DSOySP

Modelado individual de equipos en estado dinámico (I)

2024

Profesor: Dr. Nicolás J. Scenna
JTP: Dr. Néstor H. Rodríguez
Aux. 1ra: Dr. Juan I. Manassaldi

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si $y = f(x)$

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente

La denominación de "ordinaria" se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Introducción

Expresión implícita:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$$

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Orden: máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Grado: grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Lineal: la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

No Lineal: la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Diremos que una función y: $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada n-ésima de y en todo punto del intervalo$[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n}(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n}(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

Introducción

Para encontrar $y(x)$ (solución) es necesario efectuar n integraciones, lo cual implica que deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g\left(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0 \;\; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\begin{cases} y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right) = 0 \;\; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Sistema de EDOs

Un sistema de EDOs de primer orden es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \end{cases}$$

Introducción

Las EDOs de orden *n* se pueden transformar en *n* EDOs de 1er orden mediante un cambio de variables:

$$y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$$ EDO original

$$\left.\begin{array}{l} y \\ y' = y_1 \\ y'' = y_1' \rightarrow y_1' = y_2 \\ y''' = y_1'' = y_2' \rightarrow y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y^{n-1} = y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y^{n} = y'_{n-1} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y'_{n-1} = f\left(x, y, y_1, y_2 \ldots, y_{n-1}\right) \\ y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \end{array}\right.$$

Nos interesan los métodos para resolver EDOs de 1er orden

Sistema de *n* EDOs de 1er orden equivalente

Introducción

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \ \vee \ y' = f\left(x, y,\right)$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

Balance de materia en sistemas dinámicos

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{ingresa al sistema}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{abandona el sistema}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de la masa dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

La unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- La ecuación de diseño en estado estacionario que estamos acostumbrados a usar dice que "lo que entra, sale".
- La versión dinámica dice lo mismo con la adición de la palabra "eventualmente".
- El lado derecho será una derivada parcial o una derivada ordinaria de la masa dentro del sistema con respecto a la variable independiente tiempo (t).

Balance de materia en sistemas dinámicos

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{ingresa al sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{abandona el sistema}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de la masa dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

La unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de moles}\\ \text{del componente i}\\ \text{que ingresan al sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Flujo de moles}\\ \text{del componente i}\\ \text{que abandonan el sistema}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{velocidad de formación}\\ \text{de moles del componente i}\\ \text{por reacción química}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de moles del componente i}\\ \text{dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

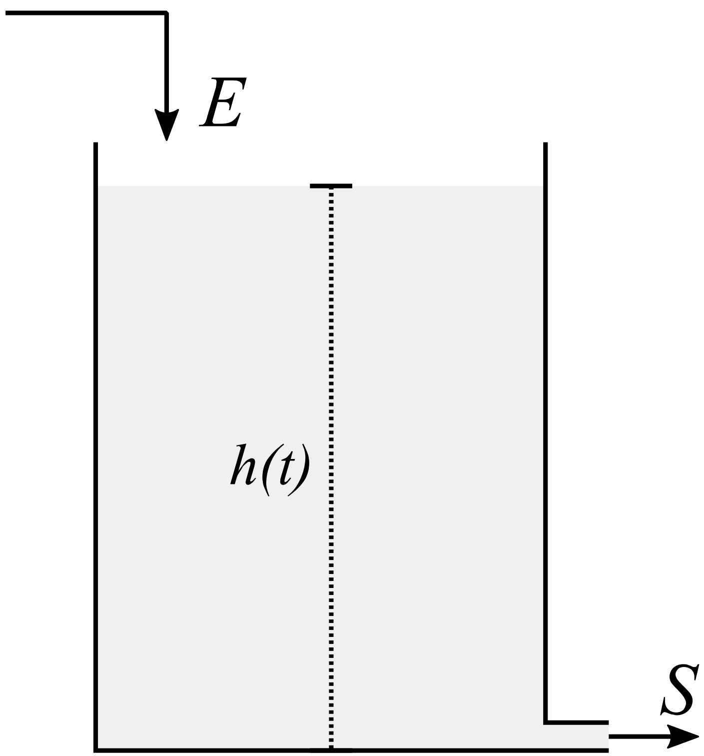
La unidad de esta ecuación es moles/tiempo

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

- Balance de materia en el tanque: Acumulación = Entrada – Salida

HOLDUP de materia

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s \qquad \begin{aligned} M &\rightarrow \text{Masa de fluido dentro del tanque} \\ m_e &\rightarrow \text{Flujo masico de entrada de fluido} \\ m_s &\rightarrow \text{Flujo masico de salida de fluido} \end{aligned}$$

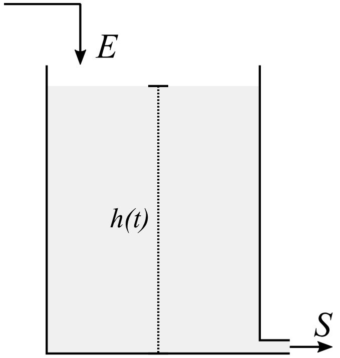
$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{d\rho A_T h}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

¡Fácilmente medible!



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$$m_e = \rho E \qquad E \rightarrow \text{Caudal volumetrico de entrada}$$

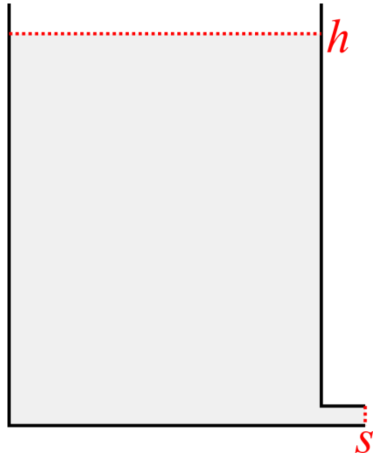
$$m_s = \rho S \qquad S \rightarrow \text{Caudal volumetrico de salida}$$

$$m_s = \rho A_s v_s \qquad \begin{array}{l} A_s \rightarrow \text{Area de salida del tanque} \\ v_s \rightarrow \text{velocidad de salida del tanque} \end{array}$$

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{v_h{}^2 \rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho g h = \frac{v_s{}^2 \rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho g h_s}$$

$$v_h = 0 \qquad P_h = P_s \qquad h_s = 0$$



$$\rho g h = \frac{v_s{}^2 \rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Luego: $\rho A_T \dfrac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}}$$ EDO

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

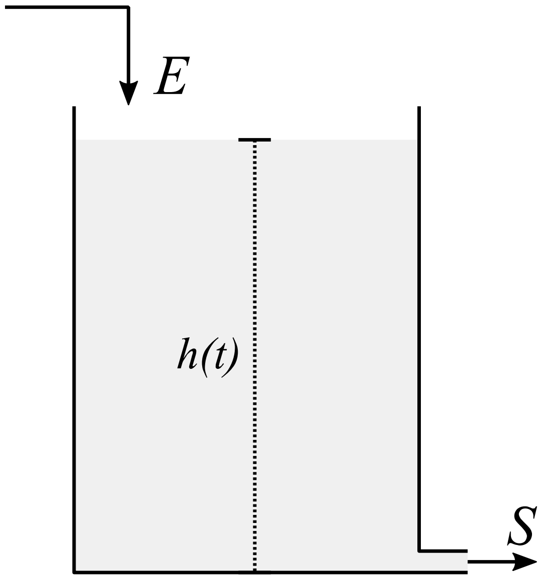
$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$t = 0 \rightarrow h = h_0$ (problema de valor inicial)

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Ejemplo práctico:

- Vaciado del tanque (E=0)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos

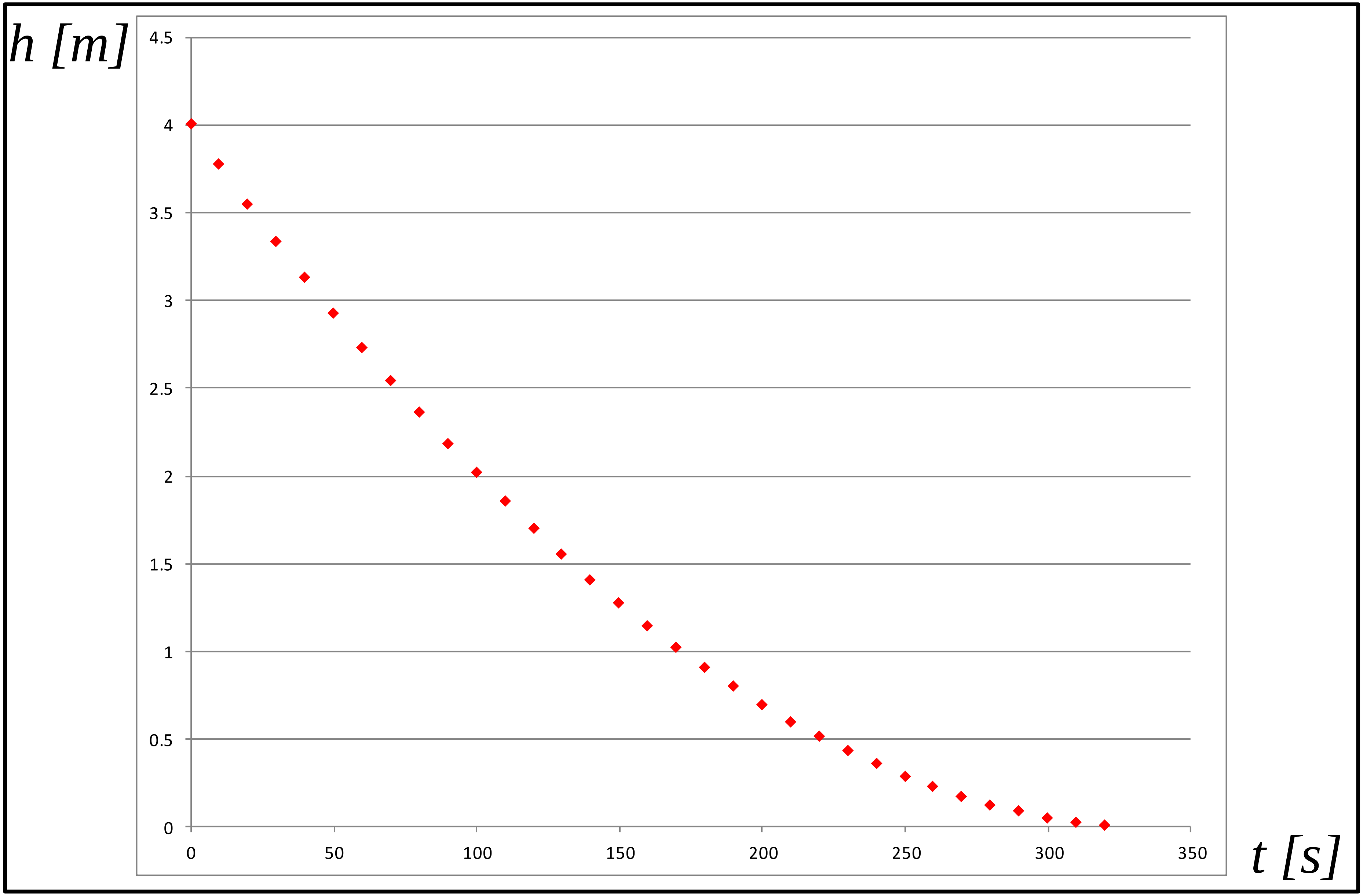


$$A_T = \frac{\pi D_T^{\,2}}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^{\,2}}{4} \qquad \rightarrow A_T \frac{dh}{dt} = -A_s\sqrt{2gh} \rightarrow \frac{\pi D_T^{\,2}}{4}\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^{\,2}}{4}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^{\,2}}{D_T^{\,2}}\sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -2.58064\times 10^{-3}\sqrt{2gh}}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Modelos simples de válvulas

- Las válvulas de control son conceptualmente orificios de área variable.
- Se las puede considerar simplemente como una restricción que cambia su tamaño de acuerdo a un pedido por parte del controlador u operador.
- Al pasar un fluido por una restricción , la fórmula (para líquidos) que vincula el caudal con la diferencia de presión entre la entrada y la salida es:

$$Q = k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula

$\rho \rightarrow$ Densidad del fluido

$k \rightarrow$ Constante del orificio

$$Q = k^{'}\sqrt{\frac{\Delta P^{*}}{G}}$$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido

Modelos simples de válvulas

- El predominio histórico de los fabricantes de válvulas en Estados Unidos ha llevado a que las características de las válvulas se den a menudo en unidades estadounidenses.
- Para gases suele utilizarse la misma ecuación pero utilizando la gravedad especifica referenciada al aire y el caudal expresado de forma estándar.

$$Q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula $[US\ gpm]$

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula $[psi]$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60°F}^{agua}$ $[adim]$

$C_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 ºF

$$Q = K_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula $[m^3/h]$

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula $[bar]$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60°F}^{agua}$ $[adim]$

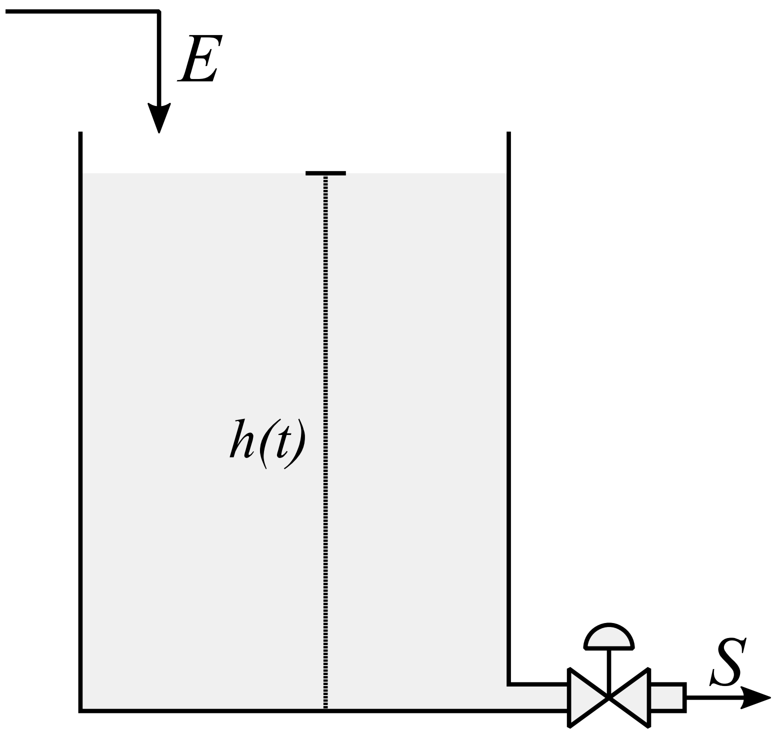
$K_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 ºF

$$C_V = 1.15 K_V$$

Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s \qquad M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

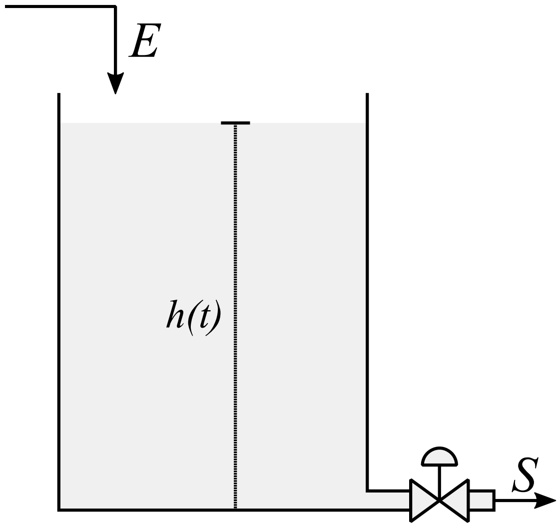
ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho S$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$



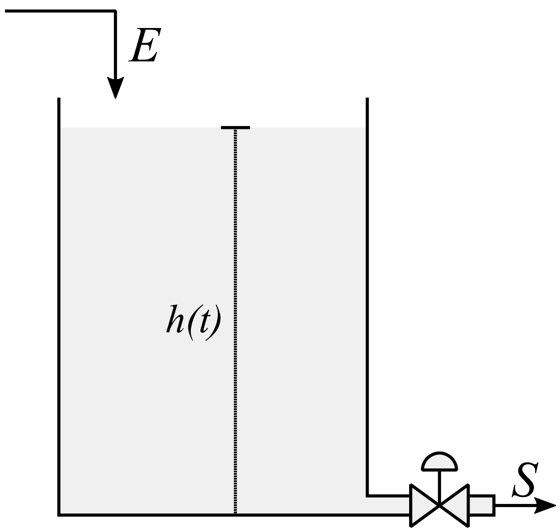
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

$$S = C_v \sqrt{\Delta P_s / \rho} \rightarrow S = C_v \sqrt{\left(P_f - P\right)_s / \rho}$$

$$P_0 = P_s$$

$$S = C_v \sqrt{\left(\cancel{P_0} + \cancel{\rho} gh - \cancel{P_s}\right)_s / \cancel{\rho}}$$



$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T}\sqrt{gh}}$$

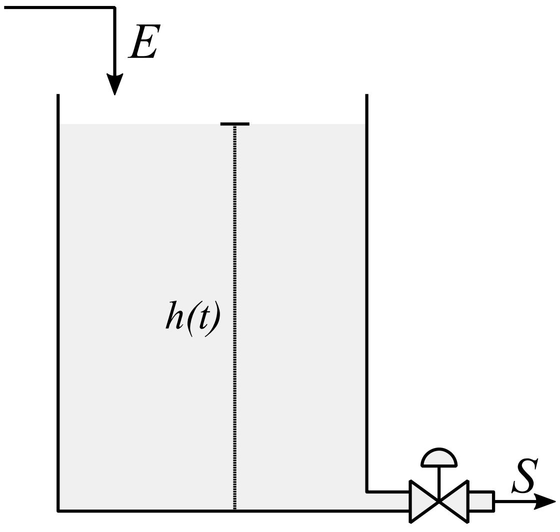
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Ejemplo práctico:

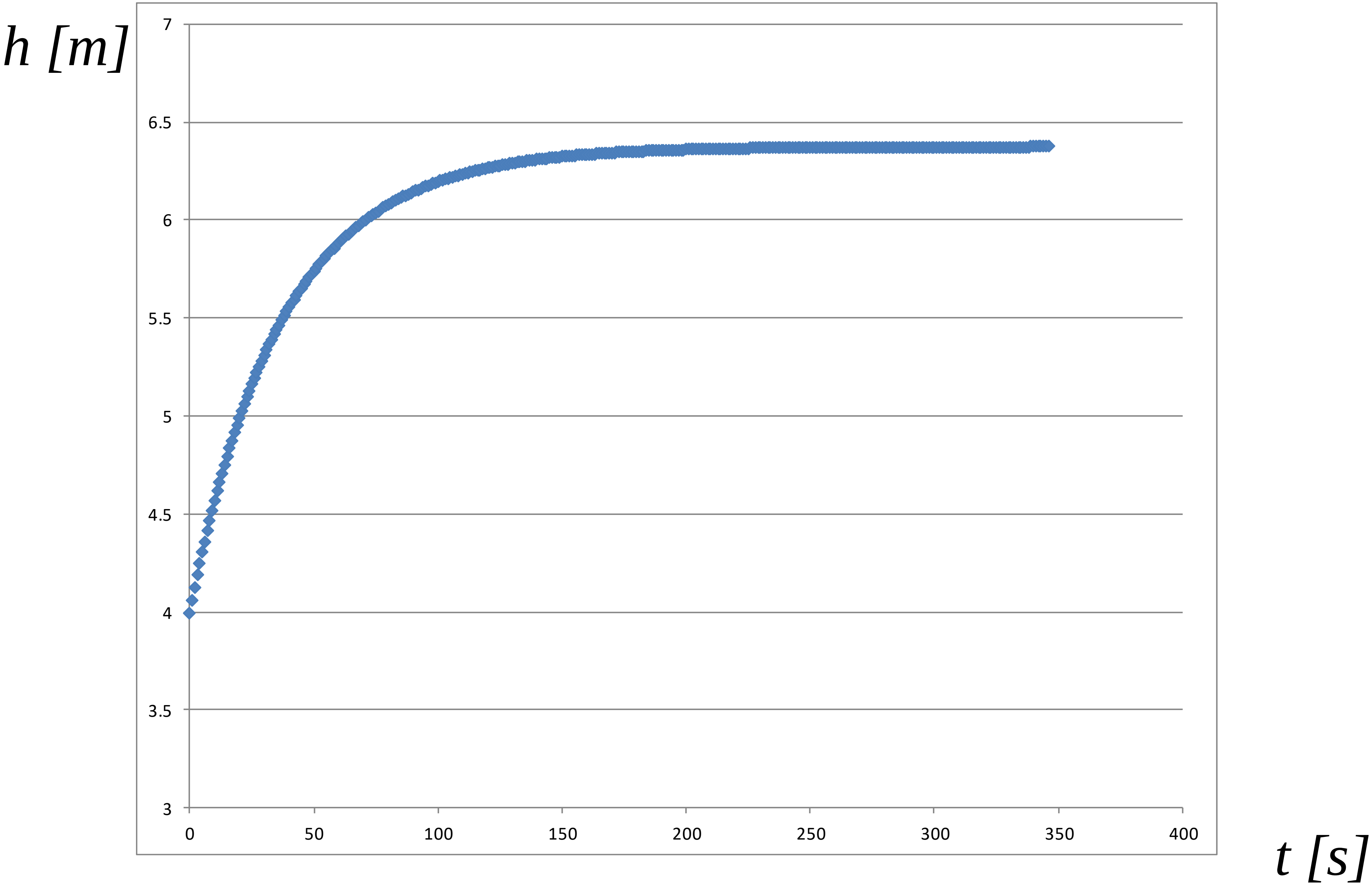
- Caudal de entrada ($E=0.25\ m^3/seg$)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Cv de la válvula de descarga: $0.0316\ m^2$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T}\sqrt{gh}$$

$$t = 0 \rightarrow h = 4\ m$$



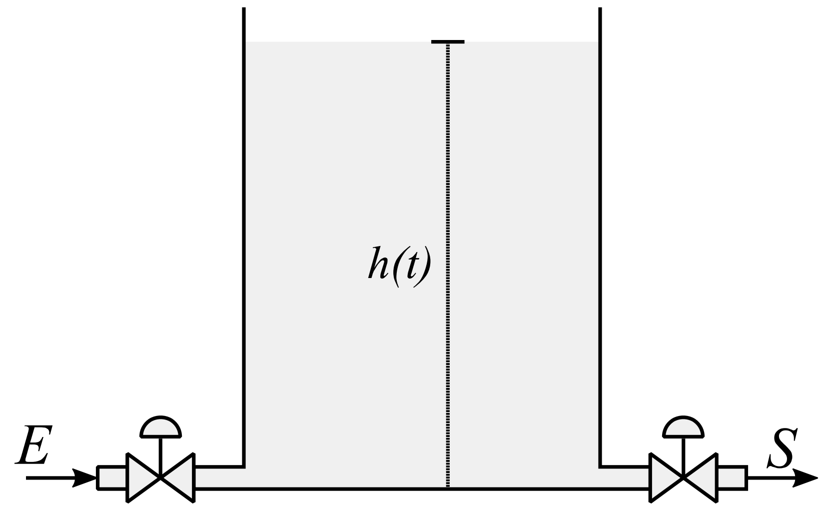
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

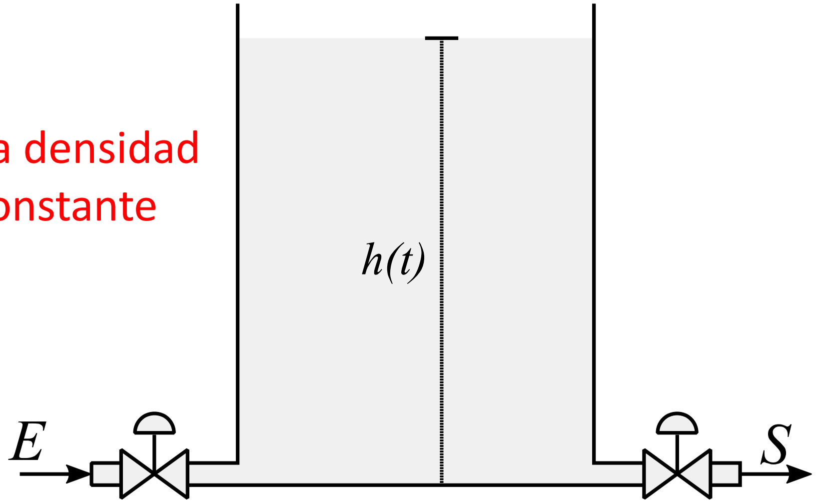
Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

- Balance de materia en el tanque:



¡Cuidado!: Solo para densidad y área transversal constante

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

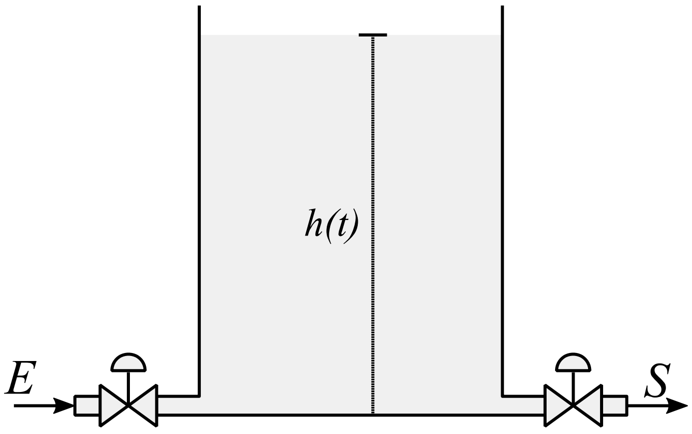
$$E = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_f\right)/\rho} \qquad S = C_{v2}\sqrt{\left(P_f - P_s\right)/\rho}$$

$$E = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} \qquad S = C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$\boxed{A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}}$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

Ejemplo practico:

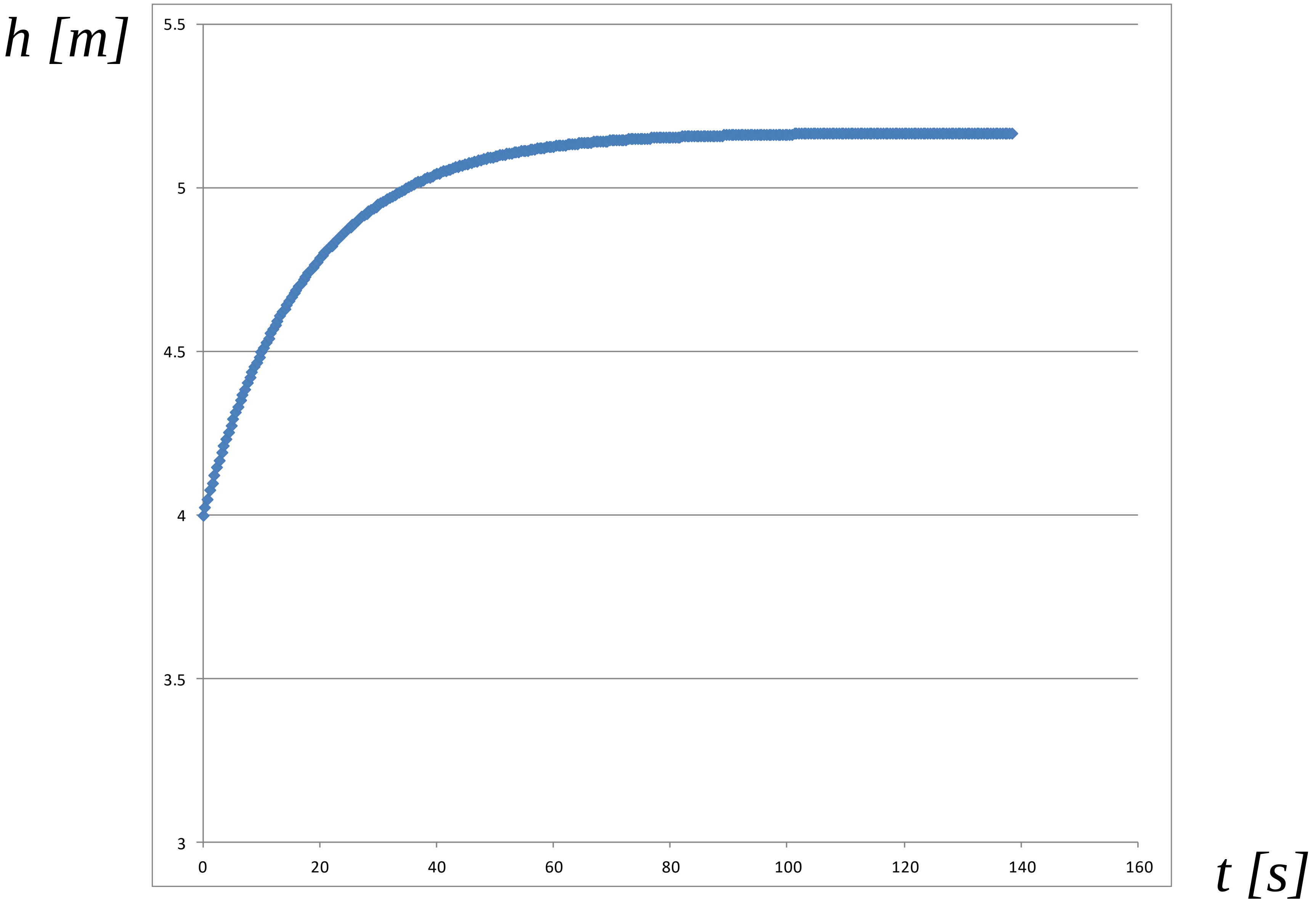


- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión en la superficie del liquido $P_0=101325\ Pa$
- Presión de descarga igual a la superior del tanque ($P_s=P_0$)
- Presión de entrada: $P_E=202650\ Pa$

$$A_T\frac{dh}{dt}=C_{v1}\sqrt{\left(P_E-P_0-\rho gh\right)/\rho}-C_{v2}\sqrt{\left(P_0+\rho gh-P_s\right)/\rho}$$

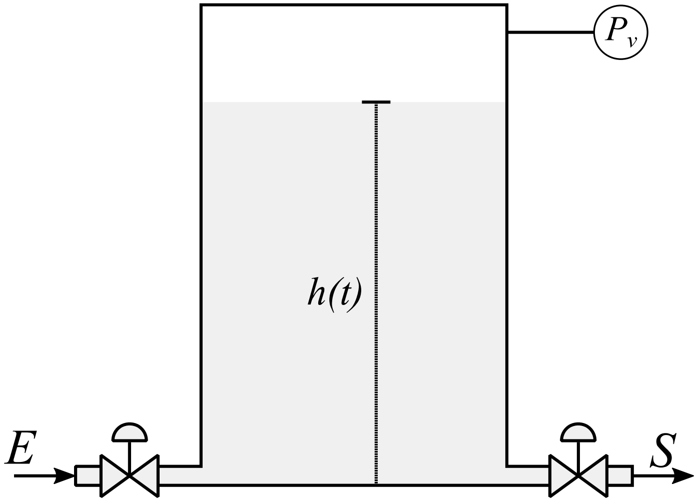
$$t=0\rightarrow h=4\,m$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis



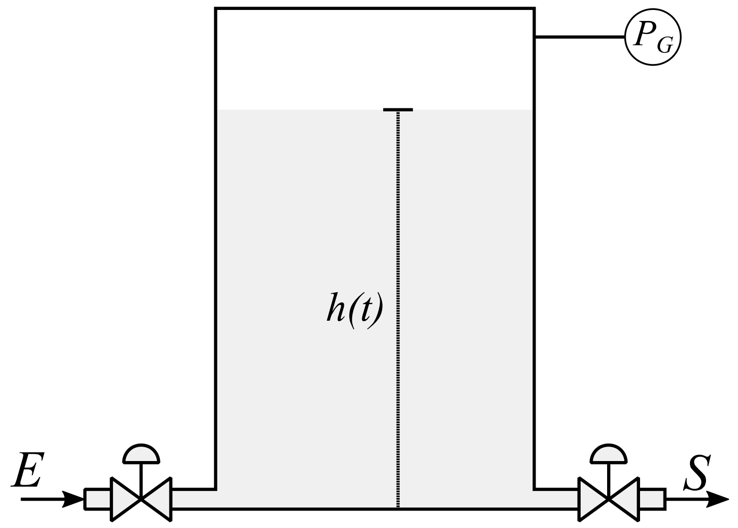
- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- El vapor sobre el liquido se encuentra en equilibrio.
- <u>Holdup de vapor despreciable</u>

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_v - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_v + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis

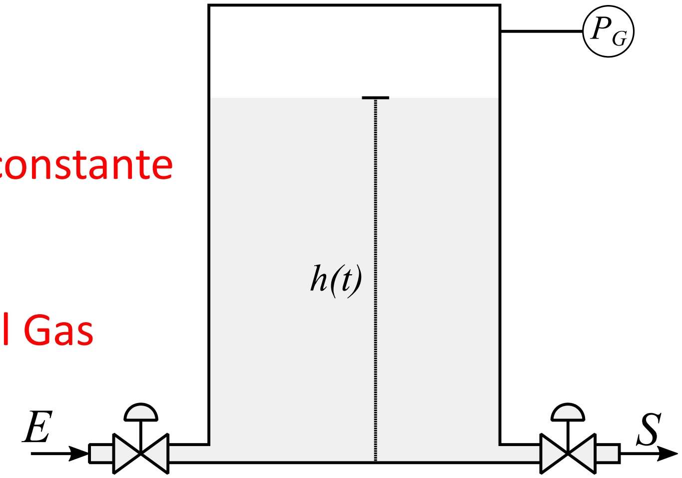
- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- <u>Holdup de vapor no despreciable y constante</u>



Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{P_E - \boxed{P_G} + \rho g h / \rho} - C_{v2}\sqrt{\boxed{P_G} + \rho g h - P_s / \rho}$$

¡Varía con la altura!



$$M_G = \rho_G V_G$$

Holdup del gas no despreciable y constante

$$\rho_G = \frac{P_G}{R' T}$$

Asumiendo comportamiento ideal del Gas

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{R' T_G^0} = \frac{P_G V_G}{R' T_G}$$

$$V_G = V_T - A_T h$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{T_G^0} = \frac{P_G V_G}{T_G}$$

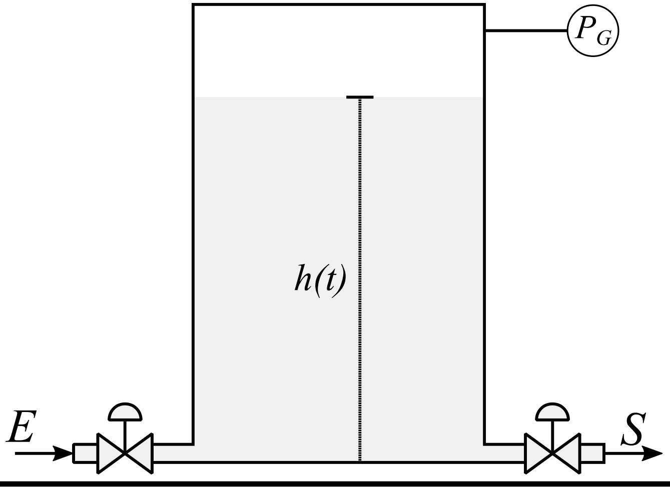
Se desprecia la variación de temperatura

$$P_G = \frac{P_G^0 \left(V_T - A_T h^0 \right)}{\left(V_T - A_T h \right)}$$

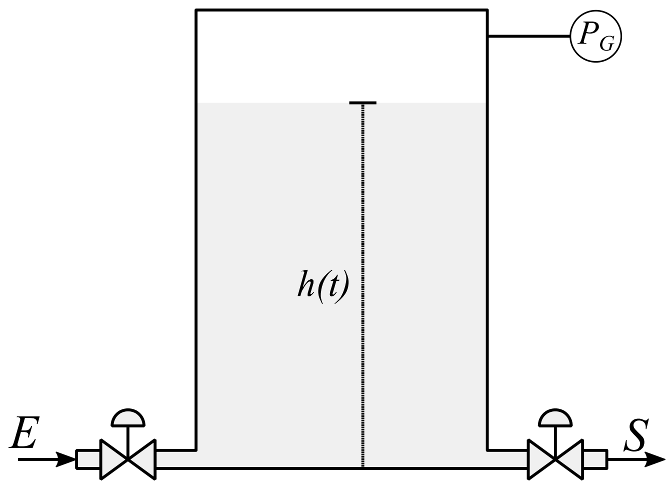
Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_G - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_G + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$P_G = \frac{P_G^0\left(V_T - A_T h^0\right)}{\left(V_T - A_T h\right)}$$



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



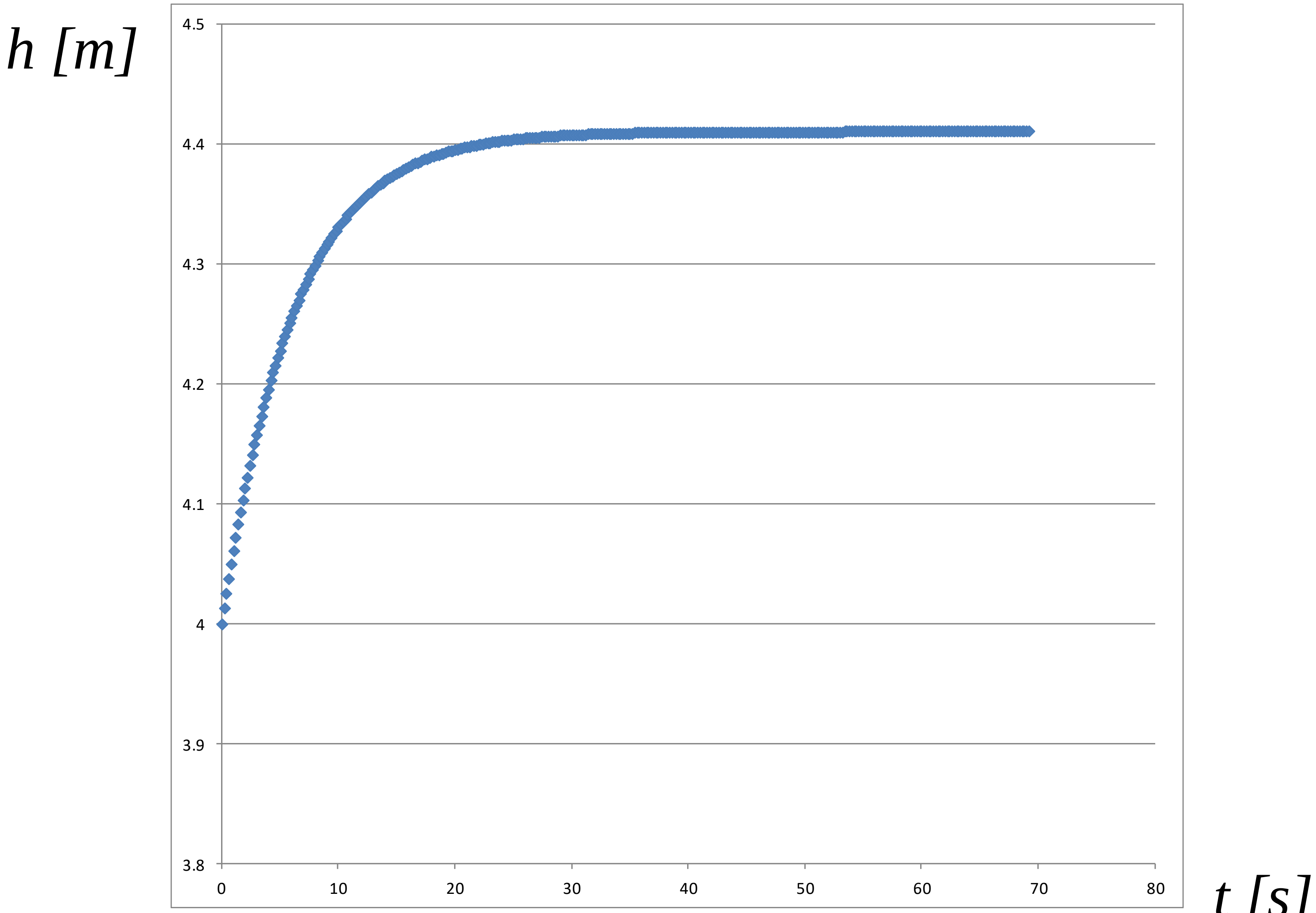
Ejemplo practico:

- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Altura del tanque: 10 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión de descarga : $P_s=101325\ Pa$
- Presión de entrada: $P_E=202650\ Pa$
- Presión inicial del gas: $P_G^0= 101325\ Pa$

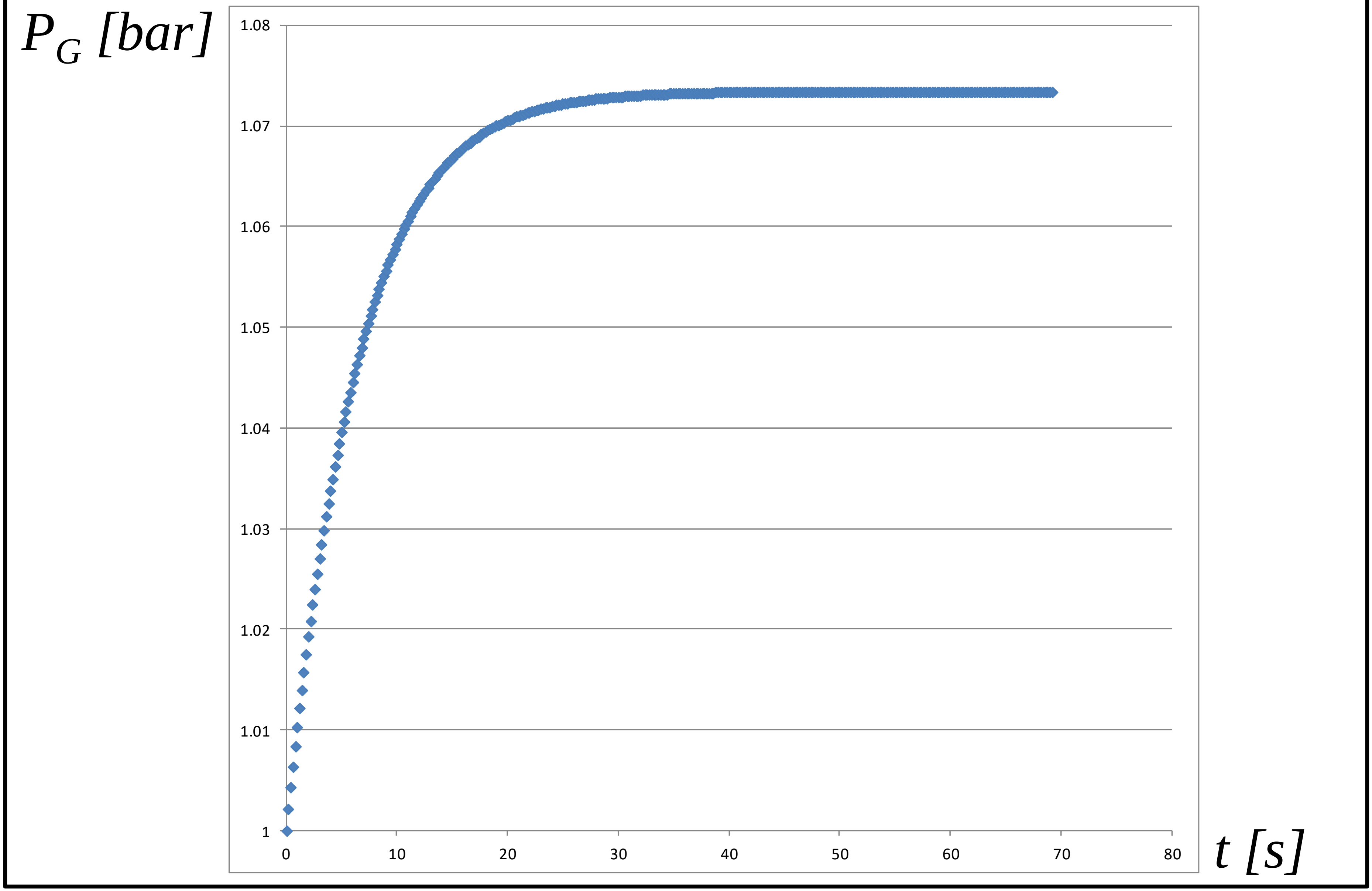
$$A_T\frac{dh}{dt}=C_{v1}\sqrt{\left(P_E-P_G-\rho gh\right)/\rho}-C_{v2}\sqrt{\left(P_G+\rho gh-P_s\right)/\rho}$$

$$P_G=P_G^0\left(V_T-A_T h^0\right)\Big/\left(V_T-A_T h\right)$$

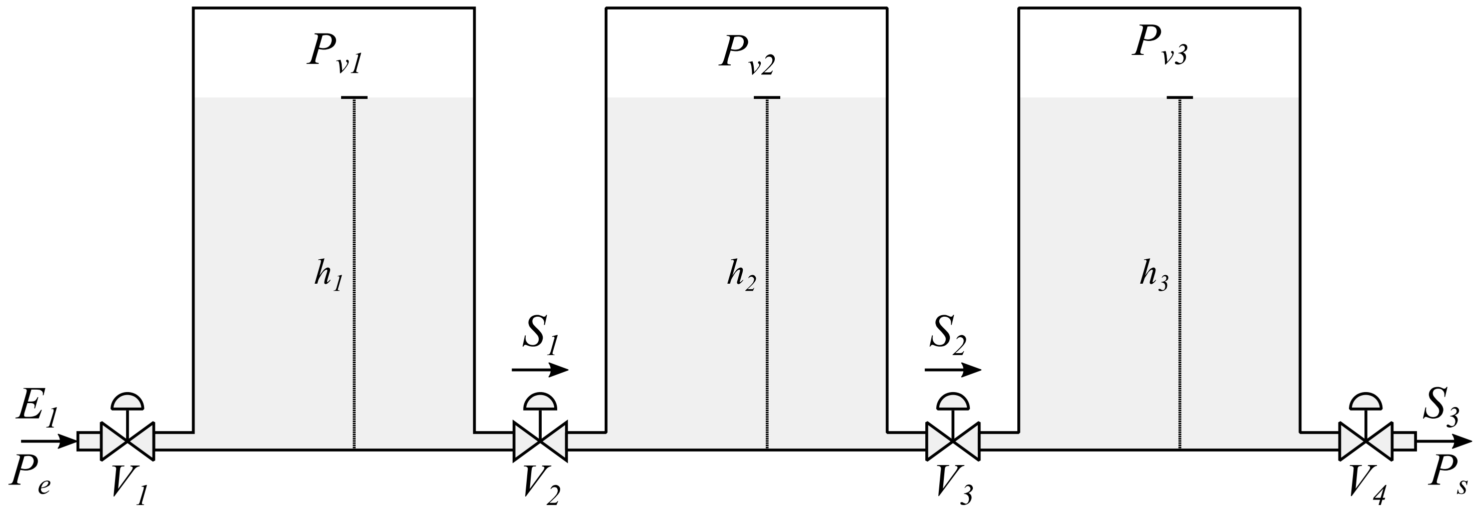
Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Tanques en serie



$$\frac{dM_1}{dt} = m_{e1} - m_{s1} \xrightarrow{\rho\, cte} A_{T_1}\frac{dh_1}{dt} = E_1 - S_1$$

$$\frac{dM_2}{dt} = m_{e2} - m_{s2} \xrightarrow{\rho\, cte} A_{T_2}\frac{dh_1}{dt} = E_2 - S_2$$

$$\frac{dM_3}{dt} = m_{e3} - m_{s3} \xrightarrow{\rho\, cte} A_{T_3}\frac{dh_3}{dt} = E_3 - S_3$$

$$A_{T_1}\frac{dh_1}{dt} = E_1 - S_1$$

$$A_{T_2}\frac{dh_1}{dt} = S_1 - S_2$$

$$A_{T_3}\frac{dh_3}{dt} = S_2 - S_3$$