DISEÑO, SIMULACIÓN, OPTIMIZACIÓN Y SEGURIDAD DE PROCESOS

PARTE IV

CICLO FALLA – REPARACIÓN – FALLA
RELACIONES PROBABILÍSTICAS
CONFIABILIDAD Y DISPONIBILIDAD DE PROCESOS.

Dr. Nicolás José Scenna
Dr. Nestor Hugo Rodríguez
Dr. Juan Ignacio Manassaldi

Ingeniería de la Confiabilidad. Diseño Seguro y Operabilidad de los Procesos.

Uno de los aspectos más importantes para el gerenciamiento de procesos es asegurar un valor de *disponibilidad* adecuado para el funcionamiento de la planta, en función de los parámetros y criterios adoptados en el diseño. Como se verá más adelante, la disponibilidad está relacionada con *la seguridad operativa del proceso*, enfocándose en diversos objetivos. *La disponibilidad de un proceso puede definirse en general como la proporción de tiempo disponible -en funcionamiento según los criterios del diseño- de un proceso/sistema/componente, respecto de un período determinado de tiempo. En su forma más simple, ese período de tiempo de operación normal asumido (según diseño de un proceso cualquiera), puede ser definido como el tiempo anual (horizonte de tiempo asumido según diseño), menos el tiempo asignado a la parada anual habitual de planta para mantenimiento.*

Como se mostrará más adelante, la disponibilidad se estima en función de la *configuración estructural del diseño* establecido y *la confiabilidad de los componentes* del proceso/equipo/sistema analizado. Es importante, además, la estrategia *de mantenimiento* adoptada.

Una pregunta fundamental asociada al concepto de disponibilidad es: “está el equipo/sistema/componente disponible (en condiciones de cumplir su cometido según diseño) cuando se lo necesite?”. ¿O bien, “Cuál es la proporción de tiempo (respecto de un horizonte de tiempo bajo análisis) en que lo estará?”.

La confiabilidad, por otra parte, puede ser definida en forma sencilla, ya sea como la *probabilidad de funcionamiento de un equipo/componente/sistema según diseño, a un dado tiempo desde su puesta en funcionamiento; o bien alternativamente, como la proporción funcionando según diseño a un dado tiempo, respecto del conjunto de todos los equipos/componentes/sistemas existentes en planta, desde su puesta en funcionamiento.*

En general los componentes de los procesos químicos, u otros, pueden -o no- ser reparables. Por lo que existe en la operación real de procesos, un ciclo que comienza con el arranque o puesta en marcha, el funcionamiento normal de los equipos/componentes según condiciones de diseño, hasta ocurrir una falla. Si es reparable, se realiza el mantenimiento correctivo para dejarlo en condiciones (supuesto como si fuera a nuevo) para reiniciar el ciclo. Obviamente que existe un tiempo de reparación, que depende del nivel de respuesta del sistema de gerenciamiento (por ejemplo de las capacidades del sistema de mantenimiento -logística, recursos humanos, disponibilidad de repuestos apropiados..y de factores aleatorios-).

Para el análisis de disponibilidad se utiliza el historial de fallas y reparaciones, los datos de las condiciones operacionales y ciertos parámetros técnicos de los componentes (estadísticas de fallas de los componentes); y como se ha mencionado, la configuración o arreglo estructural de los equipos/componentes del proceso, según diseño. Si la planta es nueva, sin historial a disposición, se utilizan *bancos de datos de fallas*, que se nutren del historial de fallas de una gran cantidad de equipos funcionando en un período muy grande de tiempo a partir de la experiencia operativa de procesos industriales a nivel global. En muchos casos -por ejemplo componentes de equipos o sistemas electrónicos, componentes de sistemas control, seguridad, entre otros-, también son provistos por los fabricantes.

A continuación, comenzaremos con un conjunto de definiciones para luego abordar esta problemática, que en general forma parte de los estudios o análisis conocidos como RAM - una forma de denotar a un análisis que evalúa la *Confiabilidad (Reliability), Disponibilidad (Availability) y Mantenibilidad (Maintainability)* de un componente, sistema, o un proceso. A modo general podemos afirmar que el *análisis RAM* es el principal pilar, por ejemplo, de la *Ingeniería de Mantenimiento;* y sus resultados nos permiten maximizar la vida útil de los equipos, minimizar fallas y reducir los costos de mantenimiento. Esto a su vez implica la mejora de la productividad, optimizando la operabilidad y seguridad de los procesos.

Confiabilidad y Disponibilidad

Todo sistema, eventualmente falla, nada es confiable eternamente ni nada dura para siempre. Un ingeniero en confiabilidad debe asumir que un sistema fallará y, por lo tanto, tratará de disminuir la frecuencia de fallas a un nivel aceptable económica y socialmente. Asumir esto es más real que los slogans políticos o de marketing tales como: polución cero, totalmente seguro, etc.

Los términos probabilísticos en general no nos son totalmente desconocidos. Por ejemplo, por radio quien anuncia el pronóstico del día nos afirma*: hay un 20% de probabilidad de tormentas eléctricas y lluvias*; entonces agrega “luego, esa es la probabilidad de salir de casa para ir al trabajo, con un paraguas. Todos comprendemos que tal afirmación está expresada probabilísticamente. Tal como sucede con los conceptos relacionados con la confiabilidad y seguridad de los sistemas. Sin embargo, los términos o aseveraciones que involucran probabilidades deben siempre tomarse considerando la incertidumbre inherente que conllevan. Especialmente cuando “extrapolamos” o “encadenamos” sentencias, afirmaciones o valores probabilísticos.

Por ejemplo, con respecto a la aseveración anterior, debe considerarse que no todos utilizan el paraguas aún si llueve. Del mismo modo podemos encontrarnos con que una empresa que produce paraguas afirma que sus paraguas con ocho meses de antigüedad tienen una probabilidad del 96% de funcionamiento normal -según diseño-. Es natural que nos preguntemos o dudemos si el dato surge de una relación estadística que calcula dicha proporción en base a las reparaciones solicitadas por los clientes, si tal afirmación considera (o asume) estadísticas de la zona respecto de las variables relevantes que influyen sobre tal comportamiento; si se ha contemplado el “cambio climático y sus efectos sobre las “condiciones de lluvia normal/habitual esperada en la zona bajo análisis” y/o si se ha considerado la estadística de los vientos “para tal región”, entre otras cuestiones.

Nótese que quienes realizan el cálculo pueden haber tenido en cuenta todo lo necesario, pero tal vez no ha sido considerado que los paraguas acerca de los cuales versan los resultados, *se exportan globalmente*. Como es fácil de notar, el *“entorno o condiciones de contorno”*, siempre agrega un “condimento extra”, *por lo que antes de utilizar datos como el mencionado, el análisis debe ser profundo y sistemático ante cada aplicación específica.*

Aunque el razonamiento anterior pareciera trivial, es interesante notar que existen manuales o normas o recomendaciones *para numerosas cuestiones para el gerenciamiento de situaciones peligrosas o riesgosas.* Por ejemplo, para sugerir distancias de evacuación ante potenciales accidentes de cisternas que transportan sustancias peligrosas. Es interesante notar que, producido un derrame de sustancias tóxicas debido al accidente, por difusión pueden alcanzar/impactar en una zona de kilómetros a la redonda. La difusión depende de muchos de los factores ambientales mencionados más arriba. Sin embargo, muchos de los datos disponibles han sido obtenidos centrados en zonas geográficas específicas.

En sentido amplio, *confiabilidad* está asociado con operación exitosa, con ausencia de roturas y fallas. Para realizar un análisis de ingeniería, debemos comenzar con notar que la confiabilidad está asociada a una probabilidad: *Un sistema se dice que falla cuando deja de realizar la función para la que fue diseñado*. La falla puede ser total (un motor que no arranca, una estructura que colapsa) o parcial (un motor que no da la potencia suficiente, una estructura que defeccionó parcialmente).

El término *confiabilidad está asociado con el tiempo*. Este puede ser considerado de distintos modos. Por ejemplo, un sistema que es operado de manera continua, o intermitente pero secuencialmente a un ritmo dado en un horizonte dado de tiempo -de manera cíclica-, difiere con aquel que es operado solo bajo demanda (siendo esta aleatoria, bajo ciertas circunstancias). En la operación intermitente pero secuencial importa la cantidad de horas o el calendario en que el equipo fue operado. En la operación aleatoria (caso de un interruptor eléctrico) puede no importar principalmente la cantidad de horas de operación, y sí especificar la cantidad de paradas y arranques o activaciones/desactivaciones que ocurrieron. Aunque siempre el tiempo de operación total tiene importancia.

Dos factores son importantes de analizar: la operación del sistema/equipo/aparato con respecto a las condiciones de diseño y los efectos debidos al medio ambiente. Condiciones de diseño pueden ser por ejemplo el peso que puede soportar una estructura, la carga nominal eléctrica de un generador, la velocidad de transferencia de un sistema de telecomunicaciones. Las condiciones ambientales son aquellas que afectan la operación del sistema respecto a las condiciones de diseño: temperaturas extremas, polvo, sal, humedad, etc., en condiciones reales de operación.

Cuando un sistema falla o no funciona correctamente, la gran mayoría puede ser reparado. En tal caso, dado que mientras está en el proceso de reparación no puede ser empleado, surge otra medida relacionada que es la *mantenibilidad*, *que es distinta de la disponibilidad*. Como la reparación es costosa, también se desea conocer el *número esperado de fallas* durante un intervalo de tiempo determinado, ya que está relacionado con el número de reparaciones a realizar.

A continuación, se enumeran en la tabla algunos de los términos (probabilísticos y no probabilísticos) que se utilizan en la ingeniería de la confiabilidad, los cuales serán definidos y analizados en los siguientes apartados.

DEFINICIONES Y TÉRMINOS UTILIZADOS EN LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD Y DISPONIBILIDAD DE SISTEMAS	
Disponibilidad («Availability»), (A)	Independientemente de su historia de fallas, es la probabilidad que un equipo esté disponible para realizar una tarea cuando se lo requiere. O la fracción de tiempo en

	estado disponible sobre el tiempo total analizado. Pueden distinguirse distintos tipos de disponibilidad: Disponibilidad en estado estacionario, disponibilidad instantánea, disponibilidad media en un intervalo de tiempo dado.
Error humano («Human Error»)	Cualquier acción de diseñadores, operadores o supervisores que puede contribuir con/o resultar en: incidentes y/o accidentes.
Falla («Failure»)	Funcionamiento anómalo con respecto a las condiciones de diseño, de un equipo o componente fuera de las tolerancias especificadas. La falla puede ser total o parcial. En general aquí consideraremos estados binarios (funciona o no funciona)
Fiabilidad/Confiabiliad de un equipo («Equipment Reliability»), (R)	Es la probabilidad que, bajo condiciones determinadas, el equipo realice sus funciones dentro de las tolerancias esperadas, en un tiempo dado. En general se utiliza esta definición para sistemas no reparables.
Intervalo de confianza («Confidence Interval»)	Es el intervalo de valores de una variable para el que existe una probabilidad determinada (por ej., 95%) que el valor de la variable se encuentre dentro de dicho intervalo. Recordar que en estado estacionario en realidad las variables “fluctúan aleatoriamente” con respecto a un valor promedio. Luego es importante tomar un criterio para decidir cuando el valor está fuera o dentro de la banda de fluctuación normal.
Intervalo entre revisiones («Test Interval»), (T)	Los sistemas de protección deben verificarse a intervalos regulares. *T* es el tiempo entre dos revisiones periódicas.
Modalidad de falla («Failure Mode»)	Es la manera en que un sistema deja de realizar su función. El modo de falla no debe confundirse con la causa de la falla. Así, un modo de falla para un compresor podría ser no arrancar al producirse la demanda, mientras que la causa de la falla podría ser una interrupción en el suministro de energía eléctrica. *Las modalidades de falla se dividen en tres grupos de acuerdo con su severidad*: 1) *Catastróficas*, cuando la falla es súbita y afecta a funciones esenciales del equipo. No funciona. 2) De degradación, cuando la falla es gradual o parcial. Funciona, pero en un estado degradado. 3) *Incipientes*, cuando la falla consiste en una imperfección en el funcionamiento del equipo que puede resultar con el tiempo en una falla

	catastrófica o de degradación a menos que se tomen acciones correctivas.
Probabilidad de falla («Failure Probability»)	La probabilidad que un sistema falle al ocurrir una demanda, o también la probabilidad que un sistema falle en un tiempo determinado.
Tasa de demanda («Demand Rate»), (D)	La frecuencia (número de ocasiones por año) en que se requiere la actuación de un sistema de protección, como, por ejemplo, la apertura de una válvula de alivio o la parada de emergencia activada por una alarma de temperatura.
Tasa o frecuencia de fallas («Failure Rate») (λ)	La frecuencia con que se producen fallas en un sistema. Puede expresarse como frecuencia estricta (número de ocasiones por año), o como frecuencia sobre demanda (número de fallas dividido por el número total de demandas). Siempre que sea posible, los sistemas de protección deben diseñarse con la condición de "falla segura". En este caso, al fallar el sistema debe quedar en situación conservadora desde el punto de vista de la seguridad.
Tasa de peligro («Hazard Rate»), (H)	La frecuencia (número de ocasiones por año) en que una situación peligrosa se materializa (por ejemplo, el número de veces por año en que una mezcla reaccionante alcanza la temperatura de autoignición, o el número de veces por año en que se supera la presión de diseño de un recipiente). No necesariamente es la frecuencia con que ocurre un accidente, ya que, por ejemplo, el hecho que la presión de diseño sea superada no implica necesariamente la ruptura del recipiente. No obstante, la probabilidad que dicho escenario catastrófico ocurra se incrementa proporcionalmente con el valor de la frecuencia de ocurrencia de tales eventos causales relacionados.
Tiempo medio para la reparación («Mean Time to Repair»)	Es la media estadística de la distribución de tiempos de reparación. Puede estimarse como la suma de los tiempos de reparación durante un período determinado dividida por el número total de fallas durante ese período.
Tiempo Medio entre Fallas («Mean Time between Failures»)	Una forma de estimarla es como el tiempo promedio entre todos los tiempos entre dos fallas sucesivas incluyendo todos los componentes de un conjunto bajo análisis.
Tiempo Medio hasta la Falla	Sólo tiene sentido cuando se aplica a una población de

(«Mean Time to Failure»)	componentes reparables. Cuando los sistemas no se reparan, se utiliza la media de la distribución de tiempos hasta la primera falla.
Tiempo Muerto Fraccional («Fractional Dead Time»), (TMF)	Es la fracción de tiempo que un sistema se encuentra no disponible (en falla, o en reparación) $TMF = 1 - A$
Verosimilitud o probabilidad («Likelihood»)	Es una medida de la probabilidad, o de la frecuencia esperada para un evento determinado. Puede expresarse directamente como frecuencia (número de eventos esperados por año), como probabilidad de que el suceso tenga lugar durante un tiempo determinado, o como probabilidad condicional (por ejemplo, la probabilidad que exista una fuente de ignición presente en el caso que se haya producido la ruptura de la tubería que transporta la mezcla inflamable).

Intuitivamente se percibe que existen expresiones y relaciones analíticas entre conceptos tales como *confiabilidad, disponibilidad, número esperado de fallas, de reparaciones, entre otros*. En lo siguiente realizaremos un análisis progresivo de las relaciones existentes contemplando aspectos básicos del ciclo falla-reparación-falla.., determinantes en cualquier estudio de mantenibilidad o disponibilidad de un proceso dado.

Proceso Falla – Reparación – Falla

Un propósito primario de los estudios de confiabilidad y de riesgos es identificar las relaciones causales entre los eventos humanos, de los equipos y del ambiente que resultan en fallas del sistema. También encontrar las formas de disminuir el impacto por medio del rediseño agregando elementos de prevención o mitigación de los eventos accidentales (salvaguardas), o bien optimizando un adecuado gerenciamiento del mantenimiento preventivo (prevenir para minimizar la ocurrencia de las fallas de los equipos y/o componentes) y/o del correctivo (dada la ocurrencia de una falla, realizar en forma eficaz la reparación).

Las relaciones causales se pueden estudiar de diversa manera. Existen numerosos procedimientos o metodologías, cada una especializada para cierto tipo de problemáticas, tales como los estudios RAM, los árboles de fallas, el análisis de riesgos, métodos de identificación de peligros, entre otros, que pueden ser realizados ya sea cualitativa como cuantitativamente.

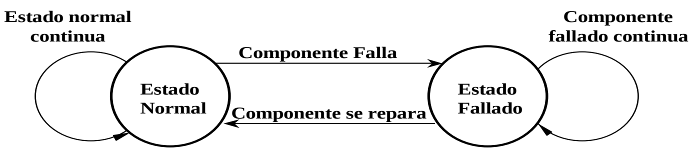
Lo importante es que luego de la identificación de los eventos peligrosos -que pueden generar incidentes y escalar a accidentes-, los sistemas sean mejorados, ya sea reduciendo las consecuencias esperadas o bien las frecuencias de ocurrencia de tales accidentes, o ambas simultáneamente. Es prioritario en primer lugar enforzarse en evitar las fallas (frecuencia de ocurrencia) y luego en minimizar sus consecuencias.

Una descripción precisa de las posibles fallas de los componentes y sus modos de falla es esencial para la identificación de los peligros y los riesgos potenciales de los sistemas; dado que éstos son causados generalmente por la combinación de fallas de sus componentes.

En este apartado pretendemos desarrollar estos conceptos. En el anexo I, se introduce un breve repaso de ciertos conceptos acerca de probabilidad. En lo siguiente, se describen ciertos conceptos básicos necesarios para describir el ciclo de vida de un componente o un sistema.

Parámetros probabilísticos de componentes con estados binarios (fallado-funciona)

La suposición en este caso es que un componente sólo tiene dos estados: funciona normalmente o está fallado (no funciona), los cambios de estado del componente son una función del tiempo. Los posibles estados de *un componente* o sistema cualquiera se muestran en la figura.



En el ciclo de vida de un componente, asumimos que éste comienza con estado normal y continúa en este estado hasta que falla (a un cierto tiempo t), por lo que entonces experimenta un cambio de estado -transición desde el estado “normal” al estado “fallado”-. El estado fallado continúa por siempre si el componente no se puede reparar. Si un componente se puede reparar, *permanece en estado fallado por un período de tiempo* (su tiempo de reparación). Cuando se repara completamente experimenta un nuevo cambio de estado -transición desde el *estado fallado, al estado normal*. Los cambios de estado se hacen (asumen) instantáneamente; esto es, la transición ocurre en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño (infinitesimal), *por lo que no es posible tener dos estados diferentes al mismo tiempo*. *Cuando se repara un componente se supone que su condición es tan buena como si fuera nuevo*. *Luego, no siendo distinguibles los estados, el ciclo entero en la práctica consiste en repeticiones de estados “reparado a fallado” y “fallado a reparado”.*

El proceso desde nuevo/o recién reparado como nuevo - a fallado

Asumiendo un ciclo como el indicado en el punto anterior, para facilitar el análisis, aquí analizaremos primero un componente del ciclo *funciona (nuevo o “reparado a nuevo”) a fallado*. En principio “nos conviene” asociar los términos *“nuevo” o “reparación que logra un estado como si fuera nuevo”, con nacimiento*; y *muerte con falla*. Esto nos permite tomar como ejemplo de análisis -por conveniencia- la evolución de una dada población humana, aun cuando sabemos que, en caso de muerte, no es posible la “reparación a nuevo”. En este caso, estamos ante “sistemas no reparables”.

El ciclo de vida humano ha sido extensamente estudiado, y además, es intuitivo para todos la asimilación de los términos conceptuales asociados al mismo. No se puede predecir exactamente el ciclo de vida de una persona, dado que “su muerte” es una variable aleatoria cuyas características se pueden establecer a partir de una muestra de una población muy grande de personas. *Cada muerte* sólo puede ser caracterizada *por medio de propiedades estocásticas de la población como un todo*.

La confiabilidad R(t) (de reliability en inglés) para este caso, por definición, resulta la *probabilidad de supervivencia a la edad t* (inclusive) y es por definición el número de *sobrevivientes en t* dividido por el total de la muestra. Del mismo modo, la *no-confiabilidad F(t)* es la probabilidad de muerte a la edad *t* (t no está incluida) y se obtiene dividiendo el número total de muertes antes de la edad *t* por el total de la población. En la tabla siguiente se da un ejemplo de evolución de una población en función del tiempo, representando el número de personas vivas al tiempo *t como L(t).*

T	***L(t)***	***T***	***L(t)***	***t***	***L(t)***	***t***	***L(t)***
0	*1023102*	*10*	*971804*	*40*	*883342*	*70*	*454548*
1	*1000000*	*15*	*962270*	*45*	*852554*	*75*	*315982*
2	*994230*	*20*	*951483*	*50*	*810900*	*80*	*181765*
3	*990114*	*25*	*939197*	*55*	*754191*	*85*	*78221*
4	*986767*	*30*	*924609*	*60*	*677771*	*90*	*21577*
5	*983817*	*35*	*906554*	*65*	*577822*	*95*	*3011*

La curva *R(t)* versus *t* es (consiste en) *la distribución de supervivencia*, mientras que la curva *F(t)* versus *t* es la *distribución de mortalidad* (o fallas según la analogía adoptada). La distribución de supervivencia representa tanto la *probabilidad de supervivencia de un individuo a la edad t* como *la proporción de la población que se espera sobreviva a una edad determinada t*. La distribución de falla *F(t)* es la *probabilidad de muerte de un individuo antes de la edad t. También representa la proporción de la población que se espera que muera antes de la edad t.*

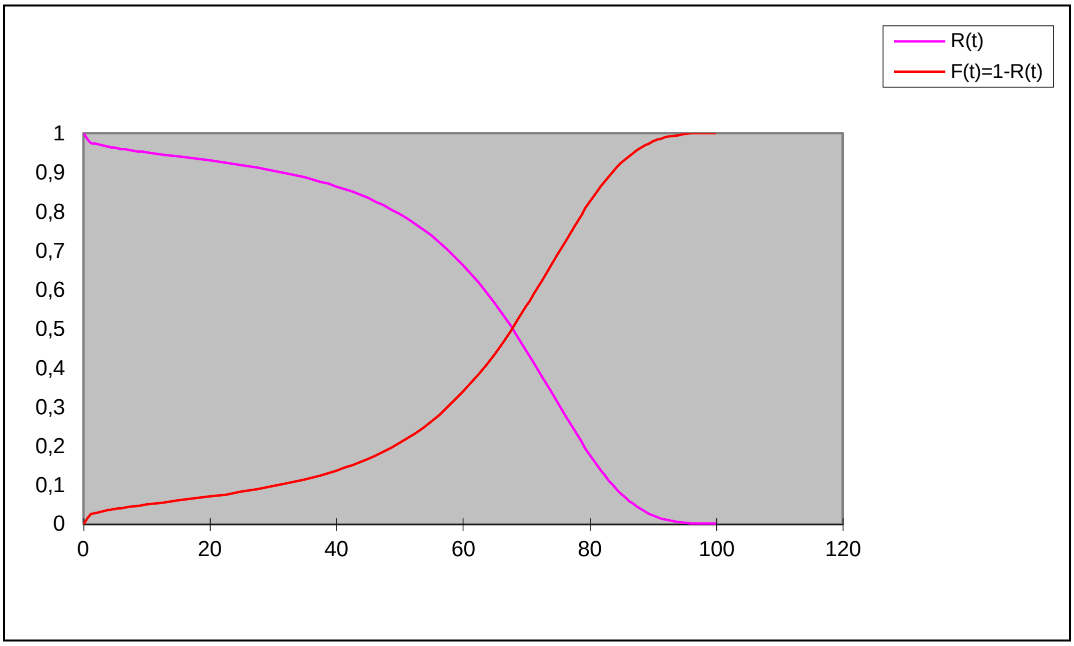
En las dos primeras columnas de la tabla siguiente se reproducen los datos de la tabla anterior. *R(t)* se obtiene simplemente dividiendo *L(t)* *por la población total al instante cero,* t_0, y *F(t)* se obtiene como la división de la cantidad de muertes *por la población inicial -al instante cero-*; o alternativamente como *1 – R(t)*.

T	***L(t)***	***R(t)***	***F(t) = 1 - R(t)***
0	*1023102*	*1.000*	*.0000*
1	*1000000*	*.9774*	*.0226*
2	*994230*	*.9718*	*.0282*
3	*990114*	*.9678*	*.0322*
4	*986767*	*.9645*	*.0355*
5	*983817*	*.9616*	*.0384*
10	*971804*	*.9499*	*.0501*

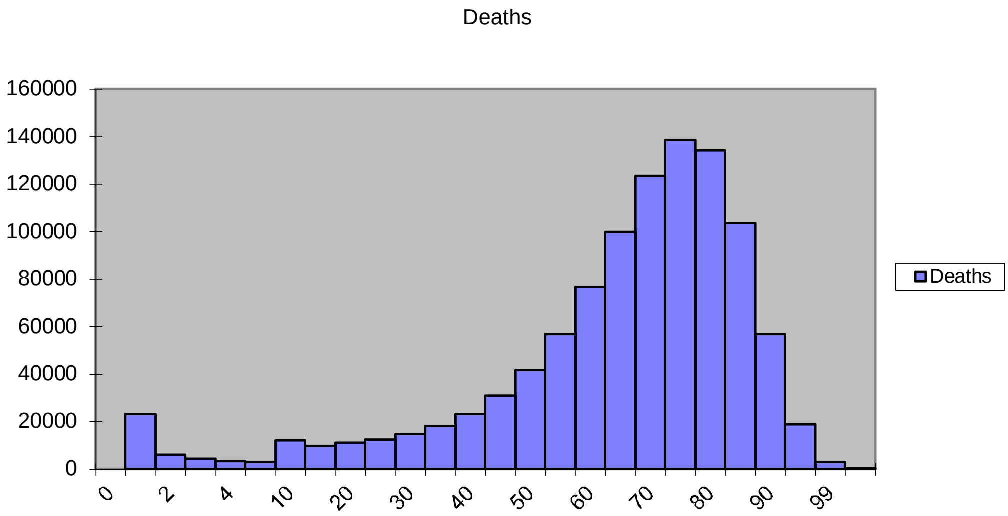
15	*962270*	*.9405*	*.0595*
20	*951483*	*.9300*	*.0700*
25	*939197*	*.9180*	*.0820*
30	*924609*	*.9037*	*.0963*
35	*906554*	*.8861*	*.1139*
40	*883342*	*.8634*	*.1366*
45	*852554*	*.8333*	*.1667*
50	*810900*	*.7926*	*.2074*
55	*754191*	*.7372*	*.2628*
60	*677771*	*.6625*	*.3375*
65	*577822*	*.5648*	*.4352*
70	*454548*	*.4443*	*.5557*
75	*315982*	*.3088*	*.6912*
80	*181765*	*.1777*	*.8223*
85	*78221*	*.0765*	*.9235*
90	*21577*	*.0211*	*.9789*
95	*3011*	*.0029*	*.9971*
99	*125*	*.0001*	*.9999*
100	*0*	*.0000*	*1.*

Los datos de la tabla se grafican en la figura siguiente, en donde obviamente puede verse que en todo momento $R(t) + F(t) = 1$; $R(t)$ tiende a cero a tiempo infinito y $F(t)$ tiende a uno. Este tipo de gráfico es típico cuando tratamos con variables *totales o integrales*, ya que consideramos a toda *la población viva o muerta al instante t, referida a la inicial, a tiempo cero.*

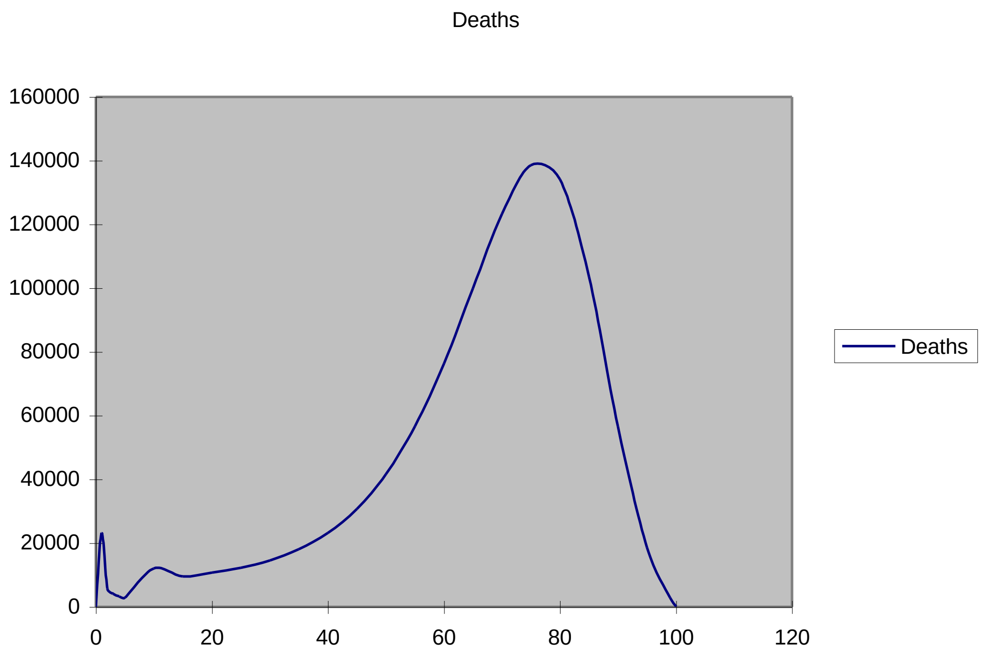
Si en cambio consideramos el análisis desde un punto de vista *"diferencial"* *a cada instante t*, la diferencia $F(t_2)-F(t_1)$, con $t_2>t_1$ es la *proporción de la población que se espera que fallezca entre las edades t_1 y t_2 (t_1 está incluido y t_2 no, esto es, $[t_1, t_2)$).*



Dado que el número de muertes es conocido para cada edad según la tabla anterior, se puede construir un histograma como el de la siguiente figura:



La altura de las barras en el histograma representa el número de muertes en una banda de edad determinada. Esto es, proporcional a la diferencia $F(t + \Delta t) - F(t)$ donde Δt es el ancho de la banda. Si Δt es suficientemente pequeño (o diferencial), el histograma tiende a una curva continua. Si esta expresión se normaliza (divide) por la población inicial, la curva resultante es *la densidad de falla f(t)*. La probabilidad de muerte durante una pequeña banda $[t,\ t + dt)$ está dada por $f(t)\, dt$ y es igual a $F(t + dt) - F(t)$ referida a la población inicial.



La probabilidad de muerte entre dos edades t_1 y t_2 es el área bajo la curva que se puede obtener integrando la curva entre dos edades diferentes:

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

O lo que es lo mismo, la *densidad de falla f(t)* está dada por:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

que puede ser aproximada numéricamente de la siguiente forma:

$$f(t) \approx \frac{[F(t+dt) - F(t)]}{\Delta t}$$

Si:

N = Número total de la muestra (1023102).

n(t) = Número de muertes antes de la edad t.

n(t + Δt) = Número de muertes antes de la edad t + Δt.

la cantidad *[n(t + Δt) - n(t)]/N* es la proporción de la población que se espera que muera durante el período *[t, t + Δt]* y es igual a *F(t + Δt) - F(t)*, esto es :

$$f(t) \approx \frac{[n(t+\Delta t) - n(t)]}{\Delta t\ N}$$

Es importante por otra parte, considerar como referencia no ya la población inicial, <u>*sino la población que sobrevive al tiempo t*</u>. Para este, caso, considerando ahora la población correspondiente a los *individuos que sobrevivieron a la edad t, la curva resultante se conoce como la velocidad de falla r(t); y representa la probabilidad de muerte por unidad de tiempo a* la edad *t*, referida a los individuos del conjunto de la población de referencia. Para *Δt* suficientemente pequeños, la cantidad $r(t)\Delta t$ se estima por el número de muertes durante $(t, t + \Delta t)$ dividido por el *número de individuos sobrevivientes a la edad t* :

$$r(t)\,\Delta t \approx \frac{\text{Número de muertes durante }(t, t+\Delta t)}{\text{Número de sobrevivientes a la edad } t} = \frac{[n(t+\Delta t)-n(t)]}{L(t)}$$

si se divide el numerador y el denominador del miembro derecho por el total de la muestra y por Δt ambos miembros:

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

ya que $R(t)$ es el número de sobrevivientes a la edad t dividido por la población sobreviviente.

Por otra parte, dado que la suma de $R(t)$ y $F(t)$ es 1, como ya vimos, también resulta:

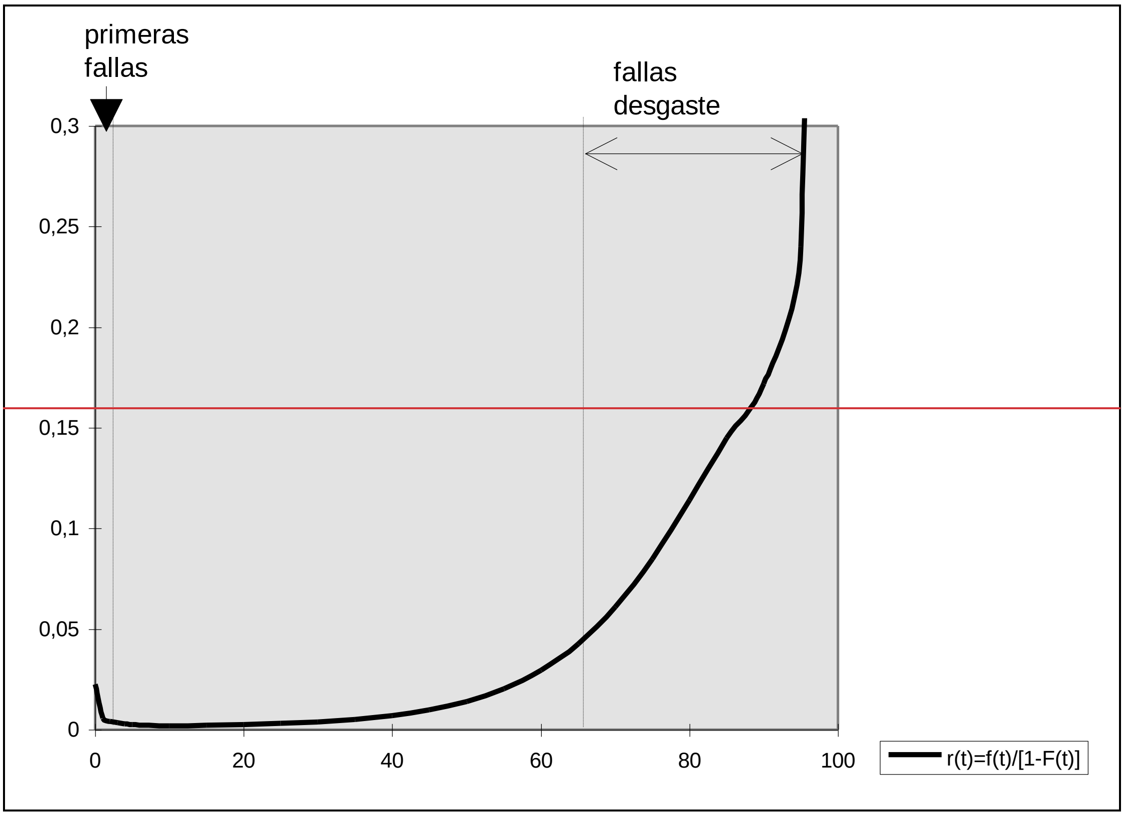
$$r(t) = \frac{f(t)}{[1-F(t)]}$$

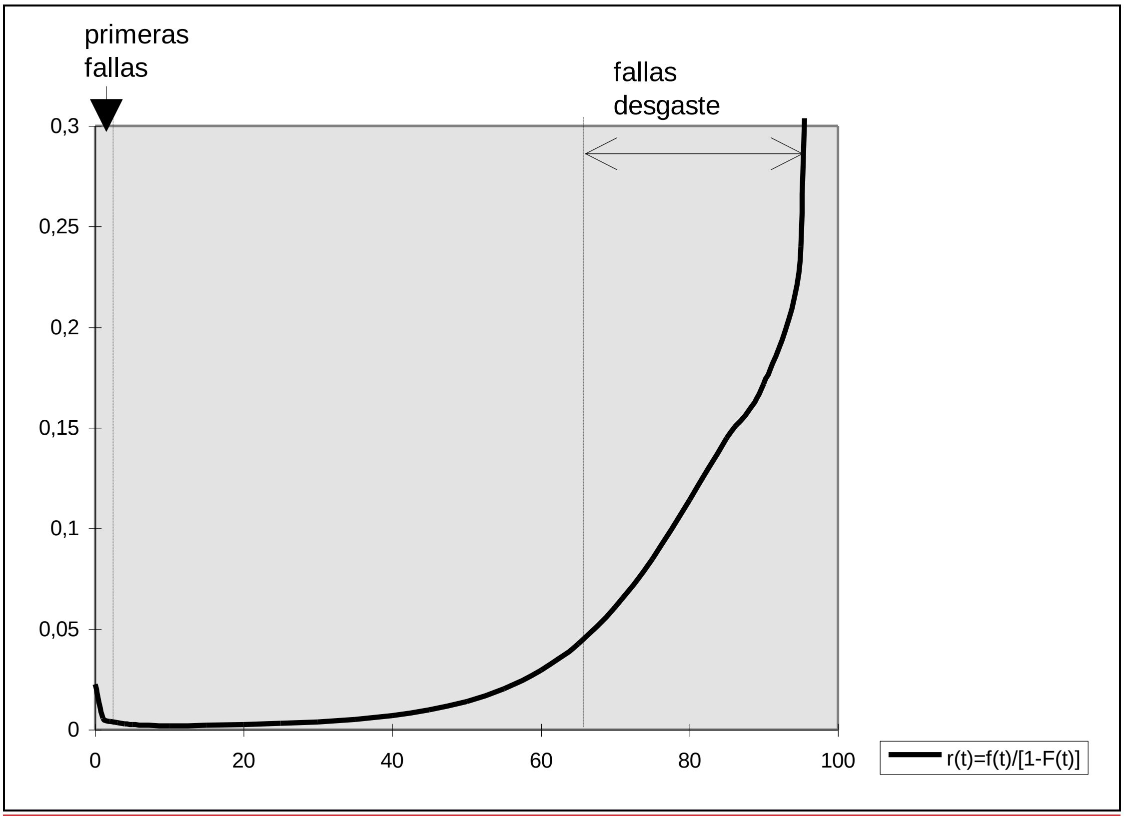
Si graficamos a partir de los valores de la tabla, la velocidad de falla $r(t)$, se obtiene la curva que se muestra en la figura siguiente, denominada en general como *curva de la bañera*. Se puede observar una alta velocidad de falla en el período de nacimiento, seguido por un período con velocidad de falla aproximadamente constante (donde ocurren fallas aleatorias) y finalmente el período de desgaste con una alta velocidad de falla (desgaste o evejecimiento).

Idealmente, para sistemas tecnológicos que siguen este mismo comportamiento, los componentes son puestos en servicio después del período de nacimiento y se retiran/reparan antes de la fase de desgaste.

Edad	*Nro. Fallas* $n(t+\Delta t)-n(t)$	$f_2(t) = [n(t+\Delta t)-n(t)]/n\Delta t$	$f_2(t) = dF(t)/dt$	$r(t) = f(t)/[1-F(t)]$
0	*23102*	*0.02260*	*0.00540*	*0.02260*
1	*5770*	*0.00564*	*0.00454*	*0.00570*
2	*4116*	*0.00402*	*0.00284*	*0.00414*
3	*3347*	*0.00327*	*0.00330*	*0.00338*
4	*2950*	*0.00288*	*0.00287*	*0.00299*
5	*12013*	*0.00235*	*0.00192*	*0.00244*
10	*9534*	*0.00186*	*0.00198*	*0.00196*
15	*10787*	*0.00211*	*0.00224*	*0.00224*
20	*12286*	*0.00240*	*0.00259*	*0.00258*
25	*14588*	*0.00285*	*0.00364*	*0.00311*
30	*18055*	*0.00353*	*0.00393*	*0.00391*
35	*23212*	*0.00454*	*0.00436*	*0.00512*
40	*30788*	*0.00602*	*0.00637*	*0.00697*
45	*41654*	*0.00814*	*0.00962*	*0.00977*

50	*56709*	*0.01110*	*0.01367*	*0.01400*
55	*76420*	*0.01500*	*0.01800*	*0.02030*
60	*99889*	*0.01950*	*0.00220*	*0.02950*
65	*123334*	*0.02410*	*0.02490*	*0.04270*
70	*138566*	*0.02710*	*0.02610*	*0.06100*
75	*134217*	*0.02620*	*0.02460*	*0.08500*
80	*103554*	*0.02020*	*0.01950*	*0.11400*
85	*56634*	*0.01110*	*0.00970*	*0.14480*
90	*18566*	*0.00363*	*0.00210*	*0.17200*
95	*2886*	*0.00071*	---	*0.24000*
99	*125*	*0.00012*	---	*1.2*
100	*0*	---	---	---





En la curva de la bañera el *primer período de la izquierda* es lo que comúnmente se llama *mortalidad infantil* y corresponde (en sistemas tecnológicos) a diseños defectuosos, materiales impropios o defectuosos, componentes fuera de tolerancia, daños en el envío, entre otras causas posibles. El modo de corregirlo en algunos diseños de ingeniería es ponerlo a prueba por un período corto de tiempo, asegurando la entrega de un producto fuera de tal período de probabilidad de fallas.

El período del medio tiene una frecuencia o velocidad de falla prácticamente constante, y es referido *como la vida útil* de tal aparato, equipo, componente. Las fallas que ocurren en este período de tiempo se denominan “fallas aleatorias” pudiéndose considerar a ***r(t)*** como constante. Durante este tiempo las fallas ocurren, en general, por accidentes o por malas condiciones de operación, o inconvenientes o de yerros provenientes del diseño.

La *parte de la derecha de la curva* es una región con velocidades o frecuencias de falla crecientes. En este período se dice que ocurren las *fallas por envejecimiento*. En los sistemas se acumulan efectos como corrosión, fatiga, desgaste, difusión/disgregación de los materiales, etc.

Habiendo establecido las principales relaciones en el ciclo de vida (nacimiento a muerte) de una persona; y haciendo uso y abuso de la relación “muerte equivale a falla” -aunque facilitando la captación de los conceptos probabilísticos y sus relaciones-; en lo siguiente nos enfocaremos en sistemas/componentes tecnológicos equivalentes.

En primer lugar, como hemos comentado, la mayoría de los componentes / sistemas tecnológicos, a diferencia del ser humano, son "reparables". Luego, si nos enfocamos en sistemas reparables, debemos "retocar" las definiciones o interpretaciones arriba realizadas.
Parámetros probabilísticos del proceso: Transición desde el estado "funciona a partir del tiempo cero en el cual se encontraba nuevo o reparado a nuevo" hacia el estado "fallado".

Consideremos el análisis anterior, centrándonos en componentes (que por ahora son reparables). Supongamos el proceso que comienza con un componente funcionando desde el estado inicial $t = 0$ -"nuevo"-; y termina luego de un período de funcionamiento, con su falla. *Dado que nos interesan los sistemas reparables, introducimos un pequeño agregado al ejemplo anterior acerca de poblaciones humanas*. Asimilamos en el tiempo inicial, la siguiente condición: *tomamos como el tiempo t = 0 el momento en el cual el componente comienza su ciclo de vida -en ese instante "es nuevo", O bien al tiempo t = 0 se encuentra* <u>*en estado reparado*</u> *(hubo una tarea que lleva un tiempo de reparación para llevar a cabo la misma)*; y además suponemos que la reparación <u>*lo restaura "como si fuera nuevo*</u>". Esto es, es indistinguible si el componte ha sido o no reparado *ya que al comenzar el ciclo en ambos modos, está "como nuevo" a t = 0.*

Luego, tenemos las siguientes definiciones (que son equivalentes a las arriba establecidas para una población humana):
R(t) = confiabilidad al tiempo t
Es la probabilidad que el componente no tenga fallas durante el intervalo (0,t] dado que el componente se encuentraba <u>*como nuevo*</u>*, al tiempo 0.*

La curva *R(t)* versus *t* es la distribución de supervivencia. La distribución es monótona decreciente, dado que la confiabilidad disminuye con el tiempo. La confiabilidad tiene las siguientes propiedades:

$$\lim_{t \to 0} R(t) = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} R(t) = 0$$

F(t) = no confiabilidad al tiempo t
La probabilidad que el componente tenga la primera falla durante [0,t) dado que fue reparado a tiempo cero y se encuentraba como nuevo.
Propiedades:

$$\lim_{t \to 0} F(t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$$

Dado que un componente está funcionando o está fallado al tiempo *t*: ***R(t) + F(t) = 1***.
f(t) = densidad de falla de F(t) = derivada de primer orden de F(t)

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Igualmente, hemos viso que *f(t) dt* es la probabilidad que la falla del componente/equipo ocurra durante un intervalo pequeño *[t,t+dt)*, dado que *el componente era nuevo o fue reparado a a nuevo a tiempo cero*. Esto es, el *TTF = tiempo esperado de falla (Time To Failure), es el tiempo transcurrido desde la puesta en funcionamiento como nuevo y/o la reparación "a nue-*

vo", hasta la falla. Este tiempo es aleatorio dado que no se puede predecir el tiempo exacto de la primera falla.

En cambio, el MTTF (tiempo medio entre fallas -Mean Time To Failure-, es el valor del tiempo medio en que se espera que un componente falle.

$$\boldsymbol{MTTF = \int_0^{\infty} t\ f(t)\,dt}$$

Nótese que la cantidad *f(t) dt* es la probabilidad que el TTF se encuentre alrededor de *t*, y MTTF es el valor promedio de todos los posibles TTF's.

Finalmente, la no confiabilidad se obtiene por la integración:

$$\boldsymbol{F(t) = \int_0^{t} f(u)\,du}$$

La diferencia entre valores de la no confiabilidad entre dos tiempos:

$$\boldsymbol{F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(u)\,du}$$

La confiabilidad:

$$\boldsymbol{R(t) = \int_t^{\infty} f(u)\,du}$$

Por otra parte, dado que se cumple que ***R(t) + F(t) = 1,*** *alternativamente se tiene:*

$$\boldsymbol{R(t) = 1 - F(t) \quad y \quad F(t) = 1 - R(t)}$$

r(t) = velocidad o tasa de falla

Es la probabilidad que un componente tenga una falla por unidad de tiempo al tiempo t, dado que el componente fue reparado a nuevo a tiempo cero *y sobrevivió al tiempo t*.

La cantidad *r(t) dt* es la probabilidad que el componente falle durante *[t,t+dt)* dado que el componente tiene la edad *t*, estaba normal/reparado a nuevo al tiempo cero y funcionó normalmente hasta el tiempo *t*.

Ejemplo: La siguiente tabla muestra los valores de falla para 250 transistores de germanio, todos los cuales fallaron durante el período de testeo. Se desea calcular la no confiabilidad *F(t)*, la velocidad de falla *r(t)*, la densidad de falla *f(t)* y el *MTTF*.

Tiempo de falla t (min.)	***Fallas acumulativas, n(t)***
0	*0*
20	*9*
40	*23*
60	*50*
90	*83*
160	*113*
230	*143*

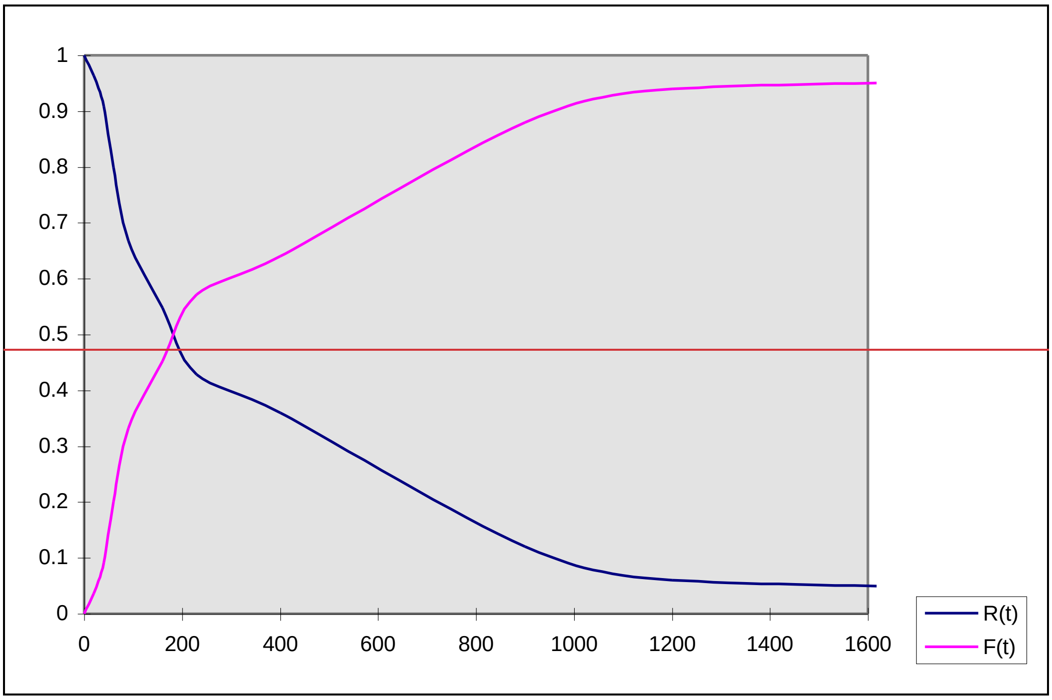
400	*160*
900	*220*
1200	*235*
2500	*240*
+2500	*250*

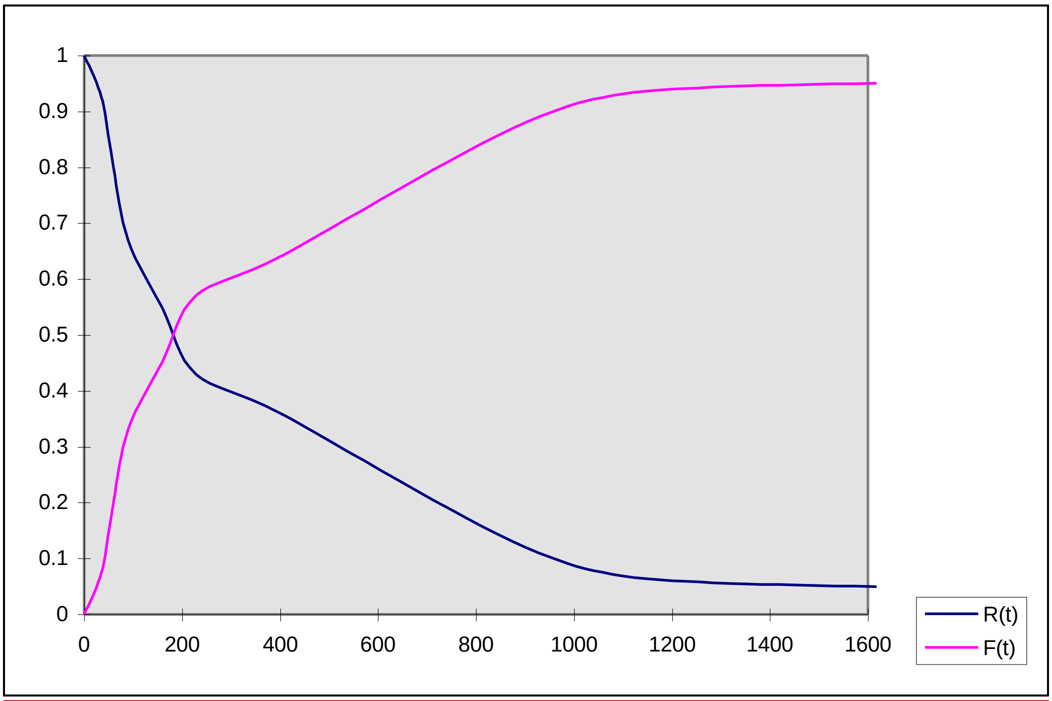
La no confiabilidad *F(t)* a un dado tiempo *t* es simplemente el número de transistores fallados dividido por el total de muestras ensayadas (250). Los resultados se encuentran en la siguiente tabla:

t	***L(t)***	***R(t)***	***F(t)***	***n(t+Δt)-n(t)***	***Δt***	***f(t)***	***r(t) = f(t)/R(t)***
0	*250*	*1*	*0.*	*9*	*20*	*.0018*	*.00180*
20	*241*	*.964*	*.036*	*14*	*20*	*.0028*	*.00290*
40	*227*	*.908*	*.092*	*27*	*20*	*.0054*	*.00595*
60	*200*	*.800*	*.200*	*33*	*30*	*.0044*	*.00550*
90	*167*	*.668*	*.332*	*30*	*70*	*.0017 1*	*.00256*
160	*137*	*.548*	*.452*	*30*	*70*	*.0017 1*	*.00312*
230	*107*	*.428*	*.572*	*17*	*170*	*.0004*	*.00093*
400	*90*	*.360*	*.640*	*60*	*500*	*.0004 8*	*.00133*
900	*30*	*.120*	*.880*	*15*	*300*	*.0002*	*.00167*
1200	*15*	*.060*	*.940*	*5*	*1300*	*.0000 2*	*.00033*
2500	*10*	*.040*	*.960*	----	-----	-----	-----

Los demás parámetros indicados en las columnas pueden reproducirse según el mismo procedimiento ya mencionado en las secciones anteriores.

La siguiente Figura muestra la evolución de la Confiabilidad y la no confiabilidad.





Parámetros probabilísticos del ciclo o proceso: Transición entre el estado "fallado a tiempo cero" al estado "reparado y funciona como nuevo".

Este proceso es exactamente el inverso al anterior. Mejor dicho, es equivalente al anterior, pero invirtiendo los roles, ya que estamos analizando una población de componentes, al instante inicial "todos fallados", y a medida que transcurre el tiempo una porción de dicha población va siendo reparada. Por lo tanto, comienzan nuevamente el hemiciclo, ya que han quedado como "nuevos", y su "sobrevida" será entonces dependiente de las relaciones establecidas en el punto anterior.

Consideremos entonces un proceso de transición entre el estado de *falla, sucede su reparación y pasa al estado funciona como nuevo*. Como hemos ya expresado, los parámetros probabilísticos están condicionados al hecho que el componente esté fallado al tiempo cero. Es decir, tenemos una población de componentes en estado fallado, y mediante la tarea cumplida / organizada por el sistema / grupo de mantenimiento, se repara (lleva un tiempo aleatorio) y luego comienza su funcionamiento como si fuera nuevo. Este proceso como mencionamos, es semejante al anteriormente analizado, Más aún, son complementarios, ya que forman ambos parte del ciclo de vida de cada componente analizado. Obviamente, ambos son procesos probabilísticos. Por las hipótesis adoptadas, ambos con las mismas características.

Sea la definición de la función de distribución de la probabilidad de reparación: *G(t) = probabilidad de reparación al tiempo t*

Es la probabilidad que la reparación se haya hecho justo antes del tiempo t, dado que el componente está fallado al tiempo cero.

La curva *G(t)* versus *t* es la distribución de la probabilidad del estado “reparado”, y es semejante al rol de la distribución de falla *F(t). Un componente no reparable tiene relacionada una función G(t) igual a cero*. La distribución de reparación *G(t)* es una función monótona creciente para el componente reparable, y por lo tanto tiene las siguientes propiedades asintóticas:

$$\lim_{t\to 0} G(t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = 1$$

g(t) = densidad de reparación de G(t)

Es la derivada de primer orden de G(t) que se puede escribir como:

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} \quad ó \quad g(t)dt = G(t+dt) - G(t)$$

g(t) dt representa la probabilidad que la reparación del componente se haya completado durante *[t,t+dt)* dado que el componente estaba fallado al tiempo cero. La densidad de reparación *g(t)* está relacionada con la distribución de reparación *G(t)* (ya que es derivada), de la siguiente manera:

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,du$$

$$G(t_1) - G(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g(u)\,du$$

$G(t_2) - G(t_1)$ es la probabilidad que la reparación se complete durante $[t_1,t_2)$ dado que los componentes están fallados al tiempo cero.

Finalmente, por semejanza, g(t) cumple el mismo rol que f(t) en la transición complementaria (densidad de falla)

Por otra parte, m(t) es velocidad o tasa de reparación. Es la probabilidad que el componente esté reparado por unidad de tiempo al tiempo t dado que el componente falló al tiempo cero y continúa fallado al tiempo t. La cantidad *m(t) dt* es la probabilidad que el componente sea reparado durante *[t,t+dt)* dado que la "edad" del componente fallado en espera de ser reparado es *t*. Significa que el componente falló al tiempo cero y continua fallado al tiempo *t*.

Un componente con una velocidad de reparación constante tiene la misma posibilidad de ser reparado independientemente de cuando falle. *Un componente no reparable tiene una velocidad de reparación cero.*

Nótese que el rol de m(t) es semejante al de r(t) en el ciclo complementario.

TTR = tiempo de reparación (Time To Repair)

Es el tiempo transcurrido desde la falla hasta su reparación. Esta es una variable aleatoria porque el tiempo empleado en el proceso de reparación se distribuye aleatoriamente.

MTTR = tiempo de reparación media

Es la media de los valores TTR en el intervalo de tiempo de análisis.

Esta medida está dada por la siguiente ecuación:

$$MTTR = \int_0^t t\, g(t)\, dt$$

Para estimar el valor medio dada una función de distribución, en general suele tomarse la integral entre cero e infinito como un valor característico de tal parámetro.

Ejemplo: Los siguientes tiempos de reparación para reparar motores eléctricos han sido registrados.

Reparación nro.	Tiempo (hrs.)	Reparación nro.	Tiempo (hrs.)
1	*3.3*	*10*	*0.8*
2	*1.4*	*11*	*0.7*
3	*0.8*	*12*	*0.6*
4	*0.9*	*13*	*1.8*
5	*0.8*	*14*	*1.3*
6	*1.6*	*15*	*0.8*
7	*0.7*	*16*	*4.2*
8	*1.2*	*17*	*1.1*
9	*1.1*	---	---

Verificar como ejercitación, los valores de *G(t), g(t), m(t) indicados en la siguiente tabla. Estimar el valor MTTR*

t(TTR)	Nro de reparaciones completas	*G(t) = M(t)/N*	*g(t) = [G(t+Δt)-G(t)]/Δt*	*m(t) = g(t)/[1-G(t)]*
0.0	*0*	*0*	*0*	*0*
0.5	*0*	*0*	*.9412*	*.9412*
1.0	*8*	*.4706*	*.5882*	*1.110*
1.5	*13*	*.7647*	*.2354*	*1*

2.0	*15*	*.8824*	*0*	*0*
2.5	*15*	*.8824*	*0*	*0*
3.0	*15*	*.8824*	*.1176*	*1*
3.5	*16*	*.9412*	*0*	*0*
4.0	*16*	*.9412*	*.1176*	*2*
4.5	*17*	*1*	---	---

En los apartados anteriores se han mencionado en detalle, tanto las características de los procesos de falla como los de reparación, teniendo en cuenta que conforman en conjunto el ciclo *falla-reparación-falla*. Las relaciones establecidas son generales.

Sin embargo, en los problemas reales existen sistemas que responden, o se pueden representar, asumiendo que la velocidad de fallas es constante (recordar curva de la bañera), mientras que otros no, dado que la desviación a esta suposición (tasa de fallas constante) es importante a medida que trascurre el tiempo. En estos casos, en general resulta creciente con el tiempo (la parte derecha, que hemos también llamado “zona de envejecimiento”) en la curva de la bañera.

A los efectos de representar adecuadamente estos fenómenos y por consiguiente poder modelar los ciclos mencionados, que por otra parte son la base para gerenciar los procesos de mantenimiento, o estimar la vida útil de los componentes, entre otras cuestiones; se han propuesto diversas funciones para representar la distribución de la velocidad de fallas -o tasa de fallas- de un sistema/componente. A continuación, consideraremos la más sencilla, y en general la más utilizada.

Distribución Exponencial. Ley exponencial de fallas: Tasa de fallas constante

Esta distribución es muy utilizada para el modelado de diversos problemas cuyo comportamiento es aleatorio, y además, es sencilla de tratar matemáticamente. Es apropiada cuando se modela el intervalo funcional del ciclo de vida de una gran cantidad de dispositivos (descartada la “mortalidad infantil”, y sin efectos significativos “de envejecimiento” -recodar la curva de la bañera, zona o porción de comportamiento constante-). *Esto sucede como se ha mencionado, por ejemplo, en numerosos sistemas electrónicos, en los cuales las fallas predominantes se deben a causas aleatorias.*

La expresión de la densidad de fallas de la distribución exponencial, es la siguiente (con el parámetro λ constante):

$$f(t) = \lambda \ e^{-\lambda t}$$

Supongamos que también representa adecuadamente, dicha función, la densidad de fallas de un sistema dado. Como hemos mencionado, la función *F(t)* -no confiabilidad- de tal sistema, es por definición, la integral de tal función, resultando:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

La función de confiabilidad/fiabilidad correspondiente es entonces (utilizando las ecuaciones obtenidas anteriormente):

$\boldsymbol{R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}}$

<u>*Luego, para tal sistema, y según la relación demostrada entre la tasa de fallas y las funciones arriba mencionadas, se tiene*</u>*:*

$$\boldsymbol{r(t)} = \frac{\boldsymbol{f(t)}}{[\boldsymbol{1} - \boldsymbol{F(t)}]}$$

$$\boldsymbol{r(t) = (\lambda\ e^{-\lambda t}) / e^{-\lambda t} = \lambda}$$

<u>*Es decir, si la función de distribución densidad de fallas de cualquier sistema responde a la distribución exponencial, entonces*</u> <u>*la velocidad o tasa de fallas de tal sistema es constante*</u>*. La inversa también es válida.*

Esto era de esperarse, ya que una característica común a todos los sistemas que responden a la distribución exponencial (las llamadas telefónicas de larga distancia comerciales, el intervalo de tiempo entre la llegada de clientes a una terminal, el tiempo que esperan los clientes en fila hasta recibir servicio...) se caracterizan por el hecho que el *evento aleatorio en el próximo instante no depende (es independiente) del tiempo transcurrido. En el caso de la confiabilidad de los componentes, esto implica que la unidad no presenta signos de envejecimiento. O lo que es lo mismo, da igual en términos probabilísticos que algo suceda (falle por ejemplo) en el instante siguiente (desde su estado "nuevo") que lo haga en cualquier otro instante. En estos casos, la tasa de falla es constante.*

Función de riesgo acumulativa (integral entre 0 y t) H(t):

$H(t)= \int r(t)\, dt = \int \lambda\ dt = \lambda\, t$

Tiempo Medio entre fallas (MTBF)

Como vimos, se define como la integral entre cero e infinito de los tiempos a falla en cada instante:

$MTBF = \int t\, f(t)\, dt$

Alternativamente se puede emplear la relación, para determinar el MTBF, en función de la función confiabilidad, siendo la integral entre cero e infinito:

$MTBF = \int R(t)\, dt$

Resolviendo cualquiera de las dos expresiones anteriores, se tiene*:*

$MTBF = 1 / \lambda$

De la misma forma en que analizamos el proceso de transición funciona normalmente - falla, podemos también analizar el proceso de transición fallado -reparado a nuevo. En este caso, el equipo/componente ha fallado y mediante el proceso de reparación (y sus parámetros representativos de las funciones respectivas) se pueden estimar en forma semejante. Esto implica que se pueden estimar de forma semejante, si se cumple con la distribución exponencial, la función densidad de reparación, la tasa o velocidad de reparación, el tiempo medio de reparación, o el tiempo medio entre acciones de reparación (acciones de mantenimiento), entre otros. Si se asume una función representativa del proceso, por ejemplo, la exponencial, siguiendo el mismo razonamiento anterior, la tasa o velocidad de reparación es constante:

$m(t) = \mu$ *(tasa de reparación)*

De la misma manera se obtienen las demás expresiones (en función de la semejanza de roles de cada función representativa). En particular, aplicando la definición del tiempo promedio de reparación, se tiene (como era de esperar, por semejanza con el hemiciclo complementario)*:*

$MTBR = 1 / \mu$

Se deja para el lector obtener las demás relaciones, que por semejanza son equivalentes a las indicadas anteriormente para el hemiciclo complementario.

Generalmente, ciertos equipos/componentes no responden a una velocidad de fallas constante, sino que aumenta a la vez que envejecen. Es decir, la tasa de fallas es creciente. Aunque también es posible encontrar unidades/equipos/sistemas con tasas de fallas decrecientes. Una distribución más general y muy utilizada para estos casos es la distribución Weibull, para la cual la velocidad o tasa de fallas responde a la siguiente expresión:

$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}$, donde $\alpha > 0$

Notar que según los valores de β, la velocidad de fallas λ puede ser constante ($\beta = 1$) *o bien creciente o decreciente.*

DISPONIBILIDAD DE SISTEMAS

Por definición, la disponibilidad de un sistema es, independientemente de su historia de fallas, la probabilidad que un equipo esté disponible para realizar una tarea cuando se lo requiere. O bien, la fracción de tiempo en estado disponible sobre el tiempo total analizado.

Pueden distinguirse distintos tipos de disponibilidad: Disponibilidad en estado estacionario, disponibilidad instantánea, disponibilidad media en un intervalo de tiempo dado.

Teniendo en cuenta los procesos / transiciones entre estados analizados en los apartados anteriores, podemos establecer ciertas diferencias entre la disponibilidad y la confiabilidad:

A(t) = disponibilidad al tiempo t

Es la probabilidad que el componente este funcionando normalmente al tiempo t, dado que estaba como nuevo al tiempo cero.

Notar que aquí tenemos en cuenta la reparación, por lo que importa la disponibilidad en función del tiempo, desde el punto de vista operativo. *La confiabilidad es distinta de la disponibilidad porque* la primera *requiere la continuación* del estado normal en el intervalo completo *(0,t]*. Un componente contribuye a la disponibilidad *A(t)* pero no a la confiabilidad *R(t)* si el componente falla antes del tiempo *t*, luego es reparado, y está normal al tiempo *t*. Esto significa que la disponibilidad *A(t)* *es siempre más grande, o igual* que la confiabilidad *R(t):*

$A(t) \geq R(t)$.

Para componentes no-reparables se mantiene la igualdad porque el componente estará normal al tiempo *t* si y solo si ha estado normal hasta el tiempo *t*. La disponibilidad de un componente no-reparable llega a cero cuando el tiempo transcurrido se incrementa, mientras que la disponibilidad de un componente reparable converge a un número positivo distinto de cero.

Q(t) = indisponibilidad al tiempo t

Es la probabilidad que un componente esté en el estado fallado (indisponible, en reparación) al tiempo t, dado que estaba en el estado normal al tiempo cero.

Dado que el componente está en el estado normal o en el estado fallado/indisponible al tiempo t, la indisponibilidad se obtiene de la disponibilidad y viceversa:

$A(t) + Q(t) = 1.$

similarmente:

$$Q(t) \leq F(t)$$

$Q(t)=F(t)$ *para componentes no reparables*

Desde el punto de vista del cálculo de la disponibilidad, es importante analizar los valores medios del tiempo entre fallas (igual al tiempo medio entre reparaciones) para el ciclo completo.

MTBF = (Mean Time Between Failure) tiempo medio entre fallas

MTBR = (Mean Time Between Repairs) tiempo medio entre reparaciones.

Tiempo esperado entre dos reparaciones consecutivas.

El tiempo esperado entre dos fallas consecutivas resulta de sumar los tiempos correspondientes a falla y a reparación.

$$MTBF = MTTF + MTTR$$

$$MTBR = MTBF = MTTF + MTTR$$

Dentro de este contexto, es importante obtener una expresión para la disponibilidad *A(t). Una definición general para la Disponibilidad es la siguiente:*

A(t)= Up time (tiempo funcionando) / Total Time (tiempo u horizonte disponible para producir)

En función de las relaciones obtenidas, esta relación puede escribirse de la siguiente manera:

$A(t)= MTBF / (MTBF + MTBR)$

Asumiendo ambas distribuciones siguiendo la ley Exponencial, estos valores pueden calcularse fácilmente.

$A(t)= MTBF / (MTBF + MTBR)$

Donde

$$\text{MTBR} = 1 / \mu$$

$$\text{MTBF} = 1 / \lambda$$

$$A(t) = (1/\lambda) / (1/\lambda + 1/\mu)$$

Hasta aquí hemos definido conceptualmente y obtenido las principales relaciones entre los parámetros relevantes que se utilizan pera llevar a cabo los análisis RAM. Estos son aplicados a equipos, procesos, sistemas en general. Un aspecto a remarcar es que se ha mencionado indistintamente un equipo/componente/sistema; es decir, sin analizar si el objeto de análisis es un conjunto de unidades conformadas según un arreglo o diseño con el objetivo de cumplir ciertas consignas, o bien un solo componente formando parte de un sistema específico (motor como parte de un sistema de bombeo por ejemplo, o el interruptor del tablero de encendido de dicha bomba).

Se necesita, entonces, definir las reglas que relacionen los parámetros disponibilidad, confiabilidad, mantenibilidad, etc… del sistema en su conjunto, en función de dichas magnitudes individuales; es decir, de las partes que lo componen. En otras palabras, como incide cada componente o unidad constitutiva que conforma el sistema (proceso) a evaluar.

Del mismo modo que hemos definido la disponibilidad como una medida de la proporción del tiempo (fijado un horizonte de tiempo) en la cual podemos esperar *que cada elemento constitutivo* de un "sistema o proceso o complejo" funcione normalmente (según condición de diseño), ahora nos hacemos la misma pregunta, respecto al "sistema o proceso o complejo" global, asumiendo que conocemos los *valores relevantes correspondientes a cada una de las partes (o de los componentes) del mismo*.

Recordemos que el término Maintainability o Mantenibilidad, nos indica la "facilidad" o capacidad de llevar a cabo el mantenimiento. Esto es, la relativa facilidad/posibilidad de la acción de reparar el equipo para ponerlo en funciones luego de producirse una falla. Resulta claro que, si el tiempo medio de reparación es relativamente bajo, la mantenibilidad es relativamente alta. En otras palabras, minimizar el MTTR implica maximizar la mantenibilidad. Igualmente, esto implica mejorar la disponibilidad. Más aún, si para cada equipo/componente del proceso se logra mejorar los parámetros fundamentales, globalmente se mejora la disponibilidad del proceso. Obviamente, y como se verá a continuación, esto implica invertir en duplicación de componentes en proceso o en depósito, o de equipos, o mayores frecuencias de inspección, a los efectos de lograr optimizar el sistema de mantenimiento y/o la seguridad del proceso.

Análisis de Disponibilidad de Sistemas o Procesos

Obviamente, todo sistema está compuesto por un conjunto de unidades que interactúan entre sí. En toda la serie de apuntes hasta aquí, hemos enfatizando numerosas veces , que la estructura de un proceso es también una variable que amerita una representación y su modelado. Por ejemplo, tanto en la síntesis como en la simulación u optimización del proceso. En efecto, la estructura es un objetivo de diseño, por ejemplo, en la etapa de síntesis del proceso. Y es un dato, cuando utilizamos un simulador de procesos.

Enfrentamos los problemas en cualquier caso implementando, en primer lugar, un modelo basado en los primeros principios (o mediante grafos, u otro instrumento) y luego procedemos a su resolución mediante un algoritmo computacional. Hemos resaltado que la representación por medio de distintos planos de un proceso, implica también realizar "modelos" de dicho proceso (por ejemplo el flowsheet y los posteriores planos más detallados).

Aquí, de alguna manera se necesita recurrir al mismo procedimiento, dado que el objetivo es representar la interacción funcional entre los componentes y los equipos, o entre éstos y el proceso que los contiene. Es necesario entonces, encontrar la relación entre la estructura que vincula las partes componentes de un sistema, con las relaciones funcionales que pretendemos modelar.

En otras palabras, para estimar la confiabilidad, o la disponibilidad de procesos, necesitamos definir una función estructural del sistema, en el sentido que refleje lógicamente, la relación que existe entre los valores correspondientes al proceso en función de los de cada unidad constitutiva, considerando (en correspondencia con) la contribución/tributación de cada una de las partes.

Aunque resulte obvio, es interesante aquí remarcar que estamos orientados a la función que representa la relación entre la disponibilidad (por ejemplo) de todo un proceso, en función de las disponibilidades de cada uno de los equipos que lo componen. Esto no implica precisamente resolver balances de masa, o energía, ni tampoco la problemática se asemeja a los procedimientos utilizados en simulación para encontrar corrientes de corte a los efectos de resolver eficientemente el sistema de ecuaciones mediante un procedimiento iterativo. La disponibilidad o la Confiabilidad, entre otras, no se relacionan con las leyes fisicoquímicas que rigen los balances de materia, energía o cantidad de movimiento.

Como se verá más adelante, aquí se partirá de una representación adecuada del sistema (el flowsheet del proceso, o las relaciones estructurales entre las partes y un equipo) para elaborar *diagramas de bloques que representen las relaciones lógicas entre los valores de confiabilidad (o disponibilidad, u otra función) de cada unidad integrante y la confiabilidad global del sistema (por ejemplo, del proceso en función de los equipos que lo componen).* La misma relación puede establecerse, como se ha mencionado, entre cada componente y un equipo (por ejemplo todas las partes que componen una bomba centrífuga) o bien un sistema de bombeo (incluye el sistema eléctrico que la alimenta, o bien el sistema de cañerías, válvulas, si analizamos también el bombeo desde un punto hacia otro).

Dentro de este contexto, en primer lugar, estableceremos sucintamente las relaciones básicas que permiten calcular las funciones de cada componente. A partir de dichas relaciones, se estudiarán las que pueden establecerse para calcular la confiabilidad, o disponibilidad, u otra función del sistema global en función de las correspondientes a sus componentes, dada una estructura que las vincule.

Existe un principio general que asevera “un diseño más simple, es el más confiable”. Uno de los problemas, como hemos visto, es que la necesidad de minimizar consumos, proteger el ambiente, o bien optimizar los costos, implica incrementar la complejidad de los procesos. Por otra parte, es necesario asegurar la controlabilidad y la seguridad. Complicando aún màs las relaciones de las partes con el todo.

Una forma sencilla de representar las relaciones lógicas entre los componentes de un sistema, en función de su confiabilidad, o su disponibilidad, es considerar sus arreglos estructurales básicos. En particular, arreglos en serie y en paralelo.

Llamamos sistema, como hemos mencionado, a una configuración de componentes o subsistemas. Estos pueden afectar la confiabilidad o disponibilidad del complejo global según la cantidad de elementos y su relación estructural. Las configuraciones más comunes son:

Arreglo en Serie.

Arreglo en paralelo.

Arreglo Mixto o Configuración serie-paralelo.

Configuración en Serie

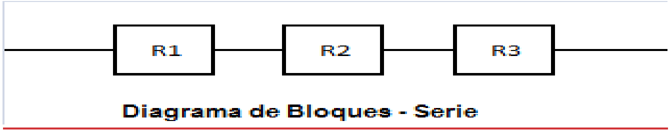
En este sistema, la lógica subyacente de funcionalidad del sistema, en función de la funcionalidad de los componentes; se basa en que bajo este arreglo funcional el sistema funciona lógicamente como una “cadena” en la *cual todo el sistema es capaz de cumplir su función si y solo si cada uno de los componentes de la cadena funciona*; y por el contrario, el sistema *no funciona si al menos uno de los componentes de la cadena estructural, no funciona*. En otras palabras, es evidente el efecto de una falla en cualquier eslabón (componente, equipo) en la funcionalidad del sistema completo. La falla de un componente influye directamente entre la salida y la entrada, es decir, en el funcionamiento global.

Como ejemplo, podemos citar *una serie de lámparas conectadas en serie, o bien dos o más equipos secuenciales funcionando en un proceso: Bomba, dos o más válvulas en la misma cañería, alimentación al reactor.* Resulta claro que, en cualquier caso, la función de diseño no se cumple si falla alguno de los elementos que compone la cadena o serie de equipos debido a este tipo de arreglo “lógico”. En el caso de una interrupción en el circuito, no pasa corriente y el sistema no funciona; mientras que en el sistema de bombeo si la bomba o una válvula falla en posición cerrada, no hay flujo en la cañería.

NOTA: Obviamente, aunque denotemos o mencionemos *una cadena y/o un arreglo lógico*, no implica que obligatoriamente en el proceso y/o en el diseño de ingeniería (los planos y en el layout o en la planta) *se dispongan espacialmente de tal manera*. *Recordar el arte del modelado y la representación eficaz de los fenómenos que necesitamos abordar o evaluar, y las diferencias con el proceso en sí mismo, que es el objeto representado*.

Volviendo al sistema bajo análisis, si falla una cualquiera de las lámparas, no se cumple con la función de diseño. Todo el sistema falla, aunque solo una de las unidades en concreto haya fallado. Si bien el evento “falla de la lámpara X es el causante”; la falla de la función de diseño del sistema no solo es consecuencia de la falla de la lámpara X, sino del diseño del sistema global (desde el punto de vista de la confiabilidad -las lámparas no son reparables, por lo que debe sustituirse -). En otras palabras, la decisión de un arreglo en es una decisión del diseñador, teniendo ventajas y desventajas a ser consideradas desde distintos puntos de vista.

En la figura, se muestra un esquema genérico de un sistema en serie de solo tres componentes. Aunque las deducciones a realizar se extienden a un sistema de N componentes.



La No confiabilidad del sistema en serie (***Fs***) resulta entonces:

$$Rs = \prod R_i$$

La productoria (en el caso de la figura i de 1 a 3), es válida para cualquier número de componentes (i de 1…. a N) siendo N el número de componentes en serie. Es decir, la probabilidad de funcionamiento del sistema, en función de la confiabilidad de los componentes, es la productoria cubriendo todo componente *i (de uno a N)*. Esto es así, ya que la probabilidad del suceso simultáneo (funciona) de todos los componentes, asegura el funcionamiento del sistema -y es igual a la productoria de los mismos-.

Por otro lado, es necesario recordar *que la No-confiabilidad del sistema es:*

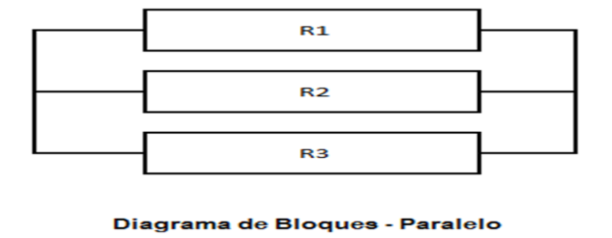
$$Fs = 1 - Rs$$

Algunas conclusiones: ya desde hace mucho tiempo se conoce que "La cadena no puede ser más fuerte que el más débil de sus eslabones". En otras palabras, la productoria de valores menores a la unidad, implica una degradación que impone un resultado con tales características. Para la confiabilidad ***Rs*** es fácil ver que el resultado nunca será mayor a la menor de las confiabilidades, entre los componentes de la cadena.

Esto lleva a preguntarse, si se quiere mejorar la confiabilidad del sistema -por ejemplo mejorando alguno de los componentes-, cuál sería el prioritario en tal sentido. Queda claro por lo expuesto, que el candidato para mejorar la confiabilidad global es el componente más débil, extendiéndose tal mejora al sistema global en tal magnitud.

Configuración Paralelo

En este caso el arreglo se diferencia del anterior debido a que las unidades o componentes se configuran lógicamente en paralelo.



Esto significa, según la figura, una situación bien distinta al caso anterior. En efecto, las características más importantes de la configuración paralelo (según el ejemplo utilizado anteriormente para las lámparas) pueden vislumbrase fácilmente. En este caso, la falla de cualquiera de las unidades no implica que falle el sistema global. Es necesario la falla “simultanea” de todas las lámparas para que el sistema completo falle.

La confiabilidad del sistema en paralelo de la figura está dada por:

$$R_s = 1 - \prod (1 - R_i)$$

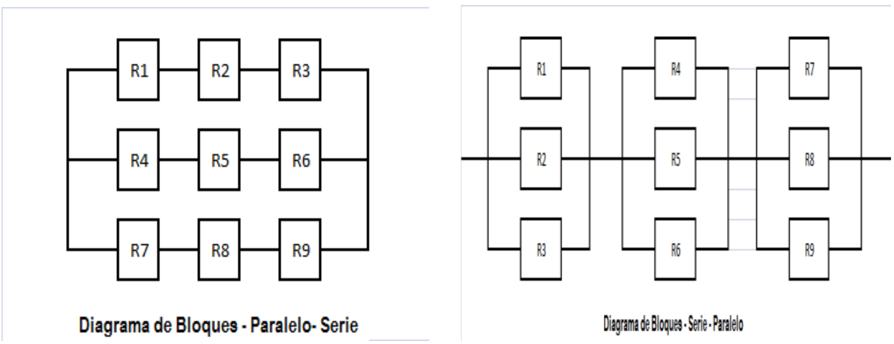
(con i de 1 a 3)

Para comprenderlo, nótese que aquí nos es más sencillo razonar por la inversa. Es decir, el sistema falla si fallan todos los componentes simultáneamente. La probabilidad de estos hechos simultáneos resulta ser la productoria de tales no-confiabilidades. Si la confiabilidad es Ri, la no confiabilidad, es (1-Ri), por lo que se sigue la expresión indicada. Nuevamente, el índice ***i*** expande desde 1 hasta N, siendo éste el número de componentes en el arreglo en paralelo.

A diferencia del caso anterior, en este tipo de arreglos, resulta que la confiabilidad del sistema global es mayor que la del componente de mayor confiabilidad. Luego, es natural para mejorar el sistema global en cuanto a su confiabilidad; proceder a mejorar la confiabilidad del componente de mayor confiabilidad. Además, a mayor número de componentes, mayor confiabilidad, a diferencia de los sistemas en serie.

Sistema Serie-Paralelo.

Existen numerosas configuraciones posibles combinando estas dos estructuras para conformar un arreglo global. La metodología mas eficiente para calcular la confiabilidad de estos sistemas es en primer lugar, identificar todos los arreglos paralelos de la estructura. Resolver secuencialmente cada uno de ellos hasta lograr una cadena en serie. Al finalizar esa etapa, proceder a calcular la confiabilidad del sistema global.



Para solucionar estos problemas, en general es posible proceder paso a paso resolviendo los sistemas en paralelo y/o serie, hasta lograr un arreglo simple ya sea paralelo o serie final.

Disponibilidad de Sistemas

El mismo razonamiento utilizado en el apartado anterior, puede utilizarse para distintas funciones tales como la disponibilidad, mantenibilidad, etc. Esto es, dada una función estructural del sistema (es decir los arreglos mencionados), es posible por ejemplo; obtener una relación entre la disponibilidad de las partes y la del arreglo o sistema, ya sean arreglos en serie, paralelo, o mixtos (híbridos). En este caso, dado que la disponibilidad, y la no disponibilidad (Q) cumplen las mismas relaciones que la confiabilidad R, y la no confiabilidad F. basta con reemplazar en las expresiones anteriores *Ri* por *Ai*, a los efectos de analizar sistemas compuestos en función de los parámetros correspondientes a cada unidad del complejo.

En este caso consideramos sistemas reparables. La disponibilidad *Ai* o no disponibilidad *Qi* de cada componente *i se calcula según las expresiones* deducidas más arriba e indicadas en el apartado correspondiente.

Nótese que, según la función disponibilidad utilizada (inherente o expresiones más complejas), resulta necesario considerar las distintas modalidades de mantenimiento aplicadas a la planta industrial.

Es importante mencionar que una de las salvaguardas más importantes durante el diseño, para incrementar la seguridad de procesos (aumentar la confiabilidad o la disponibilidad) ante la falla de equipos/componentes, es la utilización de arreglos conformados por equipos iguales (en sistema de bombeo dos bombas en vez de una por ejemplo, ambas idénticas) o bien dos bombas pero diferentes en cuanto a su naturaleza de diseño, por ejemplo una alimentada a vapor y otra eléctricamente (diversidad). En estos arreglos en “Standby”, se pretende reducir la probabilidad de falla (en este caso de la función de bombeo). Ambos equipos bajo esta configuración reducen la probabilidad de falla, dado que si falla un elemento actuaría “a demanda” el otro. Sin embargo, “la diversidad” es más efectiva ante fallas de causa común, en este caso por falla en el sistema de alimentación energética, por ejemplo. En un arreglo la bomba de reserva efectivamente actuaría; en el otro la bomba “en standby” fallaría ante demanda (ya que estaría afectada por la falta de energía si utiliza la misma fuente, anulando la protección buscada). Finalmente, la confiabilidad o la disponibilidad de estos sistemas “en standby” no se calcula con la fórmula desarrollada anteriormente, ya que la “función ante demanda” no existe en los sistemas en paralelo analizados. Distinto sería el caso en que ambas bombas funcionaran simultáneamente, pero esta es una función de bombeo distinta, y solo se utiliza bajo ciertas circunstancias que se derivan de las necesidades del proceso, màs que por un arreglo basado en la seguridad del sistema.

Por otra parte, es necesario recordar los distintos modos de falla. Existen distintos grados de funcionamiento anómalo. Podemos llamar anomalía a cualquier defecto del equipo, proceso o sistema cuando se fracasa en cumplir las especificaciones de diseño debido a una o varias fallas simultáneas. Vimos que una falla es un estado en el cual no se cumplen las especificaciones según diseño. No obstante, las manifestaciones de las fallas pueden ser diversas. Nos importa en particular destacar aquellas fallas que implican la anulación total de la función especificada por diseño (por ejemplo, falla de la bomba y no hay alimentación al reactor). Esta falla, además, se asume permanente. Nótese que existen fallas que impiden la función nominal de diseño, aunque bajo una prestación degradada por ejemplo una bomba que si bien bombea fluido, el caudal es menor al de diseño. En este caso, hablamos de estados de funcionamiento degradados. Por último, es importante, en los sistemas de protección, considerar las *fallas latentes*. Son aquellas que existen, pero no se manifiestan hasta que se necesita la actuación del componente o equipo. Por ejemplo, las alarmas, enclavamientos u otros sistemas de seguridad, actúan ante demanda. Si existen fallas "latentes", éstas no se manifiestan hasta que se demande una acción del equipo. Ante la falla existente, de existir, no se cumplirá la acción requerida. Este tipo de fallas son complejas, en el sentido que solo pueden detectarse mediante campañas de inspección periódica, cuya frecuencia dependerá de la criticidad de tales elementos de protección.

Aquí principalmente nos referiremos a fallas totales (funciona /no funciona), y permanentes (no intermitentes). Esto es, dos estados binarios. Dado que es falla permanente, el componente / equipo solo vuelve a funcionar si se realiza una tarea de reparación, que lo "devuelve a nuevo".

Como hemos mencionado, por un lado, hablamos de control cuando pretendemos que las variables de diseño "controladas" no sobrepasen el valor consigna por mucho tiempo, manipulando otras variables de proceso (variables manipuladas) para lograr tal fin. Si no es posible ya que los valores controlados se disparan más allá de lo deseado, existe un valor definido por diseño (estado de valor alto o bajo respecto del de referencia) que generalmente dispara una alarma (acoplada al sistema de supervisión del proceso). Si el problema sigue, y por evolución del estado de funcionamiento anómalo se alcanza un valor ya crítico (alto y muy alto o bajo y muy bajo), se debe tomar una acción correctiva. Por ejemplo, actuar un enclavamiento, o activar alivios, o directamente parar el sector de la planta, o bien la planta completa, según sea el caso (estamos ya en situaciones de emergencia, el sistema de control no pudo contener los desvíos, y ante tal situación, por seguridad, se activan las salvaguardas del proceso -si existieran-).

Dentro de este contexto, es necesario analizar los tipos de artefactos que pueden utilizarse para estas situaciones de falla de algún -o algunos- componentes del proceso, que como parte del sistema de seguridad, constituyen un área específica, la del diseño de sistemas /elementos para la gestión de situaciones anómalas o fallas. Estos pueden ser pasivos o activos. Por ejemplo, una alarma o enclavamiento, o un sistema de redundancia (bomba en paralelo) .

Anexo I

Algunos Conceptos básicos sobre probabilidades
Probabilidad condicional

La probabilidad condicional Pr(A|C) es la probabilidad que ocurra el evento A dado que ocurre el evento C. Se define de la siguiente manera :

Pr(A|C) = Proporción de los acontecimientos que dan como resultado el evento A entre el conjunto de cosas que hacen que ocurra el evento C.

Esta definición es diferente de las siguientes definiciones:

Pr(A) = Poporción de las cosas que dan como resultado el evento A entre el conjunto de todas las cosas.

Pr(C) = Proporción de las cosas que dan como resultado el evento C entre el conjunto de todas las cosas.

Pr(A,C) = Proporción de todas las cosas que dan como resultado que ocurran simultáneamente los eventos A y C entre el conjunto de todas las cosas.

Ejemplo: Supongamos que tenemos 6 pelotas las cuales pueden ser pequeñas, medianas o grandes, rojas azules o blancas:

Pelota1	Pelota2	Pelota3	Pelota4	Pelota5	Pelota6
Peq.	peq.	med.	grande	peq.	med.
azul	roja	blanca	blanca	roja	roja

Pr(azul) = 1/6
Pr(peq.) = 1/2
Pr(azul,peq.) = 1/6 (entre todas las pelotas pequeñas solo una es azul)
Pr(pelota2) = 1/6
Pr(peq.,roja)=2/6=1/3
Pr(pelota2,peq.,roja)=1/6
Pr(pelota2|peq,roja)=1/2
Pr(pelota1|peq,roja)=0/2=0

Regla de la cadena

La existencia simultánea de los eventos A y C es equivalente a la existencia del evento C mas la existencia de evento A bajo la ocurrencia del evento C. Simbólicamente:

$(A,C) \Leftrightarrow C$ *y* $(A|C)$

esto puede ser extendido a probabilidades:

$Pr(A,C) = Pr(C)\, Pr(A|C)$

más generalmente :

$$Pr(A_1,A_2,\ldots,A_n) = Pr(A_1)Pr(A_2,A_1)\ldots Pr(A_n|A_1,A_2,\ldots,A_{n-1})$$

Si se tiene en cuenta la población total sobre la que se hace muestra W, entonces:

$Pr(A,C|W) = Pr(C|W)Pr(A|C,W)$

Estas ecuaciones son útiles porque calculan simultáneamente las probabilidades incondicionales desde las probabilidades condicionales. Bajo ciertas condiciones las probabilidades condicionales pueden ser calculadas mas fácilmente que las probabilidades incondicionales, debido a que las condiciones achican la muestra bajo consideración.

Ejemplo:

Pr(azul,peq.) = Pr(peq.) Pr(azul|peq.) = (1/2)(1/3) = (1/6)

Pr(pelota2,peq.|roja) = Pr(peq.|roja) Pr(pelota2|peq.,roja) = (2/3) (1/2) = 2/6 = 1/3

De las ecuaciones anteriores se puede deducir:

$$Pr(A|C) = Pr(A,C) / Pr(C)$$

$$Pr(A|C,W) = Pr(A,C|W) / Pr(C|W)$$

entonces la probabilidad condicional es la relación de la probabilidad incondicional simultánea sobre la probabilidad C (evento que condiciona).

Independencia de eventos

El evento A es independiente del evento C si y solo si

$Pr(A|C) = Pr(A)$

Esto significa que la probabilidad del evento A no cambia por la existencia u ocurrencia del evento C. De las ecuaciones anteriores se puede deducir que:

$Pr(A,C) = Pr(A)Pr(C)$

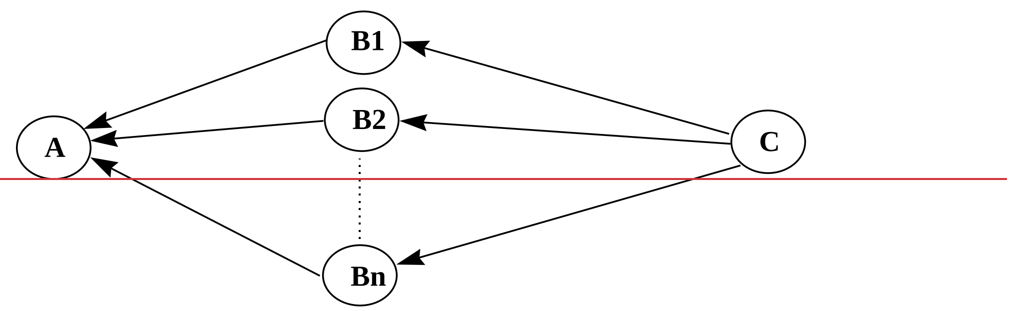
Esta es otra forma de expresar la independencia, en donde se ve que si el evento A es independiente del evento C, también el evento C es independiente del evento A.

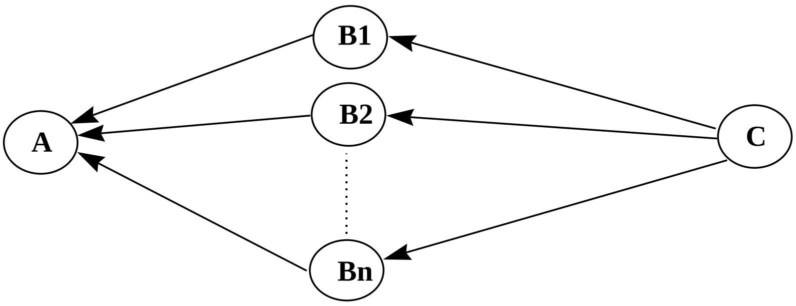
Pregunta: ¿Es el evento pelota azul independiente del evento pelota pequeña?

No, no lo es porque: Pr(azul) = 1/6 y Pr(azul|peq.) = 1/3; si fueran independientes los valores serian iguales. Que se dé una pelota azul es más probable que se dé cuando tenemos una pelota pequeña que de manera independiente.

Regla del puente

Supongamos que tenemos dos eventos A y C y queremos calcular la probabilidad condicional entre ellos Pr(A|C). Para clarificar los conceptos, vamos a suponer que existen eventos intermedios entre ellos que actúan como puentes entre A y C. Supongamos también que los eventos $B_1, B_2, ..., B_n$ son exclusivos mutuamente y cubren todos los casos. Esto es:





$Pr(B_i,B_j) = 0$, para $i \neq j$

$Pr(B_1$ o B_2 o...o $B_n) = 1$

La probabilidad condicional Pr(A|C) puede ser escrita ahora :

$Pr(A|C) = \sum Pr(B_i|C)\, Pr(A|B_i,C)$

El evento A puede ocurrir a través de cualquiera de los n eventos B_1, B_2,...,B_n : intuitivamente, $Pr(B_i,C)$ es la probabilidad de elección del puente B_i y $Pr(A|B_i,C)$ es la probabilidad de ocurrencia del evento A cuando se pasó por el puente B_i.

Ejemplo: Calcule la Pr(azul|peq) siendo B_i la pelota i. De acuerdo con la expresión anterior :

Pr(azul|peq.) = Pr(pelota1|peq.) Pr(azul|pelota1,peq.) + Pr(pelota2|peq.) Pr(azul|pelota1,peq.) + ... + Pr(pelota2|peq.) Pr(azul|pelota1,peq.) = (1/3)(1)+(1/3)(0)+(0)(0)+(0)(0)+(1/3)(0)+(0)(0) = 1/3

Cuando no existe ninguna pelota que satisface la condición, la probabilidad condicional correspondiente es 0. Esto es: Pr(azul|pelota3,peq.) = 0.