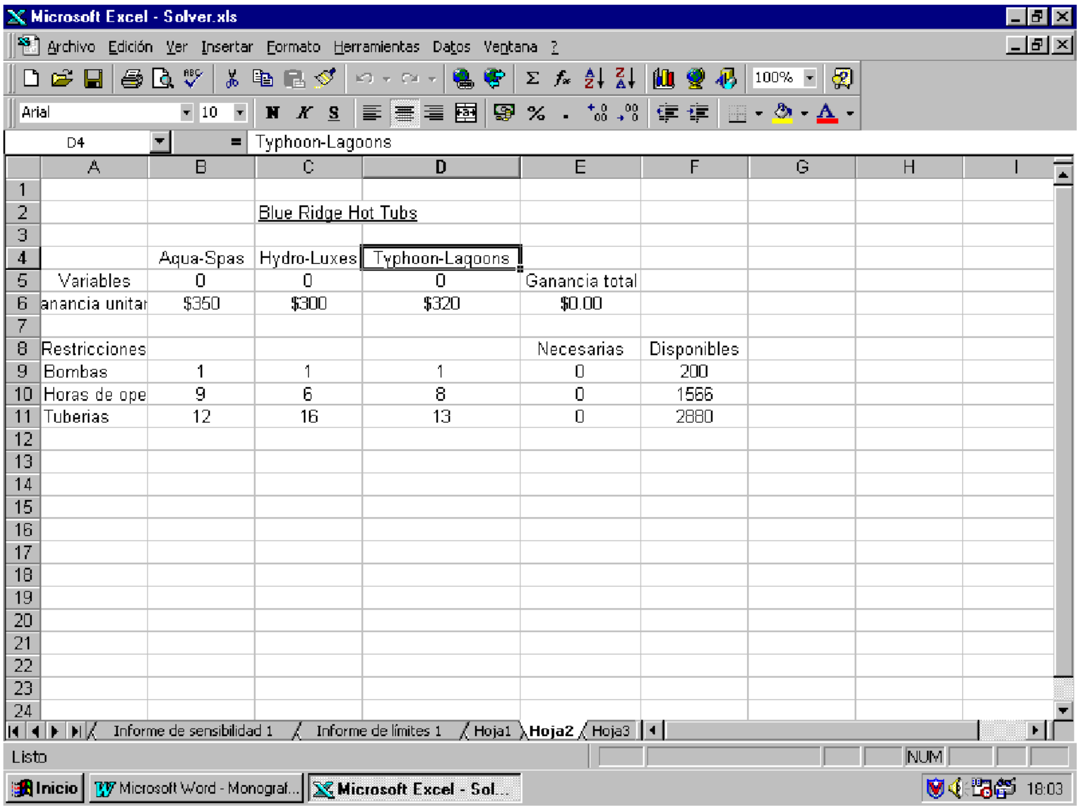
| Celda | Nombre | Valor Igual | Gradiente reducido |
|---|---|---|---|
| $B$5 | Variables Aqua-Spas | 122 | 0 |
| $C$5 | Variables Hydro-Luxes | 78 | 0 |

Restricciones

| Celda | Nombre | Valor Igual | Multiplicador de Lagrange |
|---|---|---|---|
| $D$9 | Bombas Necesarias | 200 | 200 |
| $D$10 | Horas de operación Necesarias | 1566 | 16.66666667 |
| $D$11 | Tuberias Necesarias | 2712 | 0 |

**Figura 23**

Como demostración de lo anterior veamos que pasa si la empresa piensa en producir otro tipo de baño caliente llamado Typhoon-Lagoon. La ganancia unitaria del mismo es de 320 $, requiere 1 bomba, 8 horas de mano de obra y 13 pies de tubería. Introduzcamos estos datos en la planilla.



Blue Ridge Hot Tubs

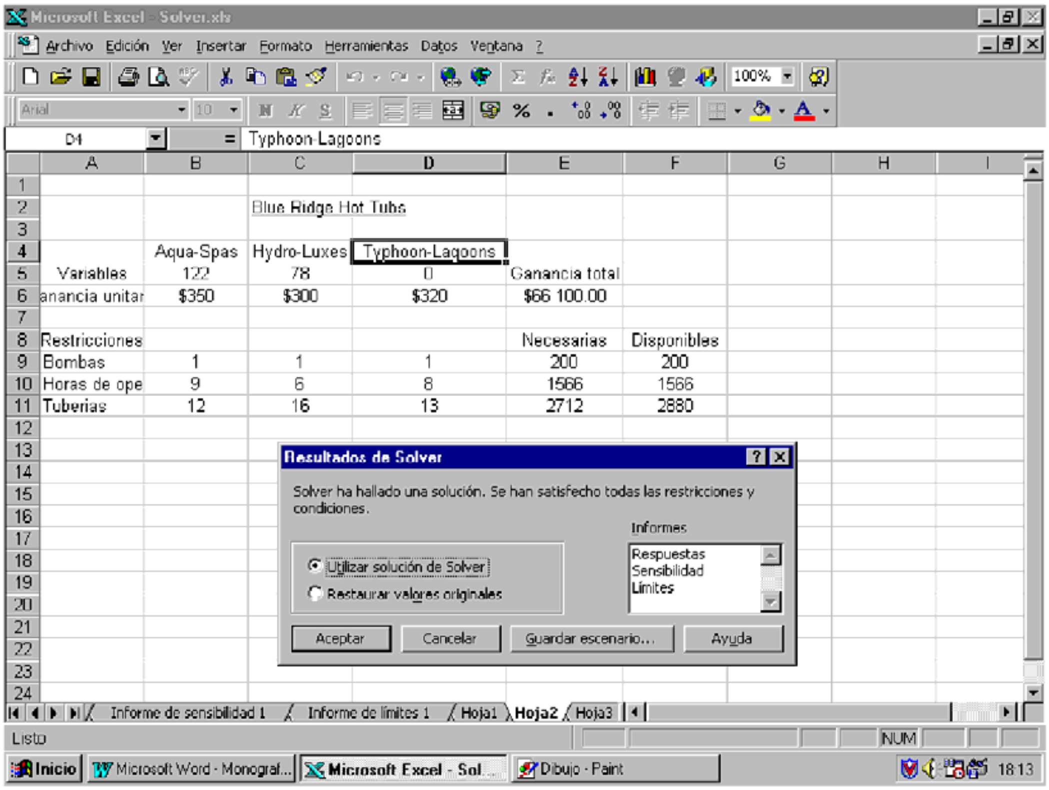
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | Aqua-Spas | Hydro-Luxes | Typhoon-Lagoons | | |
| 5 | Variables | 0 | 0 | 0 | Ganancia total | |
| 6 | anancia unitar | $350 | $300 | $320 | $0.00 | |
| 8 | Restricciones | | | | Necesarias | Disponibles |
| 9 | Bombas | 1 | 1 | 1 | 0 | 200 |
| 10 | Horas de ope | 9 | 6 | 8 | 0 | 1566 |
| 11 | Tuberias | 12 | 16 | 13 | 0 | 2880 |

**Figura 24**

Ahora busquemos Solver en Herramientas y completémoslo como en el caso anterior. El cuadreo de diálogo del Solver queda:


**Figura 25**

**Figura 25**




Se aprecia que la producción de los Typhoon-Lagoons no contribuyen en nada al mejoramiento del problema.

Gradiente reducido del Typhoon-Lagoons= 320 - 200 * 1 - 16.67 * 8 - 0 * 13 = -13.33

Esto significa, que se debería incrementar en 13.33 $ la ganancia marginal de dicho producto para que la solución varíe. En efecto, si se aumenta a 334 $, se obtiene el resultado de la figura 27. Vemos que ahora sí ha cambiado la solución, pero por el contrario no convendría producir los Aqua-Spas por los mismos motivos de antes.

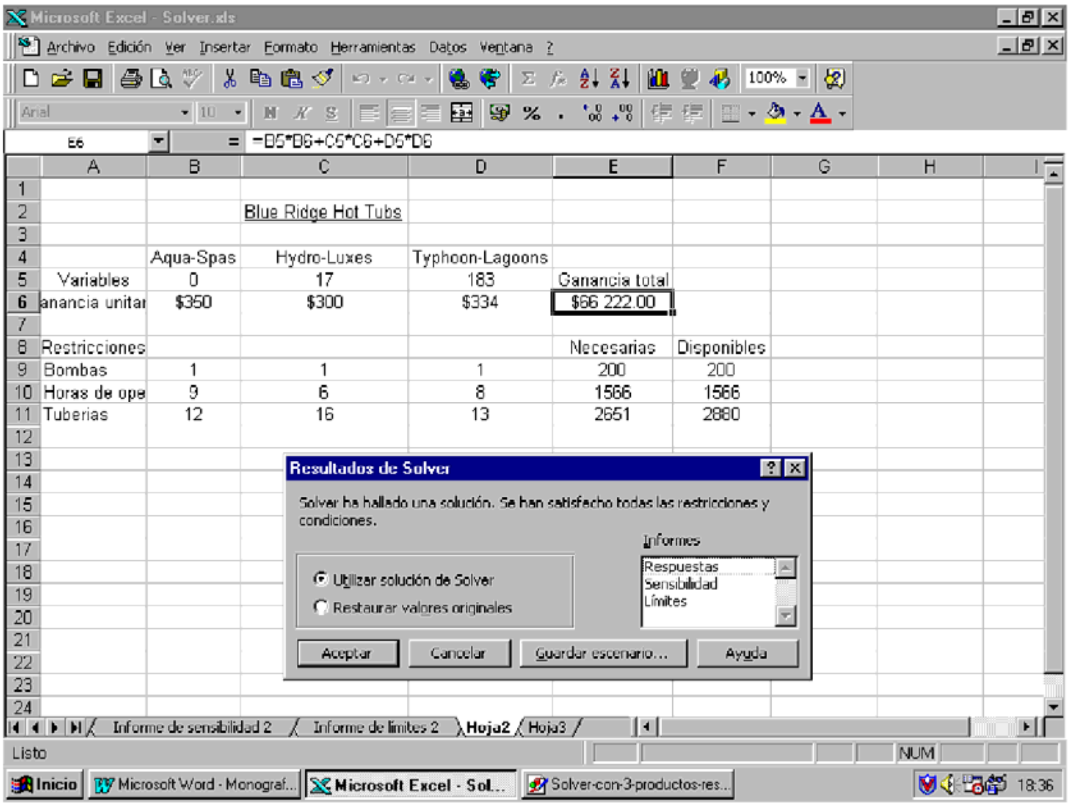



**Figura 26**

El reporte de sensibilidad será, ahora:

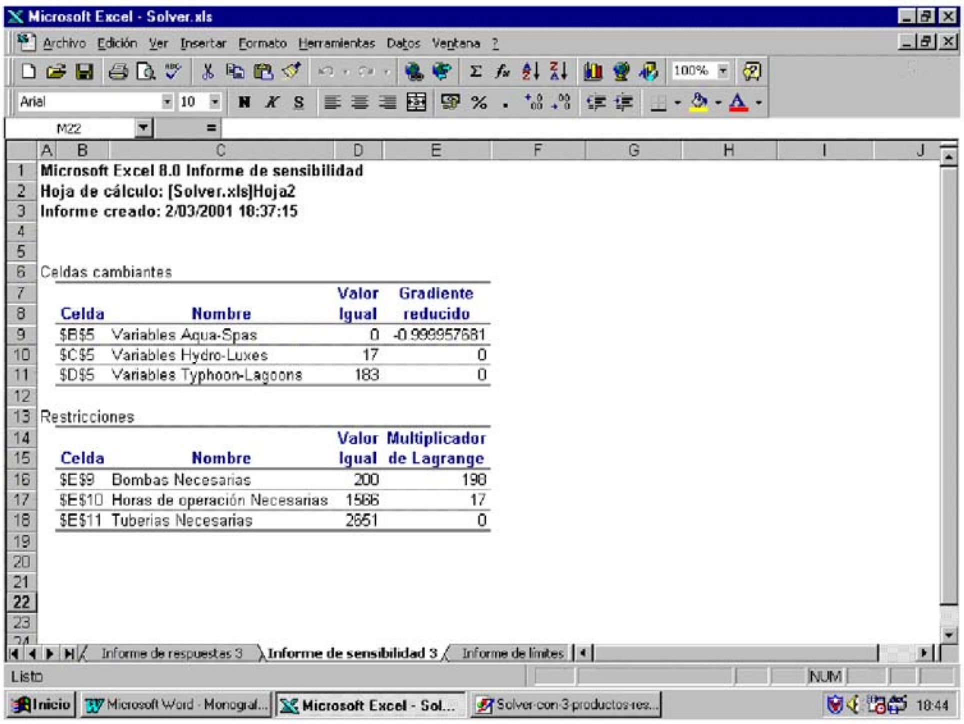



**Figura 27**

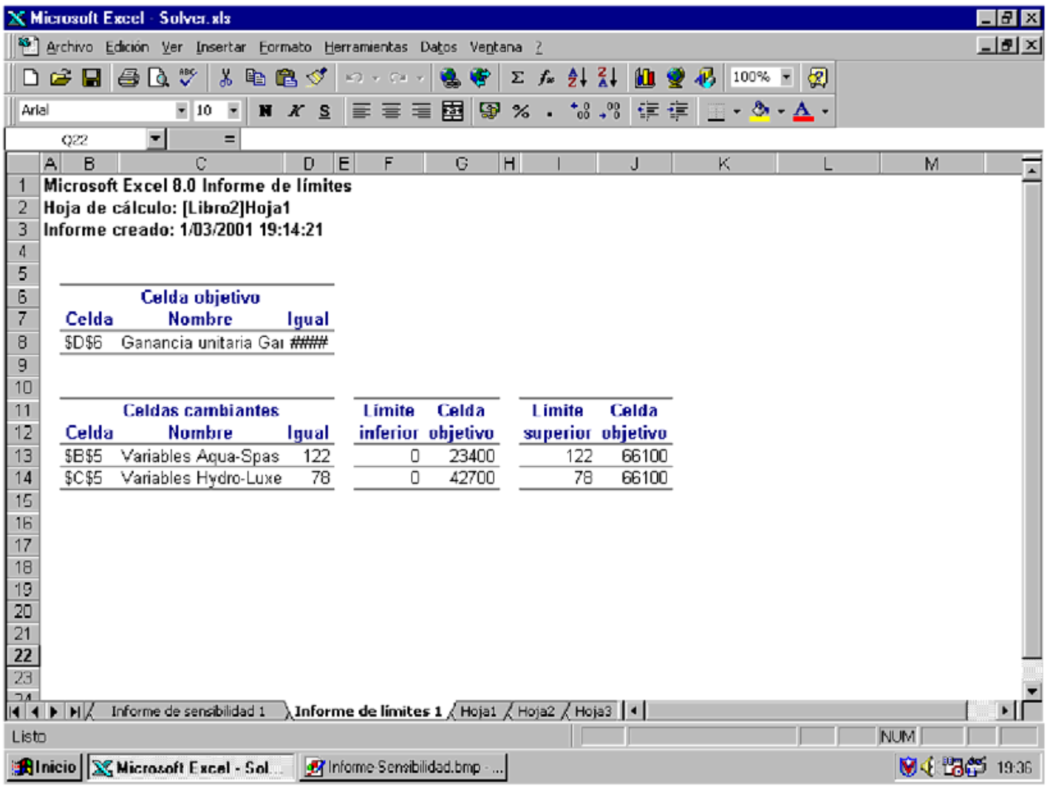
Los valores óptimos de los gradientes reducidos para cada caso son:

| Tipo de problema | Valor óptimo de la variable de decisión | Valor óptimos del gradiente reducido |
|---|---|---|
| | límite inferior simple | ≤ 0 |
| Maximización | entre los límites | = 0 |
| | Límite superior simple | ≥ 0 |
| | límite inferior simple | ≥ 0 |
| Minimización | entre los límites | = 0 |
| | Límite superior simple | ≤ 0 |

**Reportes de límites**

Muestra una lista con la celda objetivo y las celdas ajustables con sus valores correspondientes, los límites inferior y superior así como los valores del objetivo. No se genera este informe para los modelos que tengan restricciones enteras. El límite inferior es el valor mínimo que puede tomar la celda ajustable mientras se mantienen todas las demás celdas ajustables fijas y se continúa satisfaciendo las restricciones. El límite superior es el valor máximo.

**Figura 28**



Microsoft Excel 8.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [Libro2]Hoja1
Informe creado: 1/03/2001 19:14:21

| Celda objetivo | | |
|---|---|---|
| Celda | Nombre | Igual |
| $D$6 | Ganancia unitaria Gai | #### |

| Celdas cambiantes | | | Límite | Celda | Límite | Celda |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Celda | Nombre | Igual | inferior | objetivo | superior | objetivo |
| $B$5 | Variables Aqua-Spas | 122 | 0 | 23400 | 122 | 66100 |
| $C$5 | Variables Hydro-Luxe | 78 | 0 | 42700 | 78 | 66100 |

## Método Simplex.

En el caso de Blue Ridge Hot Tubs, el problema contenía dos variables de interés, sin embargo, el Solver, emplea cinco variables. En la página 19 veíamos que las restricciones definían cinco puntos (de los cuales el cuatro era el óptimo). Estos puntos no son otra cosa, sino, el adoptar los valores que igualan a las resticciones.

El método Simplex hace esto, transforma el sistema de inecuaciones en un sistema de igualdades mediante el uso de variables auxiliares llamadas Slacks (débiles). Por ejemplo, la siguiente desigualdad se transforma en igualdad por el empleo de una variable slack S.

$$a_{k1} * X_1 + a_{k2} * X_2 + .... + a_{kn} * X_n \leq b_k$$

$$a_{k1} * X_1 + a_{k2} * X_2 + .... + a_{kn} * X_n + S_k = b_k$$

En el problema-ejemplo que venimos siguiendo, el sistema quedaría:

| | | |
|---|---|---|
| Max | $350 * X_1 + 300 * X_2$ | } Ganancia |
| | $1 * X_1 + 1 * X_2 + S_1$ | } Restricción por bombas |
| | $9 * X_1 + 6 * X_2 + S_2$ | } Restricción por horas de trabajo |
| | $12 * X_1 + 16 * X_2 + S_3$ | } Restricción por tuberías |
| | $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$ | } Condiciones de no negatividad |

Si el número de variables supera al de restricciones, se deben tomar cierto número de ellas y ser consideradas como variables básicas, mientras que las restantes (variable no-básicas) se fijan en el límite inferior. Con el sistema obtenido, se resuelven sus incógnitas las cuales dan una solución básica factible que corresponde a uno de los vértices de intersección de las restricciones.

Al haber 3 restricciones y 5 variables, debemos tomar 3 variables básicas y 2 no-básicas, lo que da diez formas distintas de posibles soluciones básicas factibles, que son:

| | Variables básicas | Variables mo-básica | Solución | Valor función objetivo |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $S_1, S_2, S_3$ | $X_1, X_2$ | $X_1=0$ , $X_2=0$ <br> $S_1$,=200, $S_2$=1566,$S_3$=2880 | 0 |
| 2 | $X_2, S_1, S_2$ | $X_1, S_3$ | $X_1=0$ , $X_2=180$ <br> $S_1=20$, $S_2=486$, $S_3=0$ | 54.000 |
| 3 | $X_1, X_2, S_2$ | $S_2, S_3$ | $X_1=80$ , $X_2=120$ <br> $S_1=0$ ,$S_2=126$, $S_3=0$ | 64.000 |
| 4 | $X_1, X_2, S_3$ | $S_1, S_2$ | $X_1=122$, $X_2=78$ <br> $S_1=0$ , $S_2=0$, $S_3=168$ | 66.100 |
| 5 | $X_1, S_1, S_3$ | $X_2, S_2$ | $X_1=74$ , $X_2=0$ <br> $S_1=26$, $S_2=0$ , $S_3=792$ | 60.900 |
| 6* | $X_1, X_2, S_1$ | $S_2, S_3$ | $X_1=108$, $X_2=99$ <br> $S_1=-7$ , $S_2=0$, $S_3=0$ | 67.500 |
| 7* | $X_1$ ,$S_1, S_2$ | $X_2, S_3$ | $X_1=240$ , $X_2=0$ <br> $S_1=-40$ , $S_2=-594$, $S_3=0$ | 87.400 |
| 8* | $X_1, S_2, S_3$ | $X_2, S_1$ | $X_1=200$ , $X_2=0$ <br> $S_1=0$ , $S_2=-234$, $S_3=480$ | 70.000 |
| 9* | $X_2, S_2, S_3$ | $X_1, S_1$ | $X_1=0$ , $X_2=200$ <br> $S_1=0$ , $S_2=366$, $S_3=-320$ | 60.000 |
| 10* | $X_2, S_1, S_3$ | $X_1, S_2$ | $X_1=0$ , $X_2=261$ <br> $S_1=-61$ , $S_2=0$, $S_3=-1296$ | 78.300 |

Los puntos marcados por * son infactibles debido a que no cumplen la condición de no-negatividad. Los puntos 1 a 5 son los que delimitan la zona factible, como se ilustra en la figura 30.

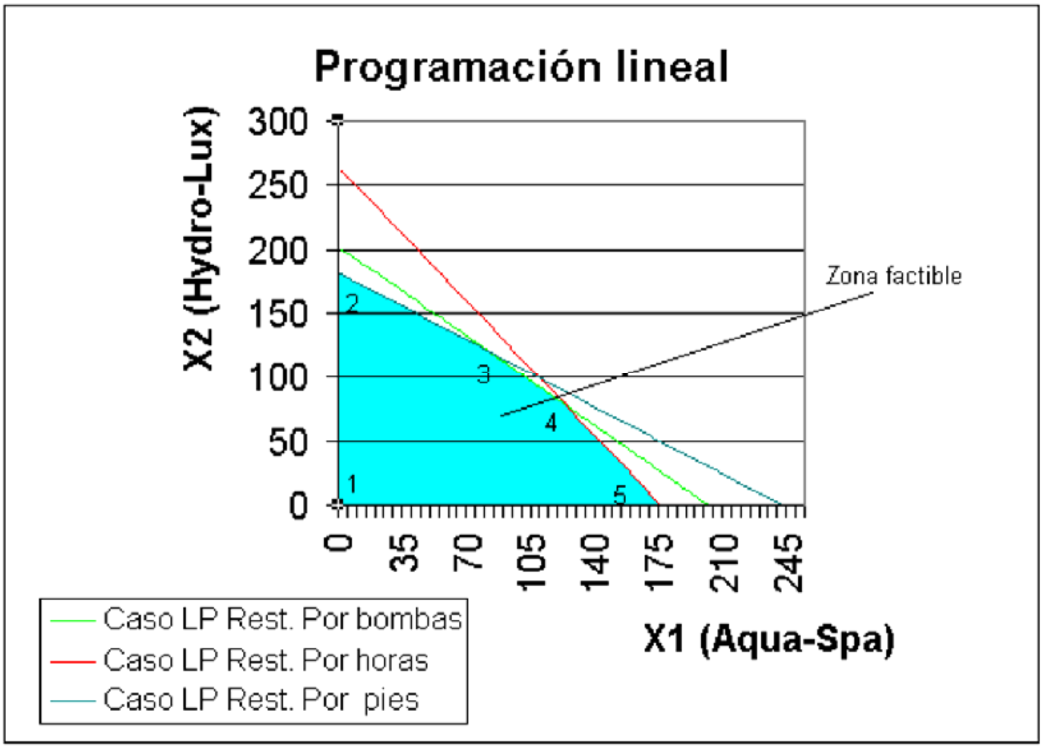



**Figura 29**

El método Simplex identifica una de las soluciones básicas factibles y compara el valor de la función objetivo con la correspondiente con los puntos adyacentes. Si ningún punto adyacente al de estudio es mejor, dicho punto es el óptimo.

### *Programación lineal entera.*

En ocasiones, la variable de interés, solo puede asumir valores enteros. Este problema no es tan simple como parecería a simple vista, y constituye un problema de programación lineal entera, o ILP (por su sigla en inglés).

En el ejemplo que seguimos de Blue Ridge Hot Tubs, las variables son enteras, ya que resulta evidente que solo pueden venderse unidades discretas y no fracciones.

### Relajación.

Un problema ILP, puede resolverse como LP, considerando que las variables no son enteras. Esta es una relajación del problema ILP a LP. A priori, la zona factible para ambas formas de plantear el problema son dramáticamente distintas. Mientras que el caso ILP, la zona factible está determinada por una serie finita de puntos, en los problemas LP la cantidad de puntos que forman dicha zona factible es infinita. Por otro lado todas las soluciones para ILP, lo son también para LP pero no así a la inversa.

### Resolviendo el problema de relajamiento.

En el ejemplo de estudio, la solución factible fue que había que producir 122 Aqua-Spas y 78 Hydro-Lux, es decir que dieron valores enteros. No siempre así, como lo demostraremos con el mismo ejemplo, pero modificado. Así, supongamoes que son 1520 las horas de mano de obra disponible (en lugar de 1566) y 2650 los pies de tubería que se pueden emplear (en vez de 2880). Con ésta información, acudiremos al Solver de Excel para hallar la solución óptima.

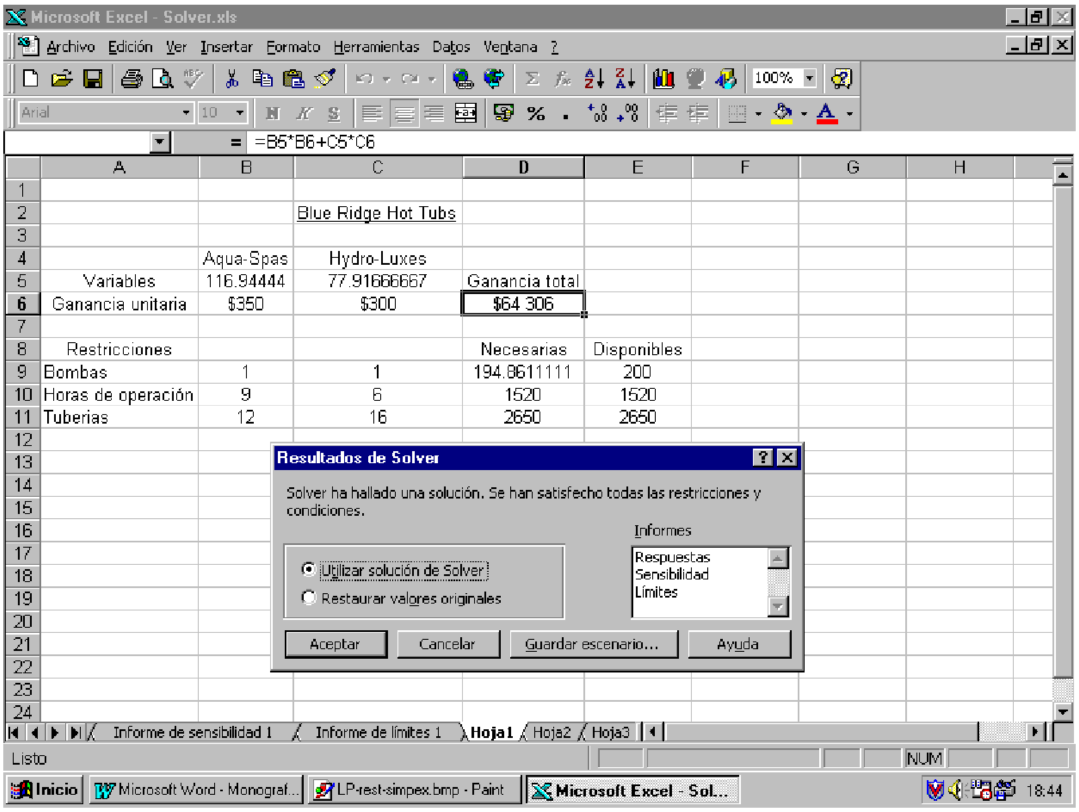



**Figura 30**

La solución óptima no es entera, por lo que viola la condición correspondiente. Un punto interesante a considerar es que la solución del problema ILP nunca puede ser mejor que el de LP.

Una tentación sería, la de redondear las cifras hasta un entero. Pero en éste caso, la solución sería 117 y 78 , lo que viola la restricción de las horas de mano de obra disponibles (1521).

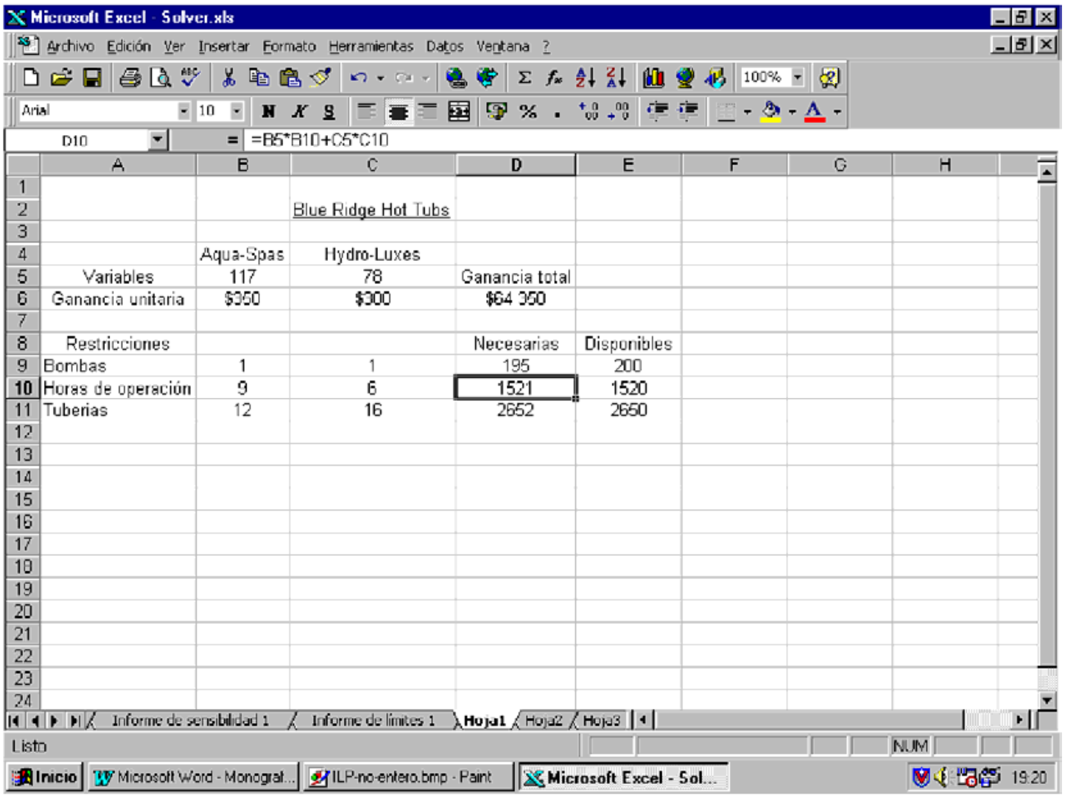
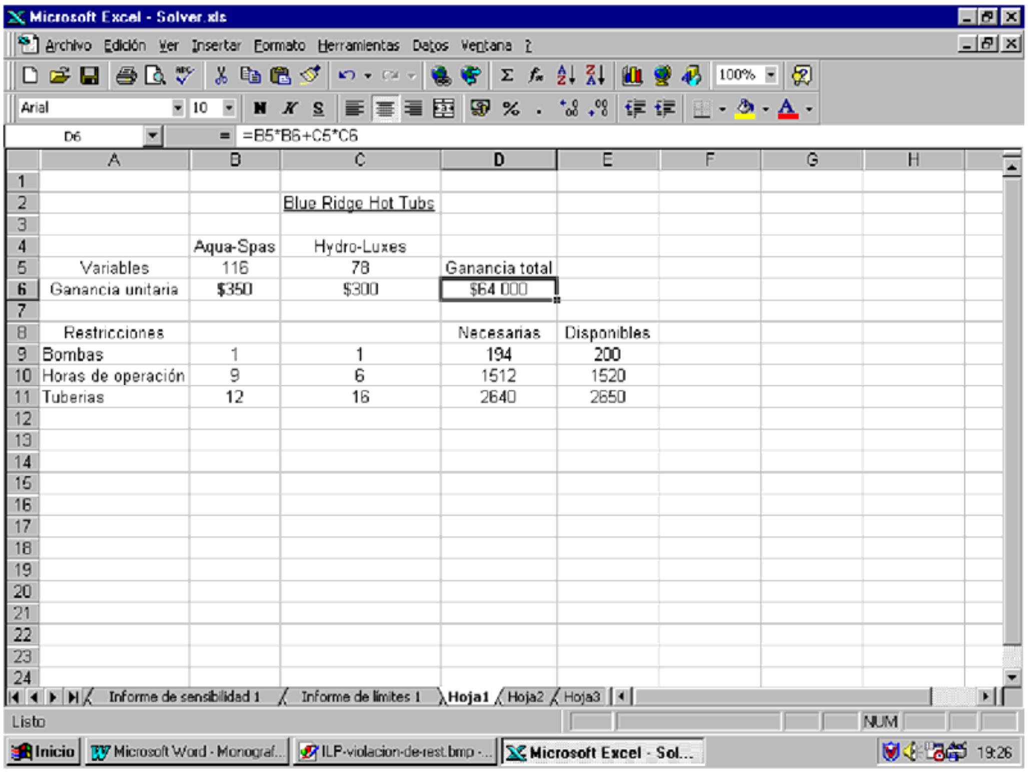



**Figura 31**

Pero con el redondeo, no hay garantía de que la solución encontrada sea la óptima. Así por ejemplo, podríamos reducir los Aqua-Spa de 117 a 116, lo que daría:




La solución es factible ya que satisface todas las restricciones, pero ¿Es la óptima?. Para

**Figura 32**

averiguarlo vamos a hacer uso de la herramienta Solver de Excel.

Para ello debemos introducir una nueva condición, esto es que las variables de interés sean enteras. El cuadro de diálogo de restricciones para variables entera queda:


**Figura 33**

Y el cuadro de diálogos del Solver queda:


Haciendo click en el botón Resolver del Solver, se obtiene la solución.

**Figura 34**

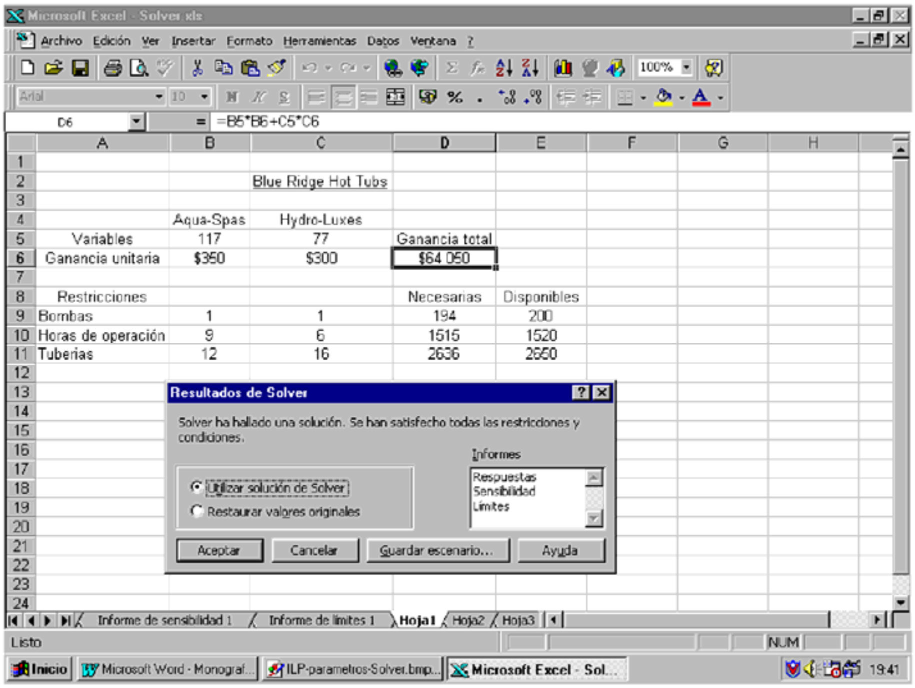



**Figura 35**

Que es mejor que la obtenida por el simple redondeo de los resultados del LP que se ven en la figura 33. Ahora veamos que nos ofrece Solver como opciones. Haciendo click en el boton Opciones del cuadro de diálogo de Solver se obtiene:

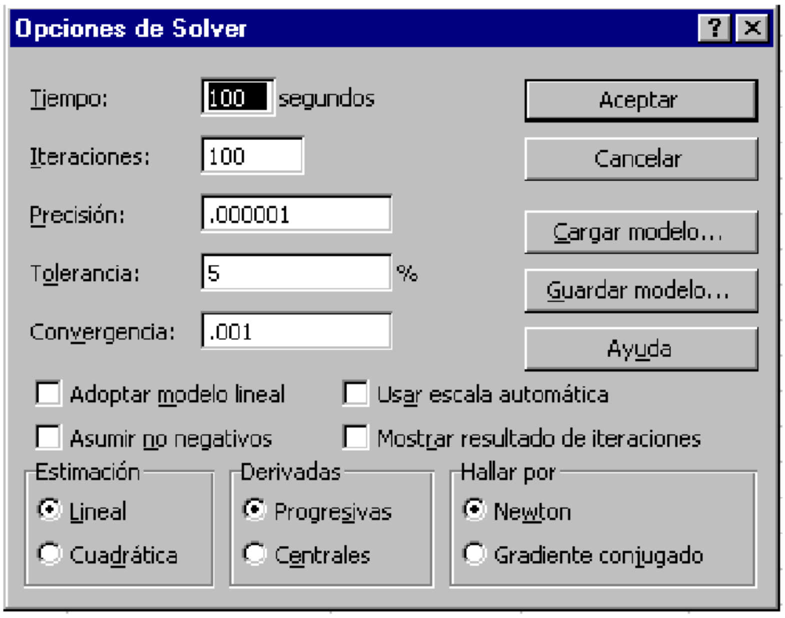



**Figura 36**

Como vemos, el Solver, emplea una tolerancia del 5% por lo que una vez hallada una solución, abandona la búsqueda de una solución mejor. Para ello modificaremos la tolerancia llevando del 5% al 0%. Y volveremos a resolver el problema. El resultado puede verse en la figura 39.

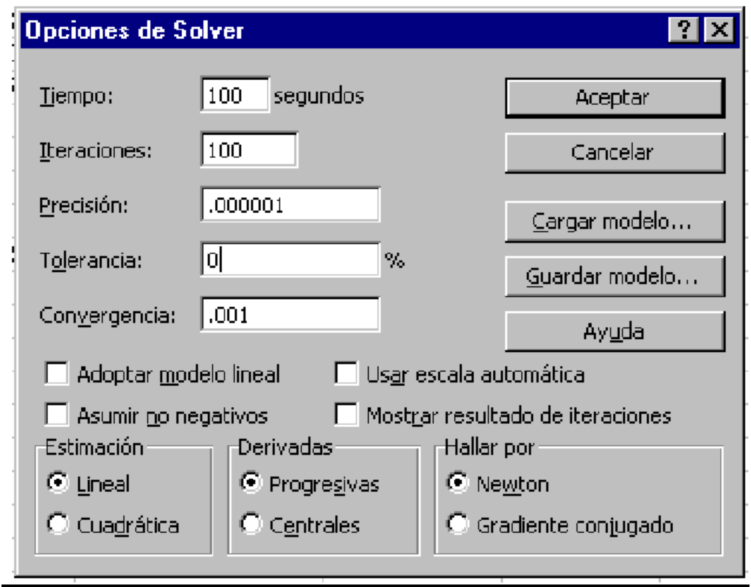



**Figura 37**

Que es la mejor solución para éste problema.

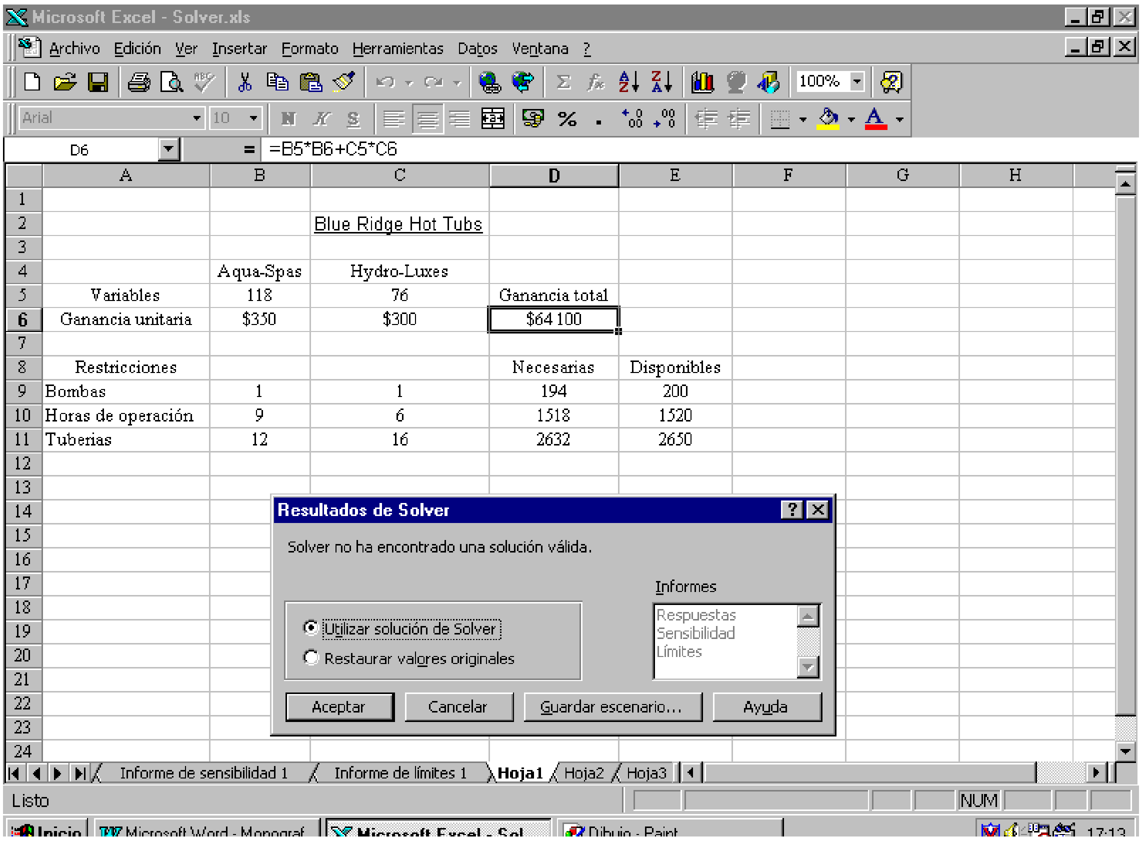



**Figura 38**

## *Variables binarias.*

Como vimos, los problemas de LP involucran a los ILP como caso especial. Así también, existen casos especiales en los que las variables de interés no solo es entera sino que además son binarias. Esto significa que las variables solo pueden asumir dos estados 0 o 1. Para resolver casos semejantes es

necesario especificarlo en el cuadro de diálogo correspondiente a restricciones introduciendo la condición de entero. Esto se ilustra en la figura 40.


**Figura 39**

## *Programación de objetivos*

Hasta el momento hemos visto casos en los que la función a optimizar era única y las restricciones eran estrictas. Ahora veremos que en programación de objetivos o GP (del inglés Goal Programming) las restricciones son blandas, esto es que pueden ser violadas. Esta metodología es iterativa, o sea que a diferencia de los casos estudiados, la solución obtenida podría no ser la mejor por lo que habría que iterar. Como explicación del método, vaya un ejemplo.

Con el objeto de aumentar las ganancias durante el período fuera de temporada, Davis McKeown, propietario de un resort hotel y centro de convenciones, decide consultar a una empresa de investigación de mercado. El resultado del estudio fue que se debía construir 5 salones de convención pequeños (400 pies cuadrados), 10 medianos (750 pies cuadrados) y 15 grandes (1050 pies cuadrados). El total de superficie a cubrir es de 25000 pies cuadrados. El costo por cada salón pequeño es de 18000 $, por cada salón mediano, 33000 $ y por cada salón grande 45150 $. Davis desea que su inversión total no supere 1.000.000 $.

### Definición de la variables de decisión

Evidentemente son la cantidad de salones pequeños ($X_1$) , medianos ($X_2$) y grandes ($X_3$).

### Definición de los objetivos

Estos son (sin importar el orden):

1. La expansión debe incluir aproximadamente 5 salones de conferencia pequeños.
2. La expansión debe incluir aproximadamente 10 salones de conferencia medianos.
3. La expansión debe incluir aproximadamente 15 salones de conferencia grandes.
4. La expansión debe consistir de aproximadamente 25000 pies cuadrados.
5. La expansión debe costar aproximadamente 1.000.000 $.

El término "aproximadamente" es esencial, ya que una inversión de 1.001.000 $ evidentemente supera en 1.000 $ al previsto, pero podría ser una solución sumamente deseable o aceptable.

### Definición de las restricciones

Estas no son estrictas como lo habíamos definido, pero ¿cómo programarlo matemáticamente?. Se sabe que el concepto de aproximación no es matemáticamente aceptable, por lo que se afecta a las restricciones de una serie de variables llamadas derivacionales, pues indican en cuanto sé desvía el valor real del deseado. En forma de ecuaciones algebraicas sería:

$X_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$ } salones pequeños

$X_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$ } salones medianos

$X_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$ } salones grandes

Donde $d_i^-, d_i^+ \geq 0$

Los valores a la derecha son los valores de las restricciones, los $d_i^-$ son los valores en que fue sub-valorada la restricción y los $d_i^+$ los valores en que fue sobre-valorada. Estas variables son nulas si la restricción se cumple exactamente. Por ejemplo si la solución es, $X_1$=3, $X_2$=13 y $X_3$= 15, diremos que la primera fue sub-valorada en 2 ($d_1^-$=2, $d_1^+$= 0) y que la segunda fue sobre-valorada en 3 ($d_2^-$=0, $d_2^+$=3) y que la tercera fue exactamente valorada ($d_3^-$=$d_3^+$ = 0).

Las otras restricciones concernientes a los pies cuadrados de construcción y la inversión en $, serían, usando la misma técnica:

$400 X_1 + 750 X_2 + 1050 X_3 + d_4^- - d_4^+ = 25.000$ pies cuadrados

$18000 X_1 + 3300 X_2 + 45150 X_3 + d_5^- - d_5^+ = 1.000.000$ $ de inversión

En general, un problema GP podría incluir no solo restricciones-objetivos sino también las típicas restricciones estrictas, por ejemplo, si el monto a invertir no deba superar al millón de dólares.

### Funciones objetivo GP

Es evidente que la solución ideal sea la que calcule exactamente todas las restricciones-objetivo. Una forma de hallarla sería la minimización de la suma de las variables derivacionales, esto es:

Objetivo: MIN: $\sum_{i}(d_i^- + d_i^+)$

El objetivo ideal sería aquel que anula dicho valor. Pero por otro lado, es inconsistentes sumar objetos tan dispares como número de salones, de pies cuadrados y dólares de inversión, por lo que se prefiere trabajar con porcentajes. Sería:

Objetivo: MIN: $\sum_{i}\frac{1}{t_i}(d_i^- + d_i^+)$

Además no debemos dejar pasar por alto que no todas las restricciones implican la misma importancia, por lo que sería deseable que cada uno actúe por su propio "peso". Esto se consigue asignándoles un valor relativo a cada una (o un peso), $w_i$. Las funciones objetivos quedarían

Objetivo: MIN: $\sum_{i}(w_i^- \bullet d_i^- + w_i^+ \bullet d_i^+)$

O bien,

Objetivo: MIN: $\sum_{i}\frac{1}{t_i}(w_i^- \bullet d_i^- + w_i^+ \bullet d_i^+)$

En nuestro caso la función objetivo sería indeseable sub-valorar los valores de las 3 primeras restricciones (las referentes a los número de salones) pero indiferente si se sobre-valoran, por lo que las $d_i^+$ se anulan en los 3 primeros casos. Por otro lado se considera indeseable tanto la sub como la sobre-valoración en el caso de los pies cuadrados de edificación. Para el caso de la inversión se considera indeseable la sobre-valoración pero no así la sub-valoración, por lo que $d_5^- = 0$. La función objetivo quedaría:

$$\text{MIN: } \frac{w_1^-}{5}d_1^- + \frac{w_2^-}{10}d_2^- + \frac{w_3^-}{15}d_3^- + \frac{w_4^-}{25000}d_4^- + \frac{w_4^+}{25000}d_4^+ + \frac{w_5^+}{1.000.000}d_5^+$$

El problema es ahora el valorar el valor relativo de los pesos para las distintas restricciones. Se comienza con un valor (por ejemplo l) se resuelve, si es necesario se retocan y se vuelven a calcular.

## Implementación del problema:

$$\text{MIN: } \frac{w_1^-}{5}d_1^- + \frac{w_2^-}{10}d_2^- + \frac{w_3^-}{15}d_3^- + \frac{w_4^-}{25000}d_4^- + \frac{w_4^+}{25000}d_4^+ + \frac{w_5^+}{1.000.000}d_5^+$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rrrrrcl}
X_1 & & & + & d_1^- - d_1^+ & = & 5 \\
 & X_2 & & + & d_2^- - d_2^+ & = & 10 \\
 & & X_3 & + & d_3^- - d_3^+ & = & 15 \\
400\,X_1 + & 750\,X_2 + & 1050\,X_3 & + & d_4^- - d_4^+ & = & 25.000 \\
18000\,X_1 + & 33000\,X_2 + & 45150\,X_3 & + & d_5^- - d_5^+ & = & 1.000.000
\end{array}$$

$d_i^-, d_i^+ \geq 0$ para todo i

$X_i \geq 0$ para todo i

$X_i$ deben ser enteros

$w_1^- = w_2^- = w_3^- = w_4^- = w_4^+ = w_5^+ = 1$ el resto es igual a 0

Para implementarlo en el Solver de Excel debemos hacer una planilla como la de la figura 43. Las fórmulas que debemos insertar son:

| Celda | Fórmula | Copiada a |
|---|---|---|
| B12 | =B9 + B10 - B 11 | C12:F12 |
| B16 | =B10/b$13 | B16:F17 |
| E9 | =SUMAPRODUCTO (B9:D9,B5:D5) | ----------- |
| F9 | =SUMAPRODUCTO (B9:D9,B6:D6) | ----------- |
| B23 | =SUMAPRODUCTO (B16:F17,B20:F21) | ----------- |

El cuadro de diálogo del Solver resulta:


**Figura 40**

Vemos que el objetivo es el de minimizar la función objetivo. El cuadro de opciones se debe completar de tal modo que quede:

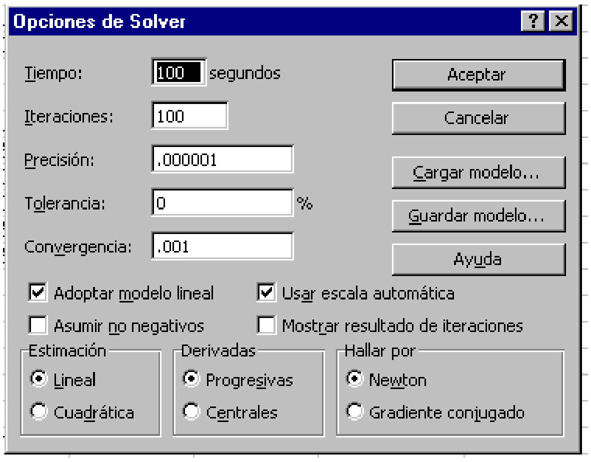
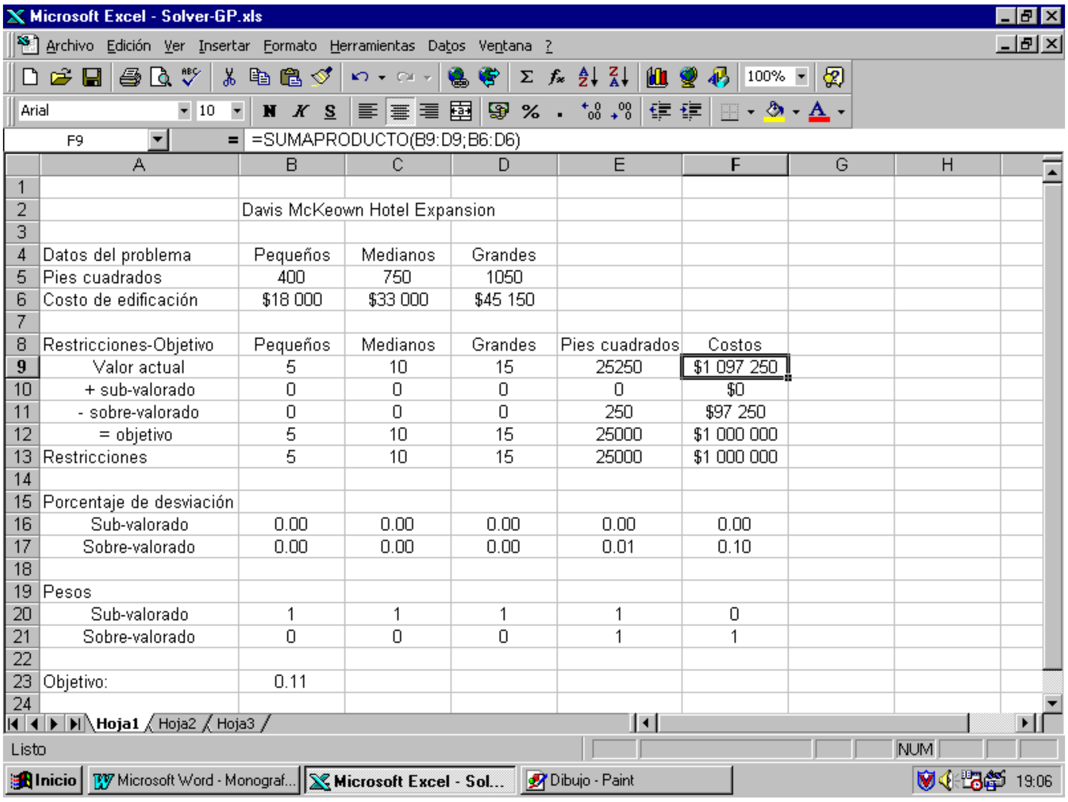



**Figura 41**

Y los resultados del problema,



Microsoft Excel - Solver-GP.xls

F9 =SUMAPRODUCTO(B9:D9;B6:D6)

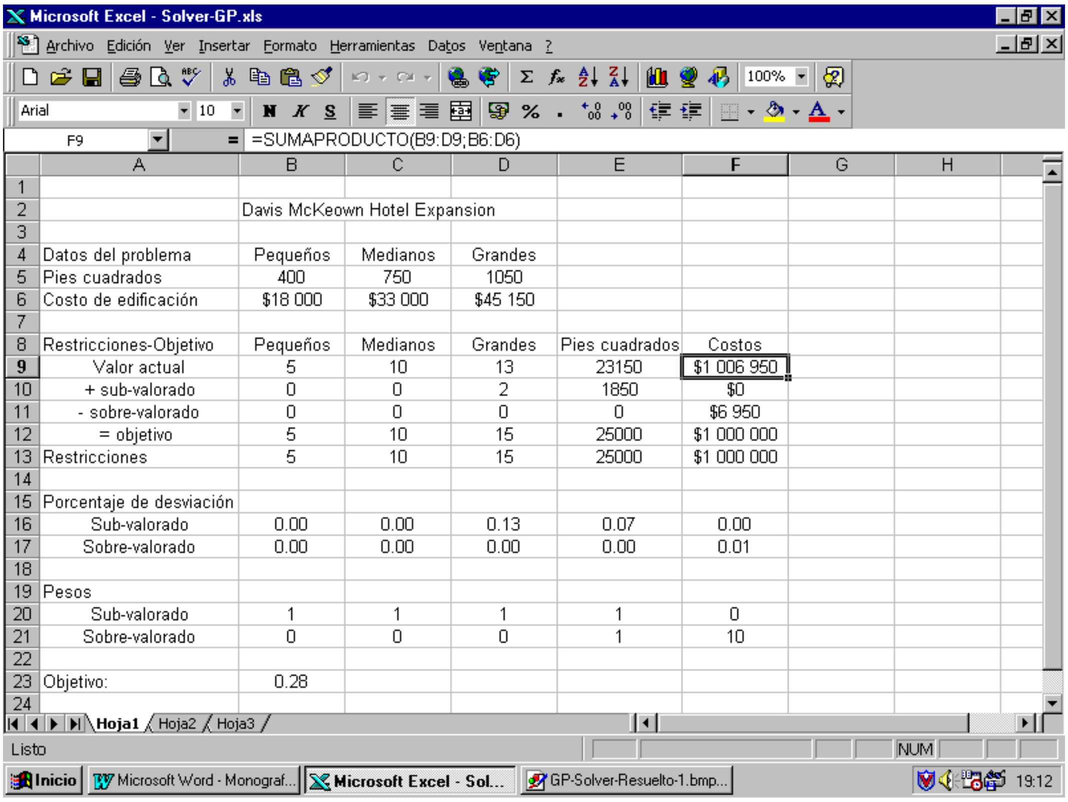
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | Davis McKeown Hotel Expansion | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | Datos del problema | Pequeños | Medianos | Grandes | | |
| 5 | Pies cuadrados | 400 | 750 | 1050 | | |
| 6 | Costo de edificación | $18 000 | $33 000 | $45 150 | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | Restricciones-Objetivo | Pequeños | Medianos | Grandes | Pies cuadrados | Costos |
| 9 | Valor actual | 5 | 10 | 15 | 25250 | $1 097 250 |
| 10 | + sub-valorado | 0 | 0 | 0 | 0 | $0 |
| 11 | - sobre-valorado | 0 | 0 | 0 | 250 | $97 250 |
| 12 | = objetivo | 5 | 10 | 15 | 25000 | $1 000 000 |
| 13 | Restricciones | 5 | 10 | 15 | 25000 | $1 000 000 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | Porcentaje de desviación | | | | | |
| 16 | Sub-valorado | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 17 | Sobre-valorado | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.10 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | Pesos | | | | | |
| 20 | Sub-valorado | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 21 | Sobre-valorado | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 22 | | | | | | |
| 23 | Objetivo: | 0.11 | | | | |
| 24 | | | | | | |

**Figura 42**

Donde vemos que el objetivo se cumple en cuanto al número de salones (5, 10 y 15 respectivamente) aunque excede el número de pies cuadrados en 250 y los costos en 97.250 $

Para evitar excedernos en el costo podemos aumentar el peso correspondiente en un orden de magnitud haciendo a $w_5^+ = 10$ (celda F21). Al resolver se obtiene el resultado de la figura 44. En ella vemos que el costo aún es mayor, pero ahora en 6.950 $ y se necesitan 1.850 pies cuadrados menos.

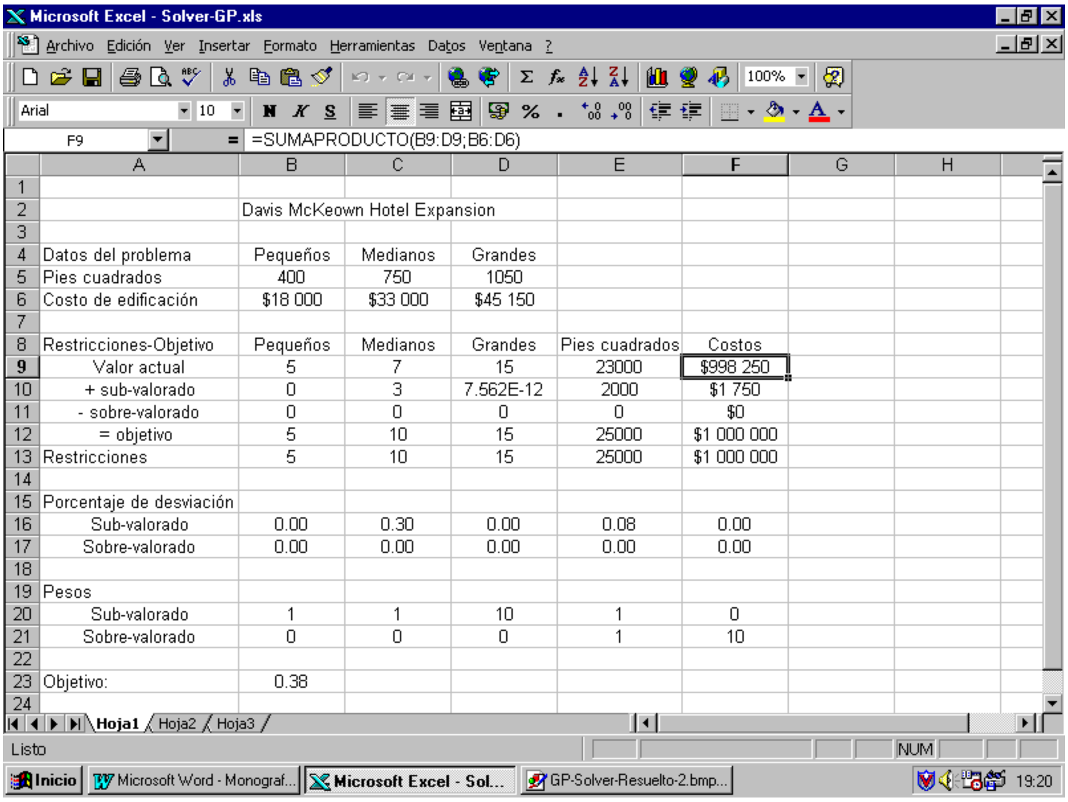
Para ajustar el número de salones grandes (que se sub-valoraron en 2) podemos ajustar su peso correspondiente en un orden de magnitud (de 1 a 10) por lo tanto, $w_3^- = 10$ (celda D20). Una vez modificado y resuelto el problema se obtiene la solución de la figura 45. En esta solución debería construirse 5 salones pequeños, 7 medianos y 15 grandes, con una ocupación de 23.000 pies cuadrados (2.000 menos del esperado) y una inversión de 998.250 $ (1.750 $ menos del previsto). Esta es una solución, pero ¿és la mejor?. Una nueva interación podrá decirlo, pero no sabiendo los valores "correctos" de los pesos, éstos deben estimarse, por lo que consideraremos ésta solución como óptima.





| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | Davis McKeown Hotel Expansion | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | Datos del problema | Pequeños | Medianos | Grandes | | |
| 5 | Pies cuadrados | 400 | 750 | 1050 | | |
| 6 | Costo de edificación | $18 000 | $33 000 | $45 150 | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | Restricciones-Objetivo | Pequeños | Medianos | Grandes | Pies cuadrados | Costos |
| 9 | Valor actual | 5 | 10 | 13 | 23150 | $1 006 950 |
| 10 | + sub-valorado | 0 | 0 | 2 | 1850 | $0 |
| 11 | - sobre-valorado | 0 | 0 | 0 | 0 | $6 950 |
| 12 | = objetivo | 5 | 10 | 15 | 25000 | $1 000 000 |
| 13 | Restricciones | 5 | 10 | 15 | 25000 | $1 000 000 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | Porcentaje de desviación | | | | | |
| 16 | Sub-valorado | 0.00 | 0.00 | 0.13 | 0.07 | 0.00 |
| 17 | Sobre-valorado | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | Pesos | | | | | |
| 20 | Sub-valorado | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 21 | Sobre-valorado | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| 22 | | | | | | |
| 23 | Objetivo: | 0.28 | | | | |
| 24 | | | | | | |

**Figura 43**





| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | Davis McKeown Hotel Expansion | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | Datos del problema | Pequeños | Medianos | Grandes | | |
| 5 | Pies cuadrados | 400 | 750 | 1050 | | |
| 6 | Costo de edificación | $18 000 | $33 000 | $45 150 | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | Restricciones-Objetivo | Pequeños | Medianos | Grandes | Pies cuadrados | Costos |
| 9 | Valor actual | 5 | 7 | 15 | 23000 | $998 250 |
| 10 | + sub-valorado | 0 | 3 | 7.562E-12 | 2000 | $1 750 |
| 11 | - sobre-valorado | 0 | 0 | 0 | 0 | $0 |
| 12 | = objetivo | 5 | 10 | 15 | 25000 | $1 000 000 |
| 13 | Restricciones | 5 | 10 | 15 | 25000 | $1 000 000 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | Porcentaje de desviación | | | | | |
| 16 | Sub-valorado | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.08 | 0.00 |
| 17 | Sobre-valorado | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | Pesos | | | | | |
| 20 | Sub-valorado | 1 | 1 | 10 | 1 | 0 |
| 21 | Sobre-valorado | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| 22 | | | | | | |
| 23 | Objetivo: | 0.38 | | | | |
| 24 | | | | | | |

**Figura 44**

## Resumen de la programación de objetivos o GP

1. Identificar las variables de decisión del problema.
2. Identificar las restricciones estrictas en el problema y formularlas en la forma usual.
3. Situar los objetivos del problema a través de sus valores objetivos (los permitidos por el problema).
4. Crear las restricciones usando las variables de decisión que podría alcanzarse exactamente.
5. Transformar las restricciones arriba creadas para obtener restricciones-objetivo a través de las variables derivacionales.
6. Determinar que variables derivacionales representan desviaciones indeseables a los objetivos.
7. Formular un objetivo para penalizar las desviaciones indeseables.
8. Identificar apropiadamente los pesos para el objetivo.
9. Resolver el problema.
10. Inspeccionar la solución del problema. Si la solución es inaceptable, retornar al paso 8 y revisar los pesos que sean necesario.

## Método MINIMAX

Este es un método muy útil para minimizar la máxima desviación de cualquier objetivo. Para implementar el objetivo MINIMAX, debemos crear una restricción adicional para cada variable derivacional como sigue, donde Q es la variable MINIMAX.

$$d_1^- \leq Q$$

$$d_1^+ \leq Q$$

$$d_2^- \leq Q$$

.............

donde el objetivo es: MIN: Q

Puesto que Q debe ser mayor o igual que los valores de la variables derivacionales, al minimizar a la misma, limitamos el valor máximo de dichas variables derivacionales. La técnica se explicará en el siguiente tema.

## *Optimización de objetivos múltiples*

Mientras que los problemas LP e ILP tienen una sola función objetivo existen otros que tienen varios y son problemas de optimización con múltiples objetivos o MOLP (del inglés, multiple objective linear programming).Y para explicarlo recurriremos a otro ejemplo, más adecuado, quizás, a la industria química.

Lee Blackstone es propietario de la Blackstone Mining Company y opera dos diferentes minas de carbón, en los condados de Wythe y Giles en el sudoeste de Virginia. Debido al incremento de la actividad comercial y residencial del lugar, Lee anticipa un incremento en la demanda de carbón para los años siguientes. Su proyección de la demanda es de 48 toneladas más de carbón de alta calidad (HD), 28 toneladas más de calidad media (MG) y 100 toneladas más de carbón de baja calidad (LG). Para ello debe incrementar el personal, cosa que le cuesta 40.000 $ por envío de trabajadores extra a la mina de Whyte mientras que el costo para la mina de Giles es de 32.000 $. Solo puede hacer un envío por mes a cada mina. La producción de cada mina, para cada calidad de carbón es:

| Tipo de carbon | Mina Whyte | Mina Giles |
|---|---|---|
| Alta calidad | 12 tons. | 4 tons. |
| Calidad media | 4 tons. | 4 tons |
| Baja calidad | 10 tons. | 20 tons. |

Desafortunadamente, los métodos de extracción de carbón generan agua contaminada de tóxicos que se vierten a las napas locales. La mina Whyte genera 800 galones de agua contaminada por mes mientras que la Giles vierte 1.250 galones por mes. Por otro lado los riesgos de accidentes de trabajo con consecuencias fatales son de 0.20 y 0.45 respectivamente para cada mina por mes.

El deseo de Lee es hacer frente a esa demanda minimizando los costos pero además desea disminuir la emisión de agua contaminada y los riesgos de vida de sus trabajadores y desea saber cuantos meses deben trabajar cada mina por año para enfrentar dicho aumento de demanda.

## Definición de las variables de decisión

Estas son;

$X_1$= número de meses extras para la mina Whytes.

$X_2$= número de meses extras para la mina Giles.

## Definición de objetivos

Este problema de LP, a diferencia de los anteriores, tiene 3 objetivos:

Minimizar: $\$40\ X_1 + \$32\ X_2$ }costo de producción en miles de dólares

Minimizar: $800\ X_1 + 1250\ X_2$ } agua contaminada producida en galones

Minimizar: $0.20\ X_1 + 0.45\ X_2$ } accidentes con riesgo de vida

En un modelo LP convencional se nos fuerza a elegir uno de los objetivos como más importante, pero en el método MOLP todos los objetivos serán considerados.

## Definición de las restricciones

Se formulan en la misma manera que los anteriores, esto es:

$12\ X_1 + 4\ X_2 \geq 48$ } carbón de alta calidad requerido (HG)

$4\ X_1 + 4\ X_2 \geq 28$ } carbón de calidad media requerida (MG)

$10\ X_1 + 20\ X_2 \geq 100$ } carbón de baja calidad requerido (LG)

## Implementación del modelo

Minimizar: $\$40\ X_1 + \$32\ X_2$ }costo de producción en miles de dólares

Minimizar: $800\ X_1 + 1250\ X_2$ } agua contaminada producida en galones

Minimizar: $0.20\ X_1 + 0.45\ X_2$ } accidentes con riesgo de vida

Sujetos a: $12\ X_1 + 4\ X_2 \geq 48$ } carbón de alta calidad requerido (HG)

$4\ X_1 + 4\ X_2 \geq 28$ } carbón de calidad media requerida (MG)

$10\ X_1 + 20\ X_2 \geq 100$ } carbón de baja calidad requerido (LG)

Todos los datos del modelo se implementarán en una hoja de cálculo en la forma usual.

Las fórmulas a agregar son:

D8 = SUMAPRODUCTO(B8:C8,$B$5:$C$5) copiada D9:D10 y D13:D15

## Determinación de los valores de los objetivos

Los problemas LP solo tienen una función objetivo. ¿Cómo implementar varios objetivos? Podríamos asumir los valores aproximados de cada objetivo como blanco a encontrar como $t_1$, $t_2$ y $t_3$.

Objetivo 1: el costo total de producción deberá ser aproximadamente igual a $t_1$

Objetivo 2: los galones totales de agua contaminada producida deberán ser aproximadamente igual a $t_2$

Objetivo 3: el número de accidentes con riesgo de vida deberá ser de aproximadamente $t_3$

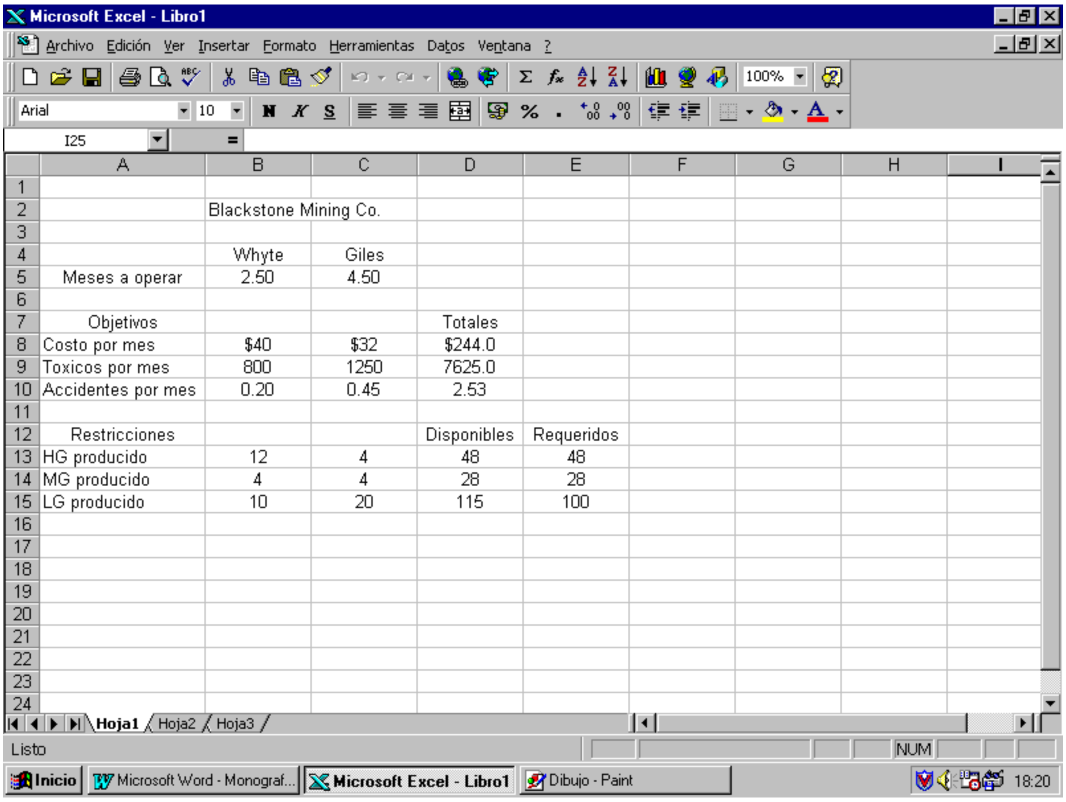
Por desgracia, no disponemos de éstos valores, pero podemos calcular los mejores para cada objetivo. Así, comenzamos a minimizar el primer objetivo, esto es, minimizar el costo de producción. Para ello introducimos los datos en la pantalla del Solver como se aprecia en las figuras siguientes.


**Figura 45**


**Figura 46**

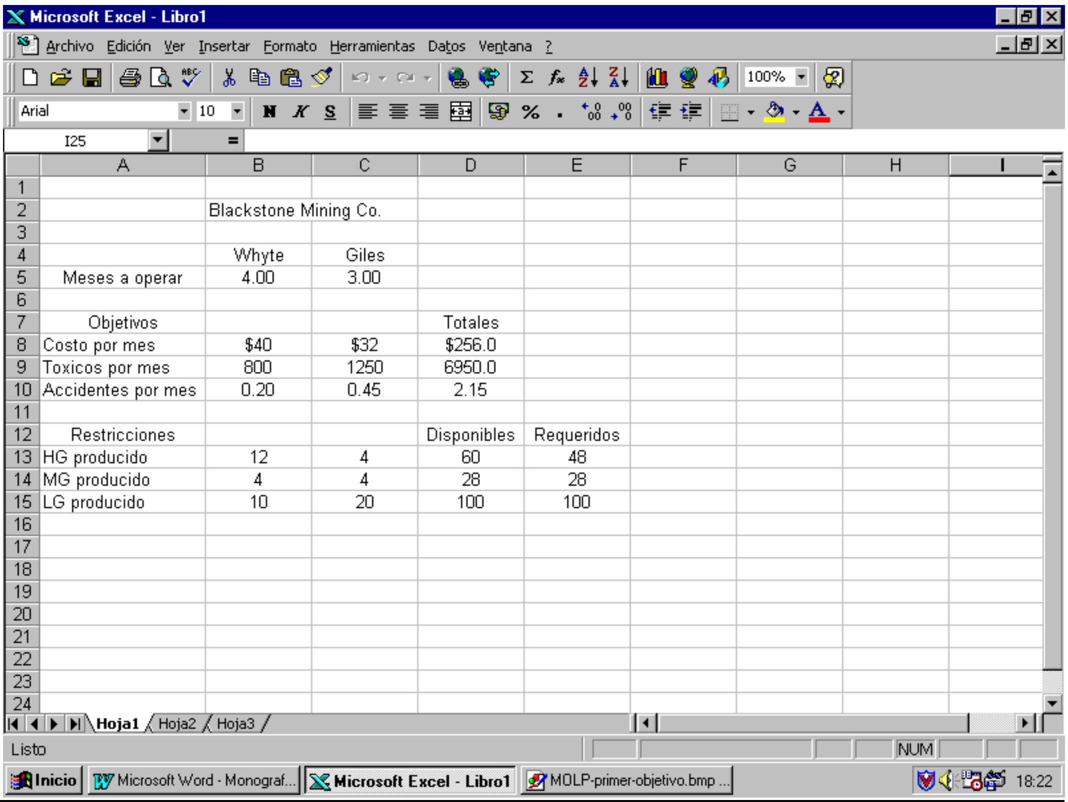
Al resolverlo se obtiene la solución de la figura 48, esto es 2.50 meses para la mina White y 4.50 meses para la mina Giles. En éste caso, el costo total será de 244.000 $, por lo que $t_1$ podría ser igual a 244, sabiendo que en ningún caso será menor. Para hallar $t_2$ debemos minimizar el segundo objetivo (galones de agua contaminada) que se encuentra en la celda D9. Al resolver el problema se obtiene la nueva solución (figura 49) en la que los meses de cada mina son, 4.00 y 3.00 respectivamente, con una emisión total de 6.950,0 galones de agua. En consecuencia 6.950 será el valor de $t_2$. Por último, se minimiza el tercer objetivo (número de accidentes con riesgo de vida) de la celda D10. Se obtienen los resultados de la figura 50. Aquí, el número de accidentes por mes es de 2.00 lo que determina a $t_3$. Los meses de operación son 10.00 y 0.00 para cada mina, pero con notable aumento del costo y de emisión de agua contaminada.

Estos puntos son vértices de la zona factible como queda definida en la figura 51. En los casos ya estudiados, efectivamente la solución óptima ocurría en uno de dichos vértices. Para hallar la solución óptima en un punto que no sea vértice se debe recurrir a otra técnica.



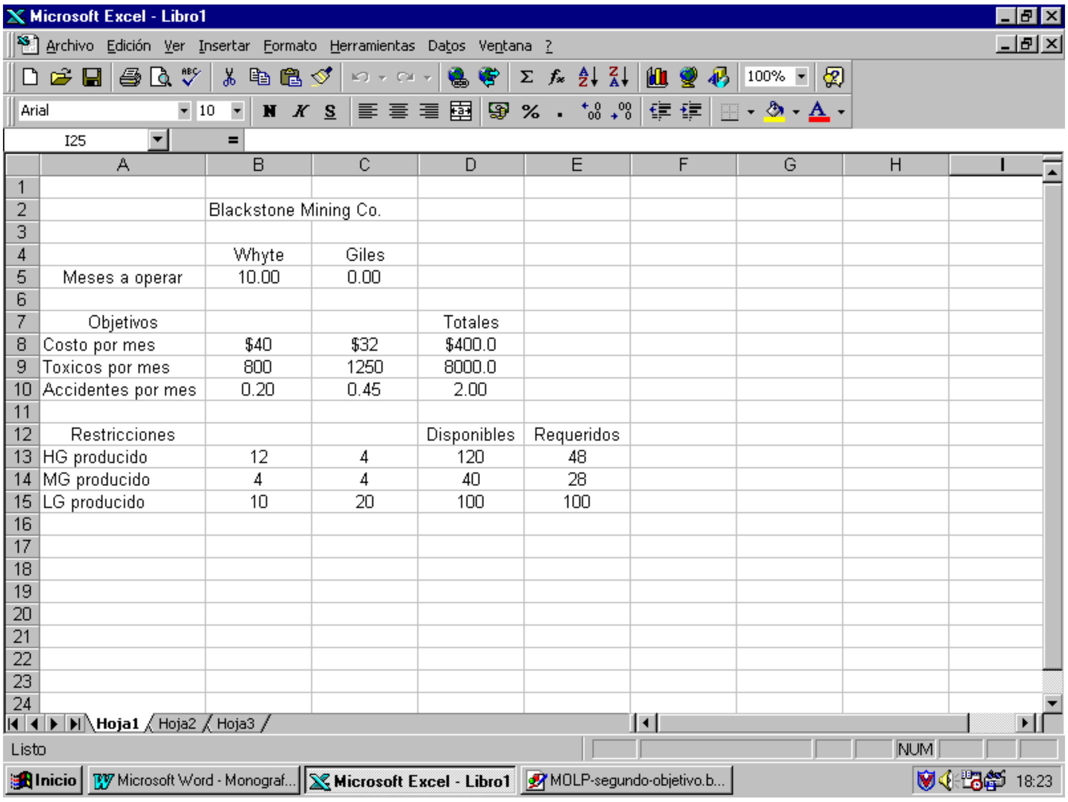
| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | Blackstone Mining Co. | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | Whyte | Giles | | |
| 5 | Meses a operar | 2.50 | 4.50 | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | Objetivos | | | Totales | |
| 8 | Costo por mes | $40 | $32 | $244.0 | |
| 9 | Toxicos por mes | 800 | 1250 | 7625.0 | |
| 10 | Accidentes por mes | 0.20 | 0.45 | 2.53 | |
| 11 | | | | | |
| 12 | Restricciones | | | Disponibles | Requeridos |
| 13 | HG producido | 12 | 4 | 48 | 48 |
| 14 | MG producido | 4 | 4 | 28 | 28 |
| 15 | LG producido | 10 | 20 | 115 | 100 |

**Figura 47**



| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | Blackstone Mining Co. | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | Whyte | Giles | | |
| 5 | Meses a operar | 4.00 | 3.00 | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | Objetivos | | | Totales | |
| 8 | Costo por mes | $40 | $32 | $256.0 | |
| 9 | Toxicos por mes | 800 | 1250 | 6950.0 | |
| 10 | Accidentes por mes | 0.20 | 0.45 | 2.15 | |
| 11 | | | | | |
| 12 | Restricciones | | | Disponibles | Requeridos |
| 13 | HG producido | 12 | 4 | 60 | 48 |
| 14 | MG producido | 4 | 4 | 28 | 28 |
| 15 | LG producido | 10 | 20 | 100 | 100 |

**Figura 48**



| | Whyte | Giles | | |
|---|---|---|---|---|
| Blackstone Mining Co. | | | | |
| Meses a operar | 10.00 | 0.00 | | |
| Objetivos | | | Totales | |
| Costo por mes | $40 | $32 | $400.0 | |
| Toxicos por mes | 800 | 1250 | 8000.0 | |
| Accidentes por mes | 0.20 | 0.45 | 2.00 | |
| Restricciones | | | Disponibles | Requeridos |
| HG producido | 12 | 4 | 120 | 48 |
| MG producido | 4 | 4 | 40 | 28 |
| LG producido | 10 | 20 | 100 | 100 |

**Figura 49**

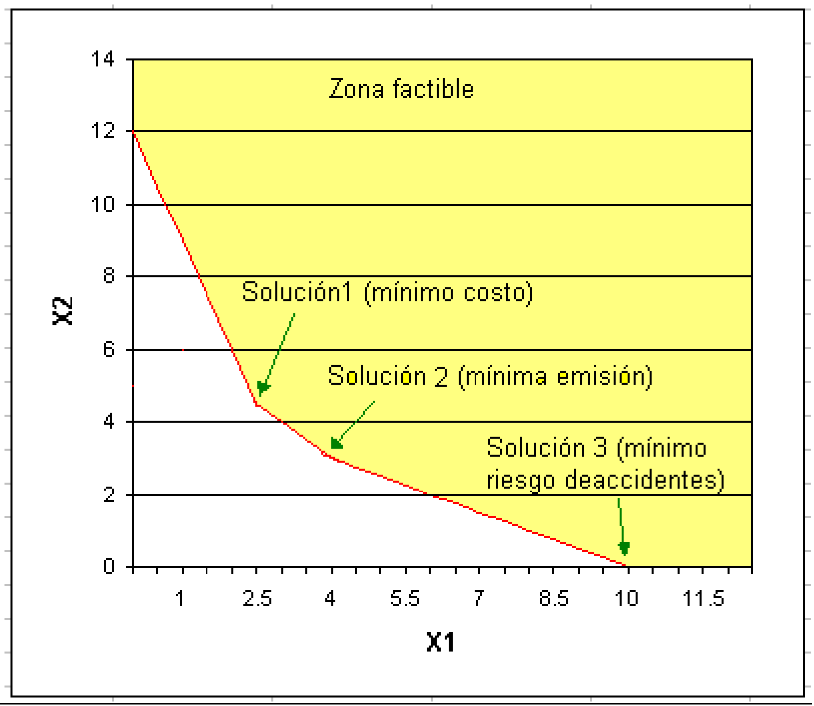



**Figura 50**

## Determinación de los objetivos GP

Rescatemos los objetivos deseados con los valores calculados anteriormente,

Objetivo 1: el costo total de producción deberá ser aproximadamente igual a \$244

Objetivo 2: los galones totales de agua contaminada producida deberá ser aproximadamente igual a 6.950

Objetivo 3: el número de accidentes con riesgo de vida deberá ser de aproximadamente 2.0

La derivación porcentual de las variables las definimos como:

$$\frac{\text{Valor actual - Valor blanco}}{\text{Valor blanco}}$$

Para los distintos objetivos, son:

$$\frac{(40\,X_1 + 32\,X_2) - 244}{244} \qquad \frac{(800\,X_1 + 1250\,X_2) - 6950}{6950} \qquad \frac{(0.20\,X_1 + 0.45\,X_2) - 2.00}{2.00}$$

Si afectamos a cada término con un peso w y sumamos obtenemos una función lineal:

$$w_1\,\frac{(40\,X_1 + 32\,X_2) - 244}{244} + w_2\,\frac{(800\,X_1 + 1250\,X_2) - 6950}{6950} + w_3\,\frac{(0.20\,X_1 + 0.45\,X_2) - 2.00}{2.00}$$

Función que se desea minimizar. Pero ahora sabemos que la solución podría no estar en uno de los vértices por lo que debemos emplear otro método como el MINIMAX. Para ello hacemos uso de la variable MINIMAX Q de tal modo que:

MIN: Q

$$w_1\,\frac{(40\,X_1 + 32\,X_2) - 244}{244} \le Q$$

$$w_2\,\frac{(800\,X_1 + 1250\,X_2) - 6950}{6950} \le Q$$

$$w_3\,\frac{(0.20\,X_1 + 0.45\,X_2) - 2.00}{2.00} \le Q$$

## Implementación del modelo revisado

$12\,X_1 + 4\,X_2 \ge 48$ } carbón de alta calidad requerido (HG)

$4\,X_1 + 4\,X_2 \ge 28$ } carbón de calidad media requerida (MG)

$10\,X_1 + 20\,X_2 \ge 100$ } carbón de baja calidad requerido (LG)

$w_1(40\,X_1 + 32\,X_2 - 244)/240 \le Q$ } 1º restricción-objetivo MINIMAX

$w_2(800\,X_1 + 1250\,X_2 - 6590)/6950 \le Q$ } 2º restricción-objetivo MINIMAX

$w_3(0.20\,X_1 + 0.45\,X_2 - 2)/2 \le Q$ } 3º restricción-objetivo MINIMAX

$X_1, X_2 \ge 0$

$w_1$, $w_2$ y $w_3$ son constantes positivas.

Con la misma hoja de cálculo anterior, es fácil modificarla para que acepte el nuevo modelo. Se agregarán los puntos de la figura 52 con las siguiente fórmulas:

| Celda | Fórmula | Copiada a |
|---|---|---|
| D8 | =SUMAPRODUCTO(B8:C8,$B$5:$C$5) | D9:D10 y D13:D15 |
| F8 | =(D8 - E8)/E8 | F9:F10 |
| H8 | = F8 * G8 | H9:H10 |

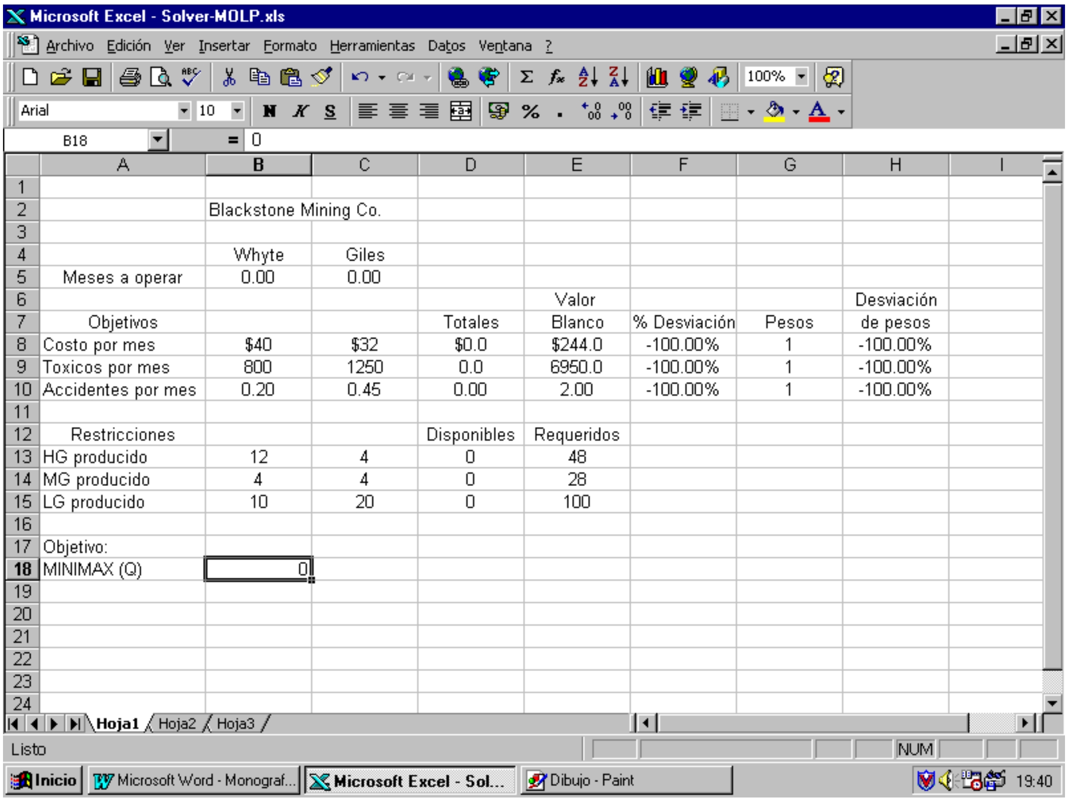
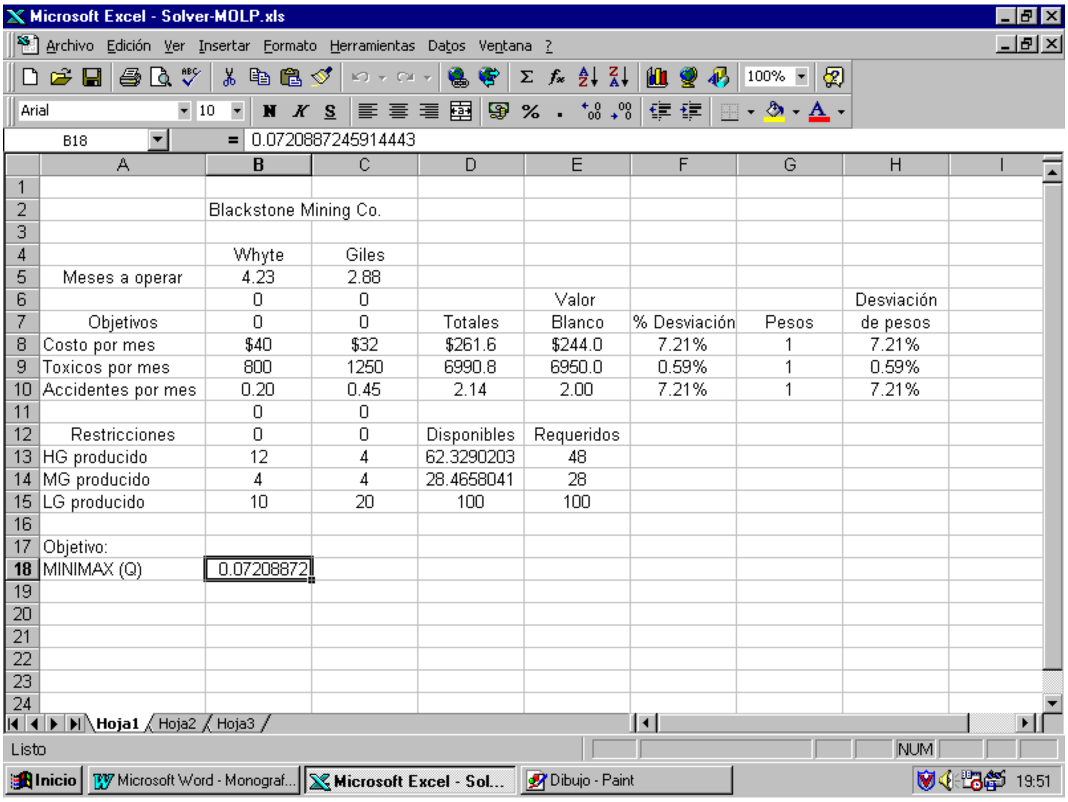



**Figura 51**


**Figura 52**

El cuadro de opciones es el mismo de la figura 47. Una vez resuelto a través de la herramienta Solver del Excel, se obtiene la solución de la figura 54. Vemos que la solución obtenida ($X_1$= 4.23; $X_2$= 2.88) no corresponde a ninguno de los vértices de la zona factible. Las desviaciones de los objetivos son de 7% para el primero y el tercero y menos de 1% para el segundo, lo que hace que ésta solución sea más atractiva que las que ocurrían en los vértices. Además dicha solución estará tanto más cerca de algún vértice cuanto mayor peso relativo tenga el objetivo correspondiente a dicho objetivo. Notar además, que la variable Q es objetivo y a la vez celda cambiante.




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | Blackstone Mining Co. | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | Whyte | Giles | | | | | |
| 5 | Meses a operar | 4.23 | 2.88 | | | | | |
| 6 | | 0 | 0 | | Valor | | | Desviación |
| 7 | Objetivos | 0 | 0 | Totales | Blanco | % Desviación | Pesos | de pesos |
| 8 | Costo por mes | $40 | $32 | $261.6 | $244.0 | 7.21% | 1 | 7.21% |
| 9 | Toxicos por mes | 800 | 1250 | 6990.8 | 6950.0 | 0.59% | 1 | 0.59% |
| 10 | Accidentes por mes | 0.20 | 0.45 | 2.14 | 2.00 | 7.21% | 1 | 7.21% |
| 11 | | 0 | 0 | | | | | |
| 12 | Restricciones | 0 | 0 | Disponibles | Requeridos | | | |
| 13 | HG producido | 12 | 4 | 62.3290203 | 48 | | | |
| 14 | MG producido | 4 | 4 | 28.4658041 | 28 | | | |
| 15 | LG producido | 10 | 20 | 100 | 100 | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 17 | Objetivo: | | | | | | | |
| 18 | MINIMAX (Q) | 0.07208872 | | | | | | |

**Figura 53**

## Resumen de la optimización de multiples objetivos

1. Identificar las variables de decisión del problema
2. Identificar los objetivos en el problema y formularlos en la forma usual.
3. Identificar las restricciones del problema y formularlos en el modo usual.
4. Resolver el problema para cada objetivo identificado en el paso 2 para determinar el valor óptimo de cada uno de ellos.
5. Establecer los objetivos como metas usando los valores identificados en el paso 4 como valor Blanco.
6. Para cada objetivo, crear una función derivacional que mida el valor en que cada solución dada falla en alcanzar la meta (ej. en porcentajes).
7. Para cada una de las funciones derivacionales identificadas en el paso 6, asignarle un peso a dichas funciones y crear una restricción que requiera el valor de la función derivacional pesada que deberá ser menor que la variable MINIMAX, Q.
8. Resolver el problema de tal manera que minimice a Q.
9. Inspeccionar la solución del problema. Si la solución es inaceptable, ajustar los pesos en el paso 7 y volver al paso 8.

## *Programación no lineal*

Hasta en momento, hemos visto problemas en los que la función objetivo y las restricciones son lineales, pero hay casos que no responden a ésta categoría y se llaman problemas de programación no lineal o NLP (del inglés nonlinear programming).

La principal diferencia entre los problemas NLP y LP es que en los primeros, la función objetivo y/o una o todas las restricciones son no lineales. Así pueden darse los siguientes casos:

En la figura 55 (a), la función objetivo es lineal, pero el borde de la zona factible, no. Significa que por lo menos una de las restricciones es no lineal.

En la figura 55 (b), el borde de la zona factible (por lo tanto las restricciones) es lineal, pero las curvas de nivel de la función objetivo no lo son. La que está graficada representa la solución óptima.

En la figura 55 (c), tanto la función objetivo como una de las restricciones son curvas, solo la solución óptima fue dibujada.

Por último, la figura 55 (d) presenta el caso en que la zona factible está limitada por líneas rectas y las curvas de nivel se concentran sobre la solución óptima "dentro" de la zona factible a diferencia del segundo caso en donde el óptimo estaba en el mismo borde.

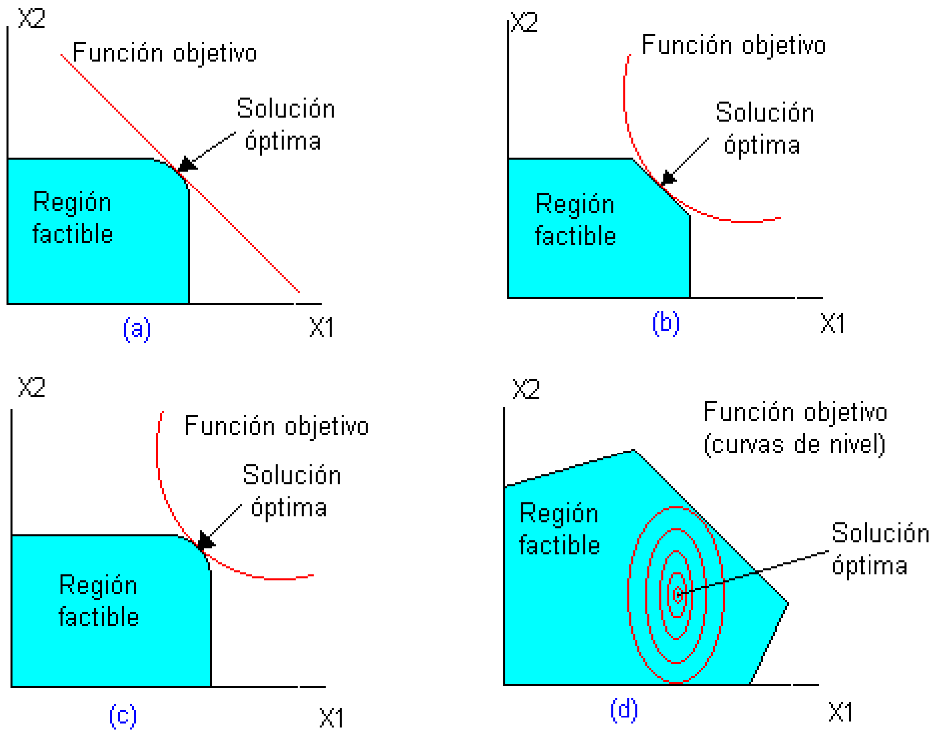



**Figura 54**

Aquí puede verse bien la diferencia entre los problemas LP en donde la solución factible estaba siempre en un vértice mientras que en los casos NLP pueden estar sobre un borde curvo, recto o dentro de la zona factible.

El método Simplex, como vimos, explora los vértices, por lo que el mismo no sirve para éste tipo de problemas y aunque la resolución con Solver es similar, el método matemático varía como lo veremos a continuación de un modo intuitivo.

## Estrategia de resolución de problemas NLP

El procedimiento de resolución del Solver para problemas NLP es el de los gradientes reducidos generalizados o GRG (del inglés generalized reduced gradient). La matemática involucrada es compleja, pero intuitivamente podemos apreciarlo en la figura 56.

Se parte del punto A y siguiendo la dirección de mayor velocidad de crecimiento de la función objetivo (gradiente), se busca el punto más extremo que resulta ser el B. Luego va explorando a través del borde de la zona factible hasta encontrar el punto de solución factible, tan cerca del mismo como se desee. Sin embargo, se aprecia que no es el camino más directo entre el punto de inicio y la solución óptima. Esto significa, que no siempre es conveniente elegir la dirección en la que la función varía más rápido. El algoritmo GRG del Solver no solo determina la dirección sino la longitud del paso a realizar. El algoritmo GRG usual, no puede moverse directamente desde el punto de arranque hasta la solución óptima, por lo que se requieren métodos más refinados.

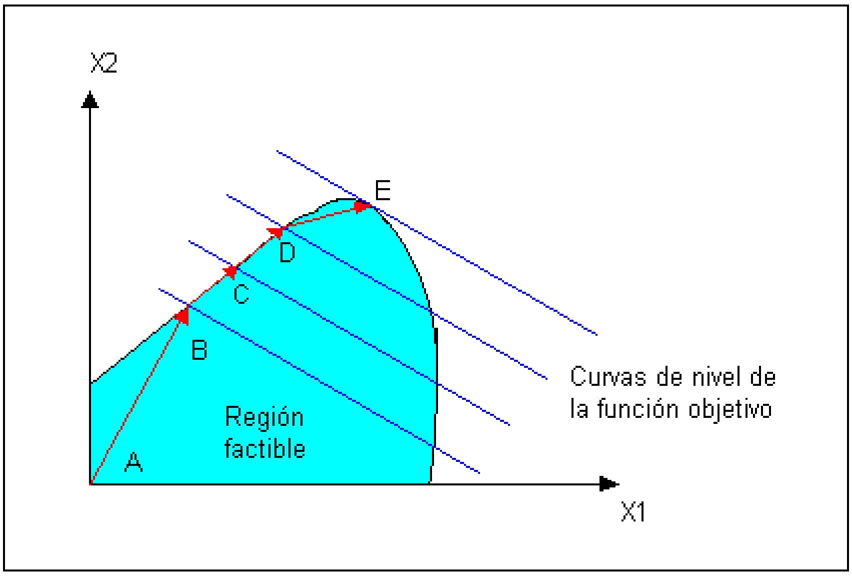



**Figura 55**

**Soluciones Globales versus soluciones locales**

Los algoritmos para solucionar problemas NLP terminan cuando no hay más zona factible en la dirección en que la función objetivo varía en el orden deseado (ya sea que aumente o disminuya) o cuando está lo suficientemente cerca en valores arbitrarios. El tal caso, dicho punto se considera el óptimo. El inconveniente es que dicho punto podría no ser el mejor como se visualiza en la figura 57.

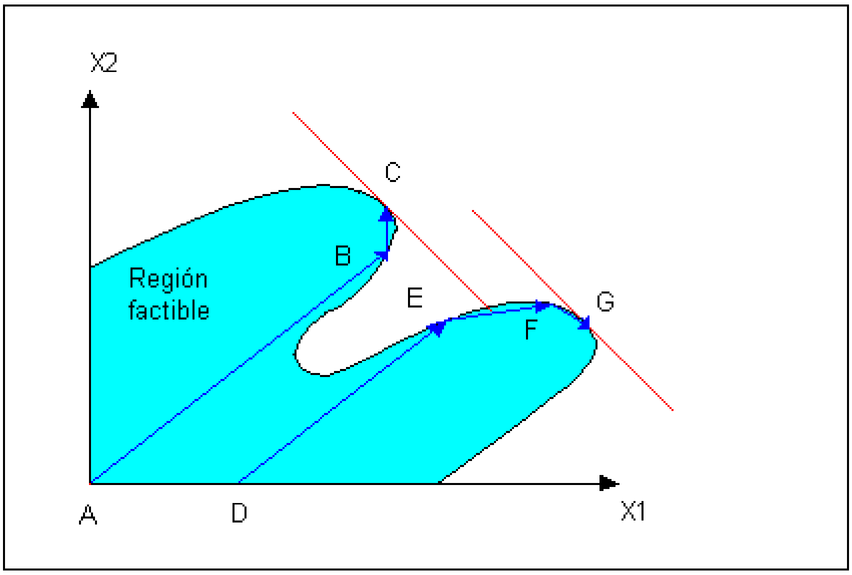



**Figura 56**

Todo método NLP requiere un punto de arranque y como se aprecia, la solución depende de dicho punto. En la figura 56 era obvio que la solución encontrada era la mejor, pero, en la figura 57, si partimos del punto A llegamos al C que es lo que se llama solución óptima local, en contraposición con la solución óptima global que se alcanza partiendo desde D.

En el caso de ILP, encontramos un caso de óptimo que logró mejorarse al disminuirse la tolerancia en el método matemático. Lamentablemente, en los casos NLP, no es fácil saber si cierta solución óptima es global o local. Debido a lo anterior, es una buena idea, el resolver el mismo problema partiendo desde diferentes puntos de arranque para ver si hay óptimos locales y determinar el mayor como óptimo global. De todos modos, la herramienta Solver del Excel tiene algunos problemas cuando se parte del origen, por lo que conviene que los valores de arranque sean no-nulos.

Una nota sobre las soluciones óptimas del Solver.

Cuando un problema NLP es resuelto, puede aparecer uno de los siguientes mensajes:

1. "Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied."

   Esto significa que el Solver ha encontrado una solución óptima local, pero no garantiza que sea la solución óptima local. A menos que se sepa que es la única solución, se deberá correr el Solver con otros valores de arranque.

2. "Solver has converged to the current solution. All constraints are satisfied."

   Significa que el valor de la función objetivo cambia muy poco en las últimas iteraciones. En Excel 8.0, se dispone de la opción convergencia en el cuadro de diálogos de opciones (ver Fig. 47 pag 43) que evita la convergencia hacia una solución subóptima.

3. "Solver cannot improve the current solution. All constraints are satisfied."

   Este raro mensaje significa que el modelo es degenerado y el Solver esta en un circulo vicioso. Esto puede frecuentemente eliminarse, removiendo las restricciones redundantes en el modelo.

## Modelos de cantidad económica de orden

O EOQ (del inglés economic order quantity), es un problema muy común en negocios y que puede servir como ejemplo de optimización no-lineal. Cuando se desea comprar algún artículo se desea saber cual es el valor óptimo a ordenar. El modelo básico responde a:

1- La demanda del producto es constante a través del año

2- Cada nueva orden es enviada completa cuando el inventario llega a 0.

En la figura 58 se aprecia un caso en el que el consumo anual es de 150 y se efectúan 3 órdenes de 50 artículos.

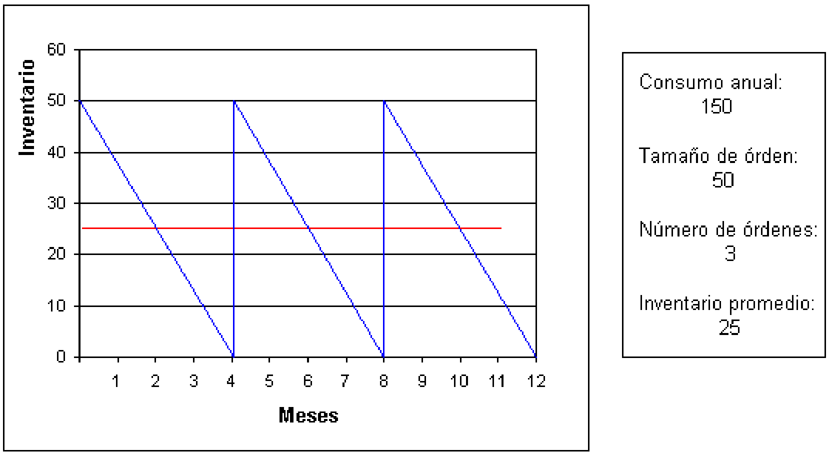



**Figura 57**

En la figura 60 se advierte otra forma de lograr 150 artículos por año pero en éste caso con 6 órdenes de 25 artículos. En ambos casos se aprecia que cuando el inventario es nulo se ingresa una nueva orden, por lo que el inventario aumenta súbitamente desde cero hasta dicho número.

Así en el primer caso se requieren menos órdenes pero de mayor tamaño mientras que en el segundo las órdenes son más pequeñas, pero mas frecuentes. Así en un caso es mayor el costo de almacenamiento mientras que en el otro es mayor el costo de transporte. En general, éste tipo de situaciones dan lugar a problemas con objetivos encontrados como se aprecia en la figura 59. Vemos que para el costo total hay un mínimo que es el EOQ que se busca.

En el modelo básico EOQ el costo total puede referirse a:

$$\text{Costo total anual} = D * C + \frac{D}{C} * S + \frac{Q}{2} * C * i$$

Donde:

D= demanda anual del artículo

C= valor de compra unitario del artículo

S= costo fijo de cada orden

i= costo de almacenamiento de inventario por unidad (como porcentaje de C)

Q= cantidad ordenada por vez

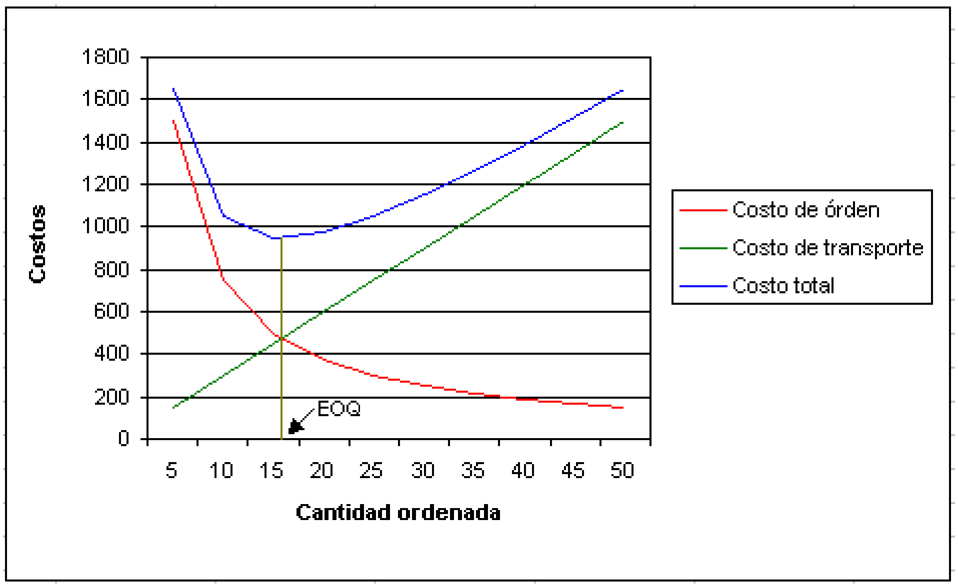



**Figura 58**

El primer término de la fórmula (D*C) representa el valor de compra anual del producto. El segundo término (S*D/Q) representa el costo anual de las órdenes (D/Q= número de órdenes). El tercer término C*i*Q/2) representa el costo anual de almacenamiento.

Para aclarar este tipo de problemas, sea el siguiente ejemplo.

Alan Wang es responsable de la compra de papel para todas las copiadoras e impresoras láser del la corporación MetroBank en su casa central. Alan proyecta que en el año entrante deberá comprar 24000 cajas de papel el cual será utilizado a ritmo constante a través de todo el año. Cada caja de papel cuesta 35$. Alan estima en 50$ cada orden emitida (incluye transporte). MetroBank asigna un costo de 18% en los concerniente al almacenamiento e inventario. La empresa piensa que serán necesarias 4 compras. Se desea saber cual es la cantidad más económica a ordenar (o EOQ) en la compra de papel.

## Implementando el modelo

Los datos del problema se llevan a una hoja de cálculo como la de la figura 61. Las fórmulas incluidas son:

| Celda | Fórmula | Copiar a |
|---|---|---|
| D11 | = D5*D4 | |
| D12 | =D4/D9*D6 | |
| D13 | =D9/2*D5*D7 | |
| D14 | =SUMA(D11:D13) | |

La figura 62 representan las opciones del Solver a ser ingresadas para el presente problema. Notar que la opción de asumir modelo linear no debe ser seleccionado, en caso contrario, el Solver lo resuelve como LP empleando para ello el método Simplex, con lo que el problema sería incorrectamente resuelto. Los resultados de la operación se aprecian en la figura 63. El número de arranque (6000) corresponde al debido a 4 compras anuales. El resultado dio aproximadamente 617 cajas en 39 órdenes (24000/617=38.89), o 1.333 órdenes semanales (52/39). Como práctica conviene una orden semanal de 461 cajas. Esto incrementa los costos en solo 167$ llevándolo a 844.055 $, pero le significa al banco un **ahorro de 15.000 $ por año.**

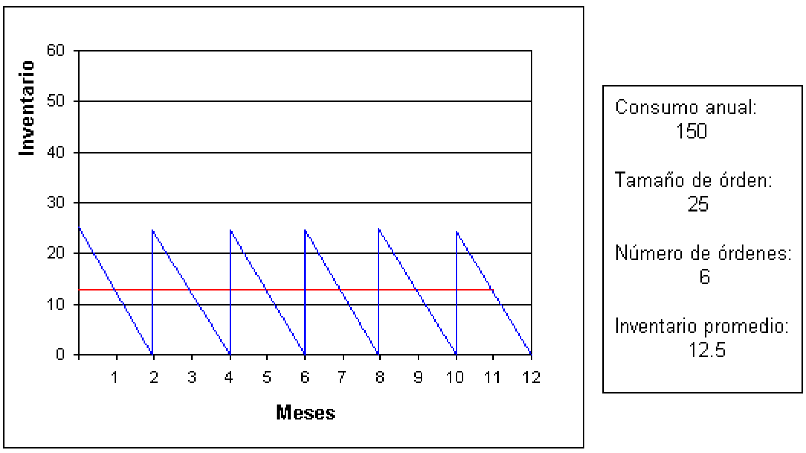



**Figura 59**

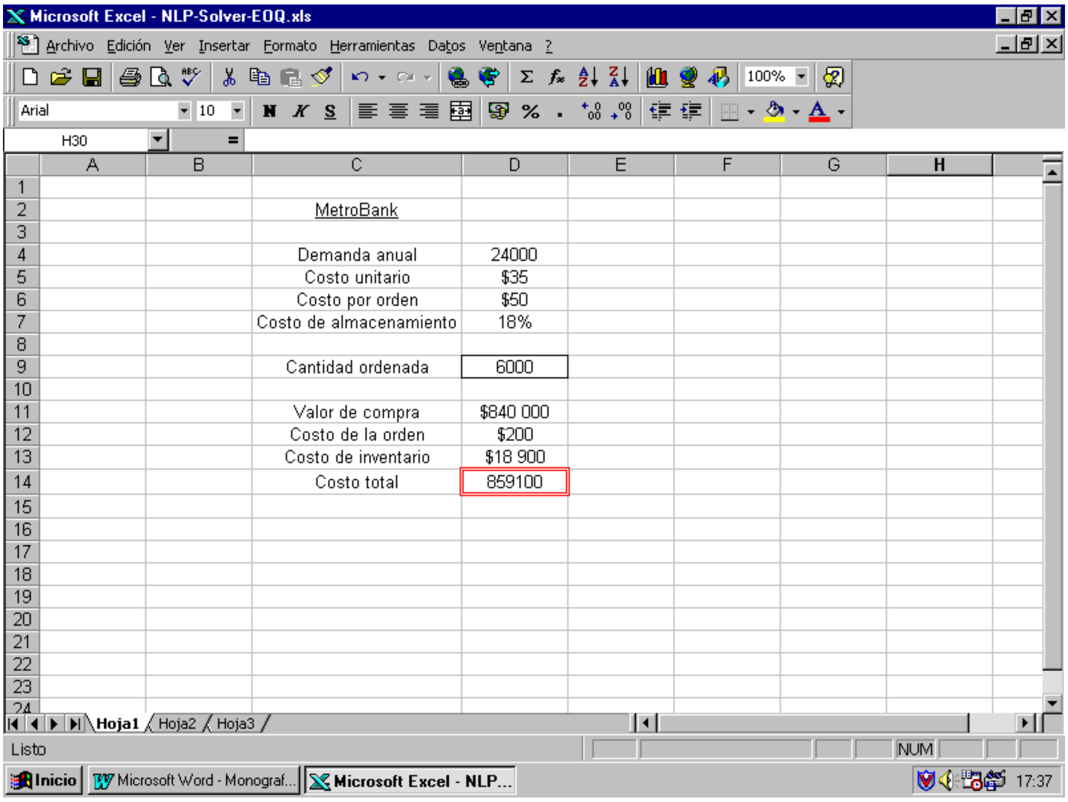



**Figura 60**

Por medio del cálculo se llega a la misma conclusión, esto es, que el óptimo es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * D * S}{C * i}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * 24000 * 50}{35 * 0.18}} = \sqrt{\frac{2400000}{6.3}} = 617.214$$

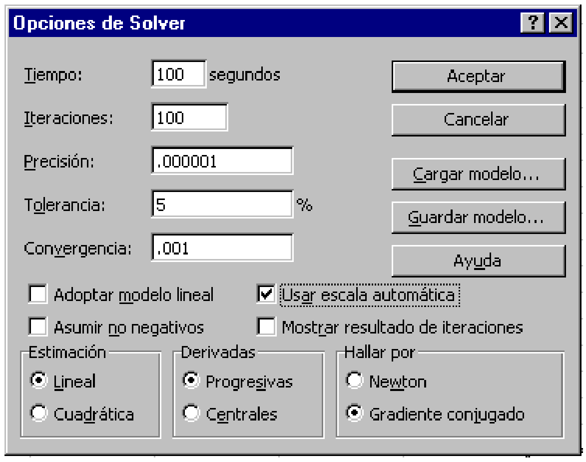




**Figura 61**

Si partimos con otro valor de arranque (menor que el esperado, por ejemplo 1), la solución, al emplear el Solver, es la misma, por lo que supondremos que es el óptimo global.

Los problemas de localización. Son no lineales debido a que la distancia entre 2 puntos es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas homólogas por lo que deben ser resueltos por algoritmos NLP.

## Opciones del Solver.

En el cuadro de diálogos de opciones del Solver podemos apreciar otras opciones dignas de mención. En la figura 63 se aprecia en detalle.

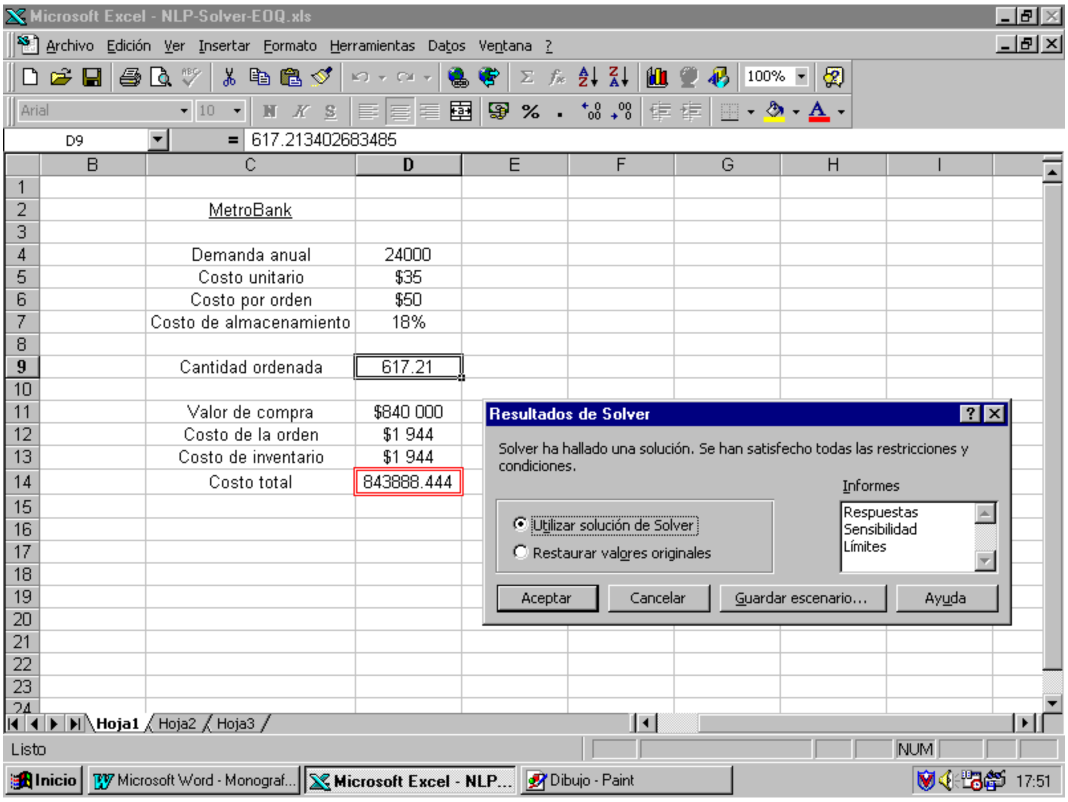



**Figura 62**

En estimación pude hacerse por técnicas de extrapolación lineal o cuadrática (por defecto es lineal). En derivadas, la estimación pude hacerse con el siguiente punto (progresivas) o con el siguiente y el anterior (centrales), por defecto se opta por progresivas. En hallar, puede hacerse por el método de Newton o por gradiente conjugado, siendo el primero la opción por defecto.

## Tercera parte: Condiciones de optimalidad

Hasta el momento, hemos pasado por alto las consideraciones de orden matemático de los métodos anteriores. Para estudiar las condiciones de factibilidad y optimalidad estudiaremos con más detalle cómo opera el Simplex y cuales son las condiciones en problemas no lineales.

### *Método Simplex*

Veremos con otro ejemplo, como el método Simplex discrimina los puntos factibles y como determina si un determinado valor es el óptimo. Sea,

Maximizar: $x_0 = 2 X_1 + 4 X_2$

Sujeto a:

$- X_1 + X_2 \leq 3$ (a)

$X_1 + X_2 \leq 5$ (b)

$X_1, X_2 \geq 0$ (c), (d)

Como hemos hecho antes, graficaremos la región factible, determinada por ambas restricciones. El resultado es la figura 64. Están incluidas las curvas de nivel de la función objetivo de la cuales, una es la solución óptima.

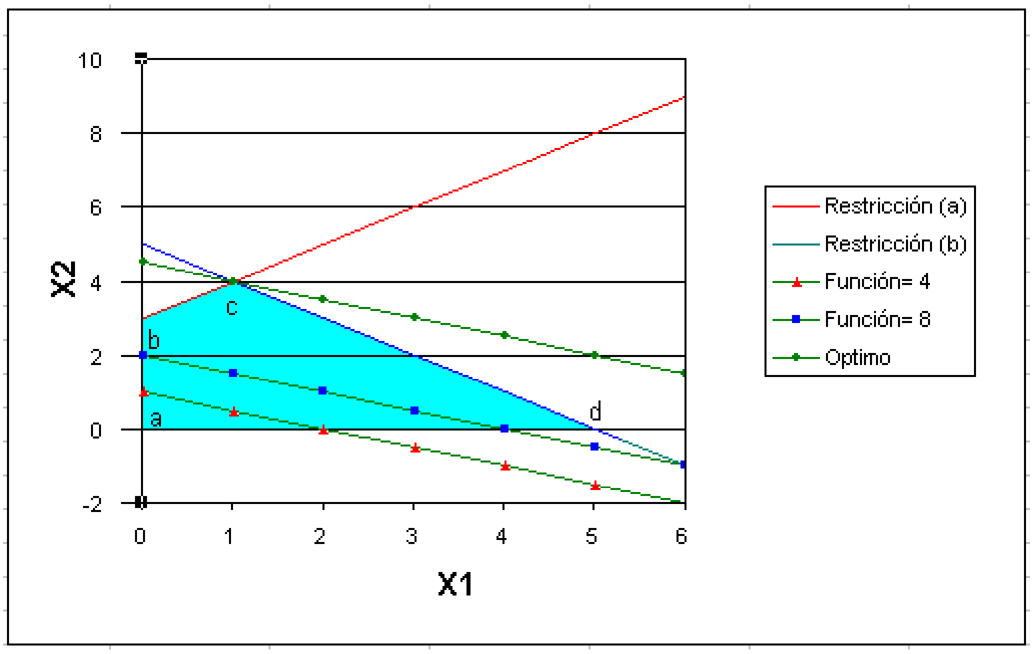



**Figura 63**

Con objeto de transformar las desigualdades en igualdades, haremos uso de las variables débiles (slacks) o auxiliares, como vimos anteriormente. El sistema a resolver queda.

Maximizar: $X_0 = 2 X_1 + 4 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4$ Sujeto a:

$- X_1 + X_2 + X_3 = 3$

$X_1 + X_2 + X_4 = 5$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

El sistema posee 4 variables y 2 ecuaciones (las restricciones) por lo que 2 de sus variables serán básicas y 2 no básicas. A continuación veremos los fundamentos matemáticos de que hace uso el método para evaluar las condiciones de factibilidad y eventualmente de optimacidad de los distintos puntos.

Los puntos que corresponden a los vértices (en uno de los cuales se encuentra la solución óptima) tienen por lo menos 2 de sus variables con valor 0, éstos son:

$X_a = (0;0;3;5)$

$X_b = (0;3,0,2)$

$X_c = (1;4;0;0)$

$X_d = (5;0;8;0)$

El sistema quedará definido por los siguientes arreglos:

Maximizar: $X_0 = C_t\ X$

Sujeto a:

$$A\,X = b$$

$$X \geq 0$$

Siendo A la matriz de coeficientes, b el vector de términos independientes, C el vector de coeficientes de la función objetivo. La matriz A se conformará por otras dos, una B, correspondiente a las variables básicas y otra matriz N de variables no básica, en nuestro caso:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A=(B,N)

Las variables de la matriz B, serán $X_B$, y las de la matriz N, serán $X_N$, donde B es no singular. El sistema LP queda como $(B,N).(X_B,X_N)_t = b$ , $(X_B,X_N) \geq 0$ o bien $B.X_B + N.X_N = b$ , $X_N \geq 0$, $X_B \geq 0$. Y siendo B una matriz no singular, existe $B^{-1}$, luego, $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.N.X_N$

Para hallar las diferentes soluciones factibles hay que igualar a cero n-m variables, donde n es el numero de variables y m el número de restricciones. Como $X_N= 0$, las variables básicas pueden calcularse:

$$X_B = B^{-1} . b$$

Si $X_B \geq 0$, será una solución básica factible del LP y si $X_B > 0$ dicha solución se denomina no degenerada. El método Simplex se basa en dos condiciones fundamentales:

*Condición de factibilidad:* esta condición asegura que partiendo de una solución básica factible inicial sólo se analicen nuevas soluciones básicas factibles.

*Condición de optimicidad:* esta condición asegura que sólo se evaluarán soluciones básicas factibles, no inferiores. Esto es, soluciones básicas factibles que asignan a la función objetivo un valor no inferior al asignado por la solución actual.

*Convergencia del método:* Si la región factible de un LP es no vacía y acotada tiene un número finito de puntos extremos (vértices), luego, dado que el método solo evalúa vértices no inferiores, necesariamente (en ausencia de degeneración) el método alcanzará un óptimo en un número finito de iteraciones.

## El algoritmo Simplex

### Etapa inicial:

Se puede definir a la región factible del LP como el conjunto de puntos $S= \{x/A.x=b, x \geq 0\}$. Luego, el vector no básico asociado a dicha solución será $X_N=0$ y el vector básico asociado será,

$$X_B = B^{-1} . b - B^{-1}.N.X_N = B^{-1} . b > 0.$$

### Etapa principal:

Dada una solución básica factible $X\in S$, si dicha solución es no óptima, el método genera una nueva solución básica factible eligiendo una variable no básica $X_{Nj}$ (con valor actual cero) y la convierte en básica (incrementando su valor), en reemplazo de una variable básica $X_{Bi}$ (con valor actual mayor que cero) la que pasa a no básica (tomando valor cero).

La variable $X_{Nj}$ que pasa a $X_{Bi}$ se denomina variable ingresante a la base.

La variable $X_{Bi}$ que pasa a $X_{Nj}$ se denomina variable saliente de la base.

**Condición de optimicidad**

El valor actual de la función objetivo vendrá dado por

$X_0 = C_B.X_B + C_N.X_N = C_B.(B^{-1}.b - B^{-1}.N.X_N) + C_N.X_N = C_B.B^{-1}.b - (C_B.B^{-1}.N - C_N).X_N$ o bien

$$X_0 = C_B.B^{-1}.b - \sum_{j \in J} (C_B.B^{-1}.a_j - c_j).X_j$$

Siendo J el conjunto de subíndices de las variables no básicas y $a_j$ la columna asociada a la variable $X_j$. Un análisis del valor $(c.B^{-1}.a_j - c_j)$ permite deducir (para problemas de maximización):

- Si $(c.B^{-1}.a_j - c_j) \geq 0$ œ $j \in J$ cualquier $X_j$ no básica que ingrese a la base no mejorará el valor de la función objetivo, luego el punto actual es óptimo (condición de parada del algoritmo).
- Si $(c.B^{-1}.a_j - c_j) < 0$ para algún valor $j \in J$, $X_J$ será candidata a ingresar a la base puesto que al aumentar el valor de $X_j$ puede mejorar el valor de la función objetivo. De todas las $X_j / j \in J$ con valor $(c.B^{-1}.a_j - c_j) < 0$ se elige como variable ingresante aquella cuyo valor $(c.B^{-1}.a_j - c_j)$ sea menor.

En nuestro ejemplo, elegimos como solución básica factible inicial al vértice $X_a$, por o que:

$X_B=(X_3,X_4)$ y $X_N=(X_1,X_2)$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad C_B=(0;0)$ $\quad C_N=(2;4)$ $\quad b(3;5)$

$X_N=(X_1, X_2) = (0,0)$ $\qquad X_B = B^{-1} . b$

$X_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times (3 \quad 5) = (3 \quad 5)$ $\qquad X_B=(3,5)$

Se evalúa la función objetivo $\quad X_0 = C_B. X_B + C_N.X_N$

$$X_0 = (0 \quad 0) \times (3 \quad 5) + (2 \quad 4) \times (0 \quad 0) = 0$$

Ahora vamos a determinar cual será la variable ingresante, para ello vamos a evaluar $(c.B^{-1}.a_j - c_j)$

j=1 $\quad (0 \quad 0) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times (-1 \quad 1) - 2 = -2$

j=2 $\quad (0 \quad 0) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times (1 \quad 1) - 2 = -4$

El punto en estudio no verifica la condición de óptimo. Se elige como variable ingresante la que potencialmente incrementa más la función objetivo, esto es j=2, por lo tanto ingresa $X_2$.

**Condición de factibilidad**

Selecciona la variable saliente en base a satisfacer,

(1) La condición de no negatividad, $X \geq 0$.

(2) La condición de solución básica, esto es que la variable saliente debe tomar valor cero.

Luego, siendo $X_j$ / j $\in$ J la variable ingresante (su valor aumentará desde el actual cero). Con lo cual el nuevo valor del vector de variables básicas vendrá dado por $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_j.X_j$ .Las restantes variables no básicas se mantendrán con valor cero.

Sea $X_{Bi}$ el i-ésimo elemento del vector de variables básicas $X_B$(m). Luego, la condición (1) establece que $X_{Bi} = (B^{-1}.b) - (B^{-1}.a_j), X_j \geq 0$ œ i= 1....m.

Por otra parte, la condición (2) exige que la variable saliente $X_{Br}$ debe tomar valor cero.

Estas condiciones se satisfacen eligiendo el valor de $X_j$ (variable ingresante) como:

$X_j$= Min. $\{(B^{-1}.b)_i/(B^{-1}.a_j)_i$ œ $(B^{-1}.a_j)_i > 0\} = (B^{-1}.b)_r/(B^{-1}.a_j)_r$

Luego, la variable no básica $X_j$ ingresa a la base con valor = $(B^{-1}.b)_r/(B^{-1}.a_j)_r$ y la variable básica $X_{Br}$ sale de la base y toma valor cero (pasa a no básica).

Se habrá generado así una nueva solución básica factible no inferior a la anterior. El procedimiento vuelve a la condición de optimicidad.

Siguiendo el ejemplo anterior, determinaremos la variable saliente, esto es,

$X_j$= Min. $\{(B^{-1}.b)_i/(B^{-1}.a_j)_i$ œ $(B^{-1}.a_j)_i > 0\}$ entre $X_3$ y $X_4$.

i=3 $$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3$$

i=4 $$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 5$$

Como $X_3$ dio el mínimo valor, dicha variable será la saliente.

Ahora, nos queda:

$X_B = (X_2, X_4)$ $X_N = (X_1, X_3)$

$C_B = (4;0)$ $C_N = (2;0)$ $X_N = (0,0)$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 11\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}$$ $X_B = (3,2)$

Se evalúa nuevamente la función objetivo: $X_0 = C_B.\ X_B + C_N.X_N$

$$\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix} \div \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 12$$

Lo que mejora la solución. Ahora evaluaremos la nueva variable ingresante entre $X_1$ y $X_3$.

J=1 $$\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 2 = -6$$

J=3 $$\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0 = 4$$

La variable $X_1$ ocasiona una mejora, mientras que la $X_3$ la empeora. Por lo tanto la variable ingresante será $X_1$. A continuación se evalúa cual es la variable saliente entre $X_2$ y $X_4$

i=2 $\quad (1 \quad 0)\times\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}/(1 \quad 0)\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3$

i=4 $\quad (-1 \quad 1)\times\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}/(-1 \quad 1)\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2$

Por lo tanto sale $X_4$. Ahora el problema queda:

$X_B=(X_1, X_2)$ $\qquad X_N=(X_3, X_4)$

$C_B=(2;4)$ $\quad C_N=(0;0)$ $\qquad X_N=(0,0)$

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$X_B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=(1 \quad 4)$ entonces $X_B=(1,4)$

La función objetivo $X_0 = C_B.\,X_B + C_N.X_N$ dará:

$X_0=(2 \quad 4)\times\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=18$ Como el término $C_N$ es nulo, se puede omitir.

La solución es mejor que antes, ahora veremos si es la óptima. Para ello evaluaremos las variables candidatas a ingresar, las que son $X_3$ y $X_4$.

j=3 $\quad (2 \quad 4)\times\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-0=1$

j=4 $\quad (2 \quad 4)\times\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-0=3$

Por lo tanto es el óptimo. Efectivamente, hemos visto por el método gráfico que el punto $X_c=(1,4,0,0)$ es el óptimo y el valor de la función objetivo es efectivamente 18.

## *Teoría Clásica de la programación No Lineal*

A efectos de presentar los resultados teóricos, los NLP son clasificados en NLP No Condicionados (sin restricciones), NLP condicionados por igualdades y NLP condicionados por desigualdades. Los postulados teóricos son presentados a través del enunciado de teoremas sin demostración.

## Programas Matemáticos no Condicionados

Teorema 1: Condición necesaria de Óptimo Local No Condicionado

Sea $f:R^n \rightarrow R^1$ continua y diferenciable en todo $x \in R^n$. Luego si X* es un punto (finito) donde la función alcanza un óptimo local, se verifica $\nabla f(X^*)=0$. En particular, se dice que X* es un óptimo local no condicionado.

Teorema 2: Condición suficiente de Óptimo Local No Condicionado

Sea $f:R^n \rightarrow R^1$ continua y diferenciable dos veces en todo $x \in R^n$. Si todas las primeras derivadas de f(x) se anulan en X*, y si la matriz Hessiana evaluada en X* es negativa (positiva) definida, luego X* es un máximo (mínimo) local de f.

Extensión: Si X* es un máximo (mínimo) local no condicionado de f(x), luego la matriz Hessiana en X* es negativa (positiva) definida o semidefinida.

Teorema 3: Condición Suficiente de Óptimo Global No Condicionado

Sea $f:R^n \rightarrow R^1$ continua y diferenciable dos veces y convexa œ $x \in R^n$. Luego todo mínimo (máximo) local de f(x) es global.

## Programas Matemáticos Condicionados por Igualdades

Este tipo de NLP es representado a través de la siguiente estructura general:

Opt f8x) sa: { $x \in R^n$, $g_i(x)=b_i$, œ i=1,...,m} siendo $f:R^n \rightarrow R^1$ y $g_{i:R}{}^n \rightarrow R^1$ œ i=1,...,m donde m <n.

Sea $X^* \in R^n$ un óptimo local de este NLP, se define a la matriz (n*m) Jacobiana J(X*) como

$$J(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta g_1(X^*)}{\vartheta X_1} & \ldots\ldots & \frac{\vartheta g_1(X^*)}{\vartheta X_m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\vartheta g_m(X^*)}{\vartheta X_1} & \ldots\ldots & \frac{\vartheta g_m(X^*)}{\vartheta X_m} \end{bmatrix}$$

Teorema 4: Condición necesaria de óptimo local restringido por igualdades

Sea $X^* \in R^n$ un óptimo local de f(x) sujeto a las restricciones de igualdad $g_i(X^*)=b_i$, œ i=1,...,m donde m <n. Si es posible elegir m variables tal que la matriz Jacobiana J(X*) sea no singular, › un único conjunto de escalares $8_1$*,...,$8_m$* satisfaciendo: $\nabla f(X^*) - \Sigma_{œi}\, 8_i^* \,\nabla g_i(X^*) = 0$

*La función Lagrangiana:* Este sistema de ecuaciones puede obtenerse como condición necesaria de óptimo local del NLP no condicionado:

Opt L(x, 8) = f(X*) - $\Sigma_{œi}\, 8_i^*\, (g_i(X^*)-b_i)$

Sea (X*, 8*) óptimo local de L(x, 8). Luego debe verificar la condición necesaria de óptimo local no condicionado (Teorema 1) $\nabla$ L(X*, 8*) =0. Esto es:

$\nabla_x L(X^*, 8^*) = \nabla f(X^*) - \Sigma_{œi}\, 8_i^*\, \nabla g_i(X^*) = 0$

$\partial L(X^*, 8^*)/\partial 8_i = (g_i(X^*)-b_i)=0$ œ i=1,...,m

Donde $\nabla_x$ L(X*, 8*) es un vector que contiene las derivadas parciales de L(x, 8) respecto a $X_j$ œ j=1,...,n.

Luego se puede decir que este problema irrestricto es equivalente al problema anterior en cuanto a que toda solución óptima de ambos problemas satisface el mismo conjunto de ecuaciones. L(x, 8) se denomina función Lagrangiana y los $8_i$ œ i=1,...,m se denominan multiplicadores de Lagrange.

Teorema 5: Condición suficiente de óptimo local restringido por igualdades

Sea f(x) $:R^n \rightarrow R^1$ y $g_i$ (x)$:R^n \rightarrow R^1$ œ i=1,...,m continua y diferenciable dos veces en todo $x \in N_\delta(X^*)$ (entorno del punto X* de radio $\delta$). Sean X* $\in R^m$/ $\nabla$ L(X*, 8*) =0 Si existe z $\in E^n$ no nulo cumpliendo $z^T$ $\nabla g_i$(X*)=0 œ i=1,...,m, el cual satisface $z^T$ $H_x$ L(X*, 8*) z >0 $\rightarrow$X* es un mínimo local estricto del problema: opt f(x) sa: { $x \in R^n$, $g_i(x)=b_i$, œ i=1,...,m}. Si $z^T$ $H_x$ L(X*, 8*) z < 0 $\rightarrow$ X* es un máximo local estricto del problema: opt f(x) sa: { $x \in R^n$, $g_i(x)=b_i$, œ i=1,...,m}

## Problemas Matemáticos Condicionados por Desigualdades

Este tipo de problemas NLP puede ser representado a través de la siguiente estructura general:

Max f(x)

Sa: { $x \in R^n$, $g_i(x) \leq b_i$, œ i=1,...,m} siendo f(x) $:R^n \rightarrow R^1$ y $g_i$ (x)$:R^n \rightarrow R^1$ œ i=1,...,m. Todo NLP puede ser llevado a esta estructura, por lo tanto los teoremas siguientes son de aplicación general.

Teorema 6: Condición necesaria de Óptimo Local de Kuhn Tucker

Sea X* un máximo local restringido de f(x) sobre la región factible definida por $g_i(x) \leq b_i$, œ i=1,...,m donde f(x) y $g_i$(x) œ i=1,...,m son linealmente independientes, luego existe 8*=($8_1$*,...,$8_2$*) tal que:

$\nabla$f(X*)- $\Sigma_{œi}$ $8_i$* $\nabla g_i$(X*) = 0

$8_i$*($g_i$(X*)-$b_i$) = 0 œ i=1,...,m

$8_i \geq 0$ œ i=1,...,m

Teorema 7: Condición Suficiente de óptimo global

Sea f(x) $:R^n \rightarrow R^1$ una función cóncava a ser maximizada sobre una región factible convexa, luego todo $X^* \in R^n$ que satisfaga las condiciones necesarias de óptimo de Kuhn-Tucker es un máximo global de NLP.

Sea f(x): $R^n \rightarrow R^1$ una función convexa a ser minimizada sobre una región factible convexa, luego todo $X^* \in R^n$ que satisfaga las condiciones necesarias de óptimo de Kuhn-Tucker es un mínimo global de NLP.

Ejemplos:

Veremos, como haciendo uso de los teoremas anteriores, podemos resolver problemas de Optimización con Programación No Lineal.

**Ejemplo 1: Programas Matemáticos no Condicionados**

Dado el NLP:

$$\text{Opt } f(x) \quad X_1^4 - 4X_1^3 + 4X_1^2 + X_2^4 - X_2^3 - 6X_2^2$$

Encontrar máximos y mínimos.

Resolución: Por condición necesaria de óptimo local no condicionado (Teorema 1), se tiene:

$$\nabla f(X^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\vartheta f(X^*)}{\vartheta X_1} \\ \dfrac{\vartheta f(X^*)}{\vartheta X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4X_1^3 - 12X_1^2 + 8X_1 \\ 4X_2^3 - 3X_2^2 - 12X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4X_1(X_1^2 - 3X_1 + 2) = 0$$
$$X_2(4X_2^2 - 3X_2 - 12) = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen las siguientes soluciones:

$X_1$*=(0;0) $X_2$*=(0;2,147) $X_3$*=(0;-1,397) $X_4$*=(2;0) $X_5$*=(2;2,147)

$X_6$*=(2;-1,397) $X_7$*=(1;0) $X_8$*=(1;2,147) $X_9$*=(1;-1,397)

Luego, existen nueve puntos del dominio de la función que verifican las condiciones necesarias de óptimo local no condicionado.

A continuación se analiza si verifican la condición suficiente de óptimo local no condicionado (Teorema 2), la cual requiere evaluar, en cada uno de los puntos anteriores, la matriz Hessiana.

$$Hf(X^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\vartheta^2 f(X^*)}{\vartheta X_1 X_1} & \dfrac{\vartheta^2 f(X^*)}{\vartheta X_1 X_2} \\ \dfrac{\vartheta^2 f(X^*)}{\vartheta X_2 X_1} & \dfrac{\vartheta^2 f(X^*)}{\vartheta X_2 X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12X_1^2 - 24X_1 + 8 & 0 \\ 0 & 12X_2^2 - 6X_2 - 12 \end{bmatrix}$$

$$H \downarrow X_1^* = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad h_{11} > 0 \quad |H| = -96 < 0 \quad \rightarrow \text{no verifica condición}$$

Luego , $X_1$*=(0;0) no verifica condición suficiente de óptimo local no condicionado.

$$H \downarrow X_2^* = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 30.43 \end{bmatrix} \qquad h_{11} > 0 \quad |H| = 243.4 > 0 \quad \rightarrow \text{H es positiva definida}$$

Luego, $X_2$*=(0;2,147) es un mínimo local

$$H \downarrow X_3^* = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 19.80 \end{bmatrix} \qquad h_{11} > 0 \quad |H| = 158.4 > 0 \quad \rightarrow \text{H es definida positiva}$$

Luego, $X_3$*=(0;-1,397) es un mínimo local.

$$H \downarrow X_4^* = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad h_{11} > 0 \quad |H| = 0 \quad \rightarrow \text{H es positiva semidefinida}$$

Luego, $X_4$*=(2;0) no verifica condición suficiente. No obstante, por extensión del Teorema 2, es posible que $X_4$* sea un óptimo local.

$$H \downarrow X_5^* = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 30.43 \end{bmatrix} \qquad h_{11} > 0 \quad |H| = 243.4 > 0 \quad \rightarrow \text{H es definida positiva}$$

Luego, $X_5$*=(2;2,147) es un mínimo local.

$$H \downarrow X_6^* = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 19.80 \end{bmatrix} \qquad h_{11} > 0 \quad |H| = 158.4 > 0 \quad \rightarrow \text{H es definida positiva}$$

Luego, $X_6$*=(2;-1,397) es un mínimo local.

$$H \downarrow X_7^* = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad h_{11} < 0 \quad |H| = 48 > 0 \quad \rightarrow \text{H es definida negativa}$$

Luego, $X_7$*=(1;0), es un máximo local

$$H \downarrow X_7{}^* = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 30.43 \end{bmatrix} \qquad h_{11} < 0 \quad |H| = -122 < 0 \quad \rightarrow H \text{ no verifica condición}$$

Luego, $X_8$*=(1;2,147) no verifica condición suficiente.

$$H \downarrow X_8{}^* = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 19.80 \end{bmatrix} \qquad h_{11} < 0 \quad |H| = -79.2 < 0 \quad \rightarrow H \text{ no verifica condición}$$

Luego, $X_9$*=(1;-1,397), no verifica condición suficiente.

Como la función no es cóncava ni convexa, no verifica la condición suficiente de Óptimo Global no condicionado.

**Ejemplo 2: Programas Matemáticos Condicionados por Igualdades**

Dado el NLP: Opt $f(x) = (5 - X_1)^2 + X_2^2$

s.a.: $(1 - X_1)^2 + X_2^2 = 9$

se buscan máximos y mínimos.

Resolución: Por condición necesaria de óptimo local condicionado por igualdades (Teorema 4), la derivada a través del problema equivalente, se tiene:

$$L(x,\lambda)=(5-X_1)^2 + X_2^2 - \lambda[(1-X_1)^2 + X_2^2 - 9]$$

$$\nabla L(X^*)=0 \quad \rightarrow \quad -2(5-X_1) + 2\lambda(1-X_1)= 0$$

$$2 X_2 - 2 \lambda X_2 = 0$$

$$(1-X_1)^2 + X_2^2 - 9 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen las siguientes soluciones:

$X_1$*=(4;0; -1/3) $X_2$*=(-2;0; 7/3)

Luego, existen dos puntos que verifican las condiciones necesarias de óptimo local restringido por igualdades.

A continuación se analiza si dichos puntos verifican la condición suficiente de óptimo local restringido por igualdades (Teorema 5).

$$\text{Debe} \exists \;\; z \in R^2 \text{ no nulo } / \;\; z^T \nabla g(X^*) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; (z_1, z_2) \begin{bmatrix} -2(1-X_1 \\ 2X_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$[z_1, z_2] H_x L(X^*) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [z_1, z_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\vartheta^2 L(X^*)}{\vartheta X_1 X_1} & \dfrac{\vartheta^2 L(X^*)}{\vartheta X_1 X_2} \\ \dfrac{\vartheta^2 L(X^*)}{\vartheta X_2 X_1} & \dfrac{\vartheta^2 L(X^*)}{\vartheta X_2 X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [z_1, z_2] \begin{bmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Para $X_1$*=(4;0; -1/3)

$$(z_1; z_2) \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{ se verifica } \forall \text{ z no nulo } z_1 = 0 \quad z_2 \neq 0$$

$$[z_1; z_2] H_x L(X^*) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [z_1; z_2] \begin{bmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 8/3\, z_2^2 > 0 \;\; \forall \;\; z_2 \neq 0$$

Por lo tanto, $X_1$*=(4;0; -1/3) es un mínimo local estricto del problema.

Para $Z_2$*=(-2;0; 7/3)

$$(z_1;z_2)\begin{bmatrix}-6\\0\end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \text{ se verifica } \forall \text{ z no nulo } z_1=0 \quad z_2 \neq 0$$

Luego:

$$[z_{1;}z_2]H_xL(X^*)\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=[z_{1;}z_2]\begin{bmatrix}-8/3 & 0\\0 & -8/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=-8/3\,z_2^2<0 \;\; \forall \;\; z_2 \neq 0$$

Por lo tanto, $Z_2$*=(-2;0; 7/3) es un máximo local estricto del problema.

## Ejemplo 3: Problemas Condicionados por Desigualdades

Dado el NLP:

Min: $f(x) = X_1^2 + X_2$

s.a.: $X_1^2 + X_2^2 \leq 9$

$X_1 + X_2 \leq 1$

Se resuelve el mismo usando condición necesaria y suficiente de óptimo.

Resolución: Se aplica condición necesaria de óptimo local (Teorema 6), para lo cual es necesario primero llevar el NLP a la estructura general en base a la cual se planteó el teorema 6, esto requiere en este caso: max-f(x). Luego se obtiene:

$\nabla f(x) - \lambda_1 \nabla g_1(x) - \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0$

$\lambda_1[g_1(x) - 9] = 0$

$\lambda_2[g_2(x) - 1] = 0$

$\lambda_1 \geq 0$

$\lambda_2 \geq 0$

$X_1^2 + X_2^2 \leq 9$

$X_1 + X_2 \leq 1$

Se genera así el siguiente sistema de ecuaciones e inecuaciones

1. $-2 X_1 - \lambda_1 2 X_1 - \lambda_2 = 0$
2. $-1 - 2 \lambda_1 X_2 - \lambda_2 = 0$
3. $\lambda_1 (X_1^2 + X_2^2 - 9) = 0$
4. $\lambda_2 (X_1 + X_2 - 1) = 0$
5. $\lambda_1 \geq 0$
6. $\lambda_2 \geq 0$
7. $X_1^2 + X_2^2 \leq 9$
8. $X_1 + X_2 \leq 1$

Resolviendo el sistema de ecuaciones e inecuaciones se obtienen el punto $(X^*,\lambda^*)$=(0;-3;1/6;0) que verifican las condiciones necesarias de óptimo local.

Se analiza a continuación la condición suficiente de óptimo (Teorema 7) obteniendo:

Función objetivo: $f(x)= X_1^2 + X_2$ es una función convexa.

Región factible: las funciones $g_1= X_1^2 + X_2^2$ y $g_2= X_1 + X_2$ son convexas y el signo de la restricción correspondiente es de $\leq$ $\rightarrow$ la región factible es convexa. Por lo tanto, todo X* que satisface la condición necesaria de óptimo local Teorema 7, es mínimo global.

# Cuarta Parte: Y más allá...

Muchas veces los valores de la celdas de una hoja de cálculo representan variables aleatorias que no pueden ser determinadas con certidumbre. Cualquier valor incierto en una celda de entrada fluye a través de toda la planilla modelada creando valores inciertos que involucran algunos grados de riesgo.

Existen varios métodos de análisis de riesgo posibles los que incluyen mejor-caso/peor-caso, "¿Qué pasa, si...? y la simulación. De los tres métodos, la simulación es la única que provee sólidas evidencias (hechos y figuras) que pueden ser usadas en la toma de decisiones. Al simular un modelo es usa RNG (generadores de números al azar) para seleccionar valores representativos de cada variable independiente incierta en el modelo. Este proceso se repite una y otra vez para generar una muestra representativa de valores de las variables independientes las cuales luego pueden ser analizadas. Una de las herramientas que puede incluirse en una hoja de cálculo como Excel es el @Risk.

Bibliografía:

1) Modelado, Simulación y Optimzación de Procesos Químicos, capítulos XIyXII,Dr. Nicolás Scenna y colaboradores, 1999. https://www.modeladoeningenieria.edu.ar/index.php/descargas/libro

2) Manual del Ingeniero Químico Perry, Don W. Green et al, 9º edición sección 3.

3) Introduction to Linear Optimization Dimitris Bertsimas John N. Tsitsiklis -Massachusetts Institute of Technology

4) NONLINEAR PROGRAMMING ANALYSIS AND METHODS MORDECAI AVRIEL Teclznion-Israel- Institute of Technology Haifa, Israel

5) Numerical Optimization, Second Edition- Editors: Thomas V. Mikosch Sidney I. Resnick Stephen M. Robinson

6) OPTIMIZATION OF CHEMICAL PROCESSES: Eduardo D. Glandt, Professor of Chemical Engineering, University of Pennsylvania, Michael T. Klein, Professor of Chemical Engineering, Rutgers University, Thomas E Edgar, Professor of Chemical Engineering, University of Texas at Austin