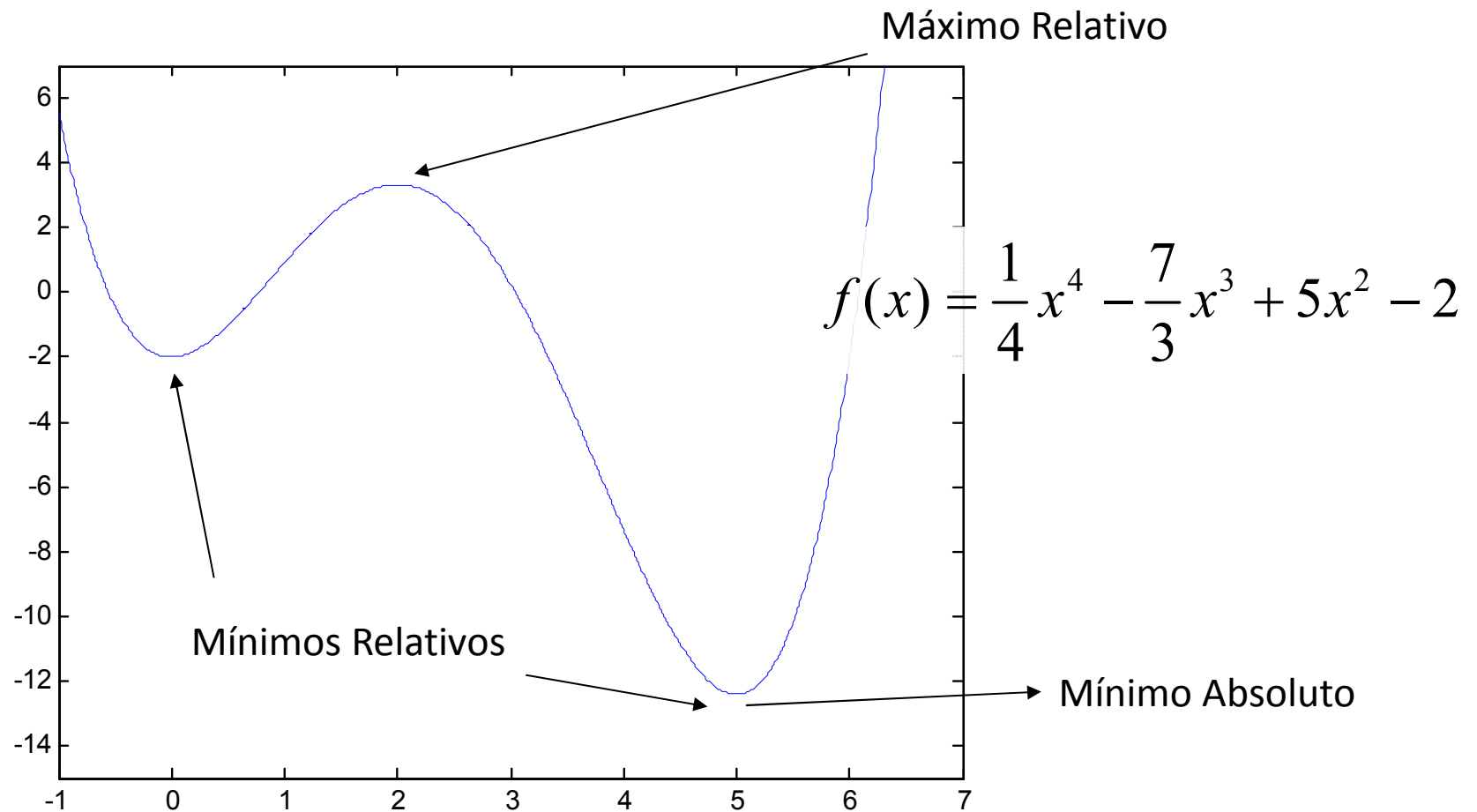


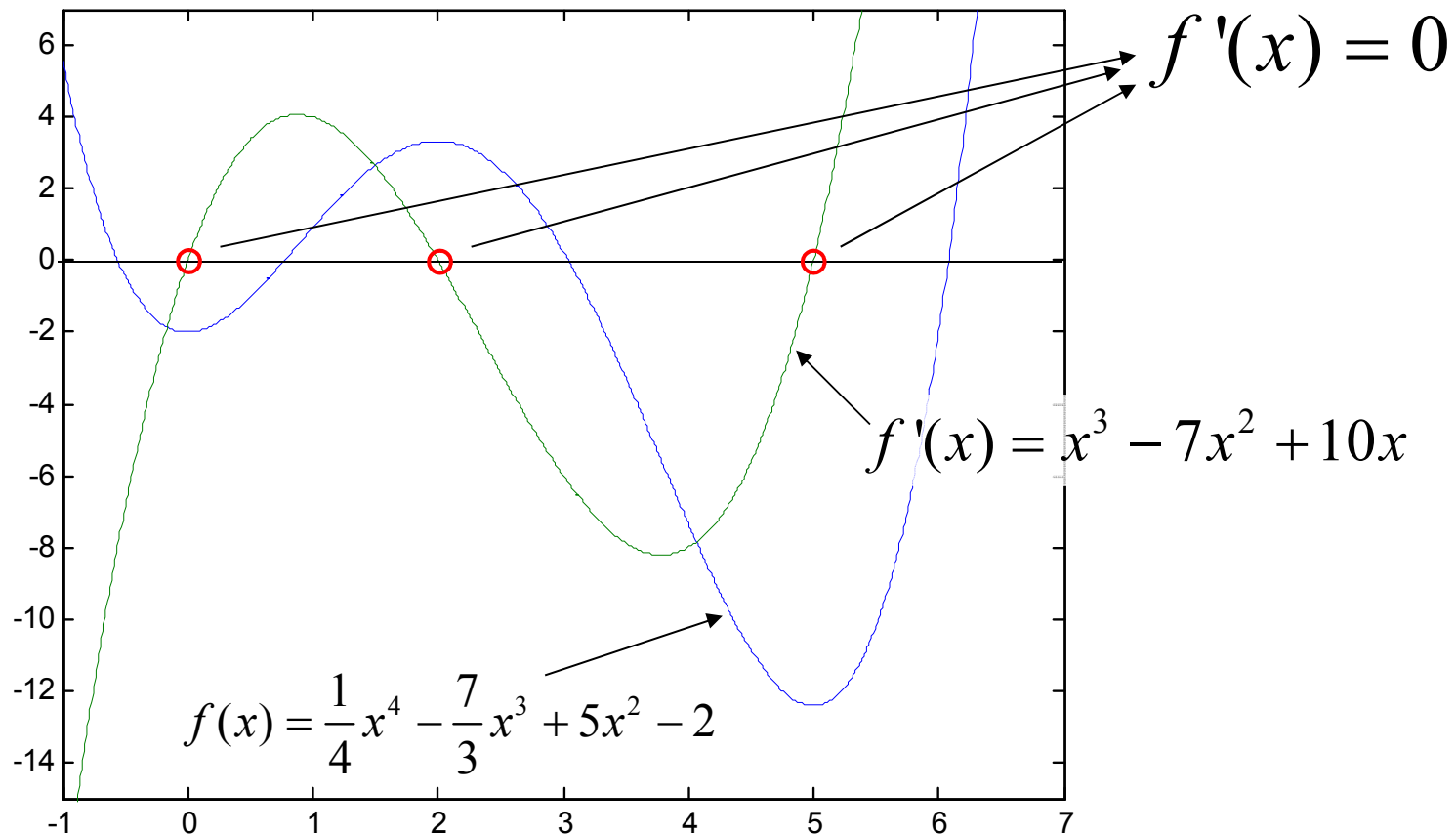
Optimización Unidimensional

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
Auxiliares: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Srta. Amalia Rueda

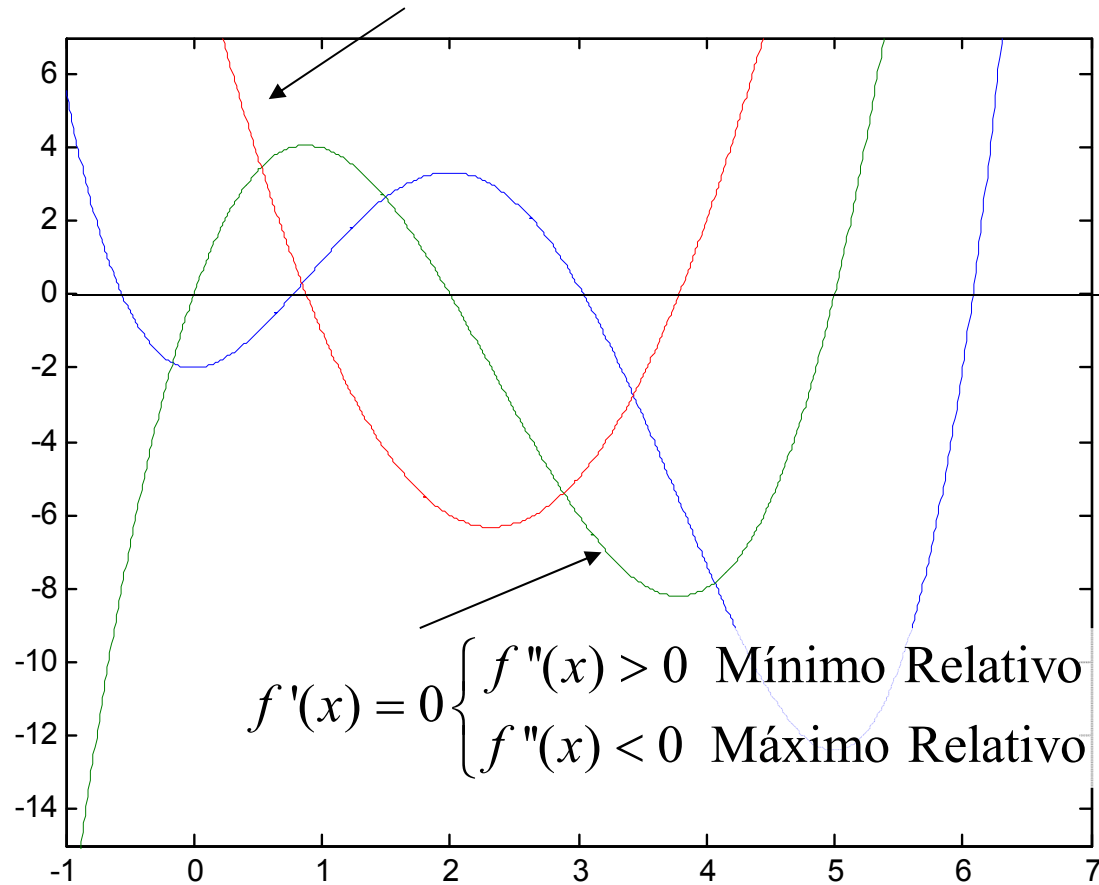
Encontrar el valor mínimo o máximo de una función en una variable



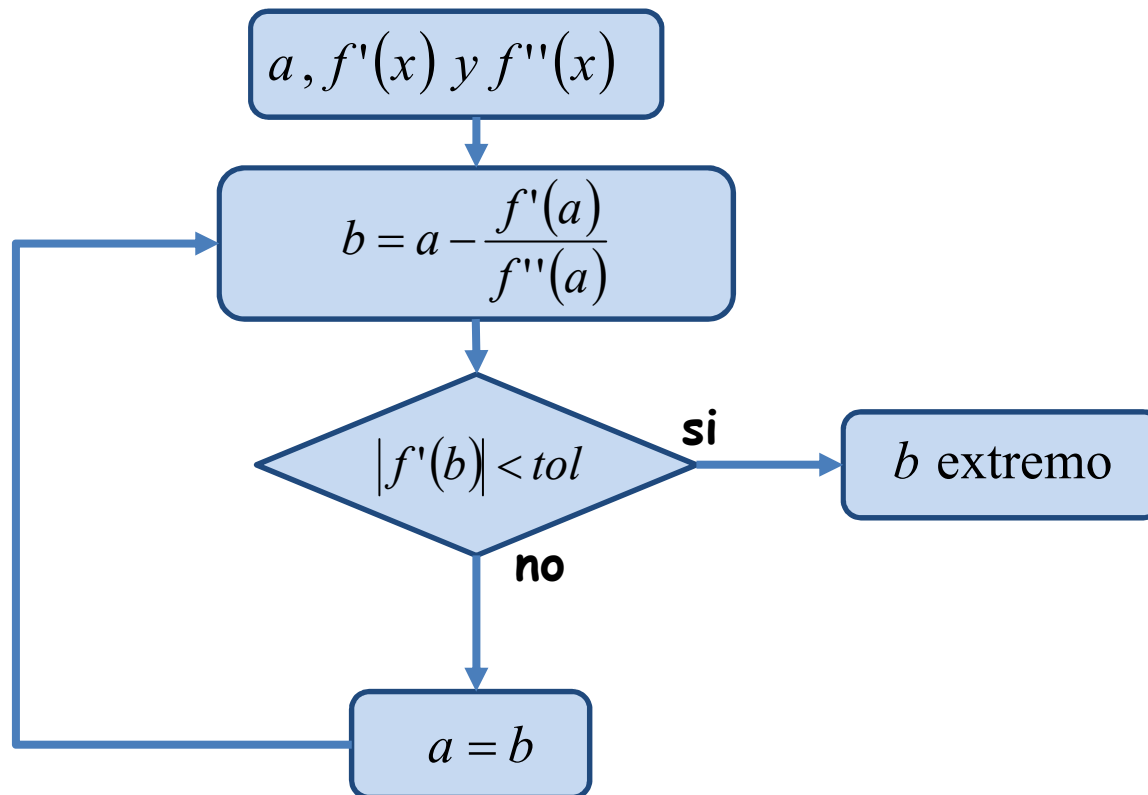
Condición necesaria de mínimo o máximo: $f'(x) = 0$



$$f''(x) = 3x^2 - 14x + 10$$



Se basa en encontrar la raíz de $f'(x) = 0$ aplicando el método de Newton-Rhapson.



Este método encuentra la parábola que pasa por tres puntos de la función y encuentra el extremo de la misma. Luego se eligen tres nuevos puntos y se repite el procedimiento hasta satisfacer la tolerancia.

¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

¿Cómo encontrar la parábola?

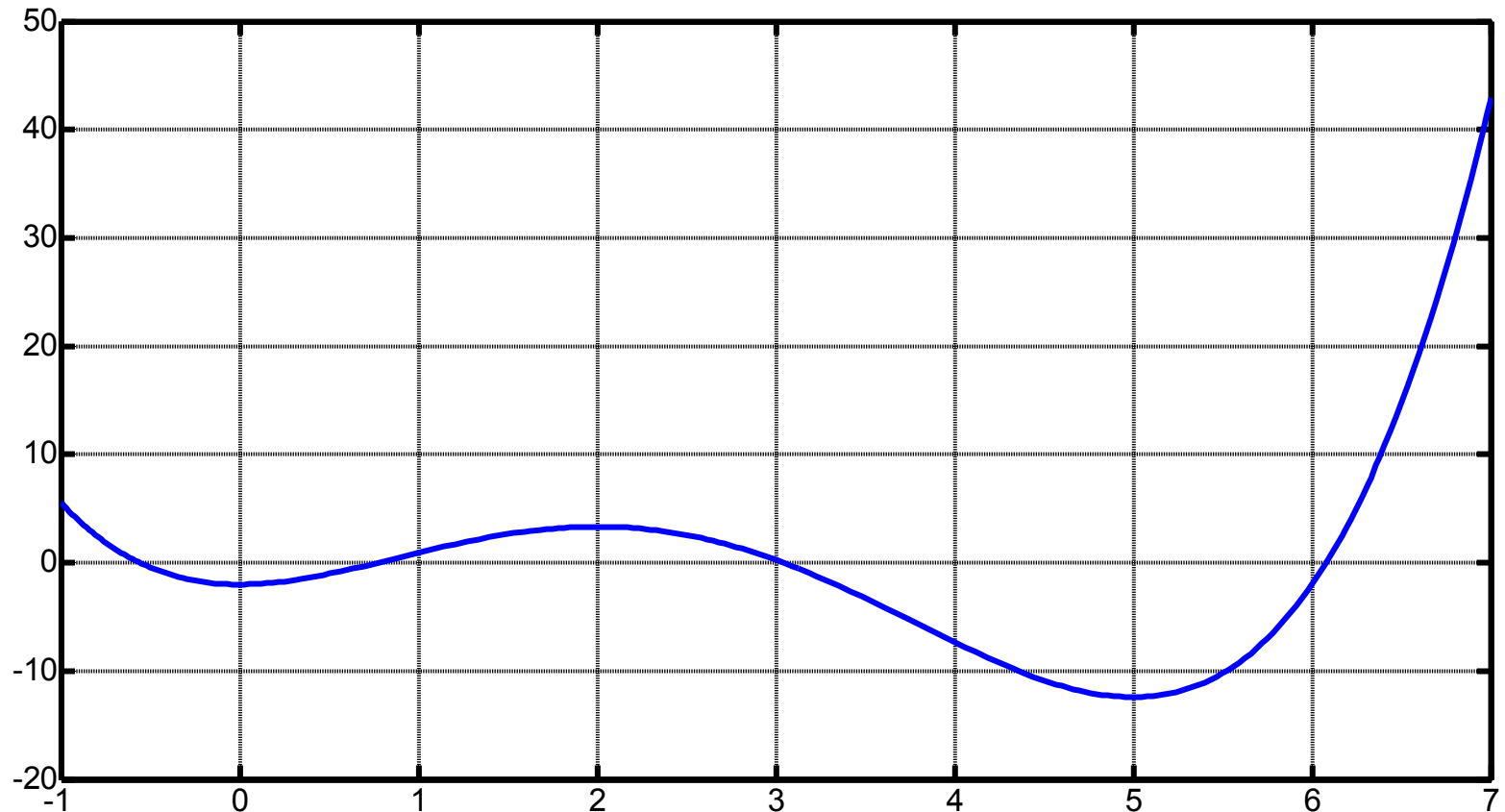
¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

¿Cómo elijo los nuevos puntos?

¿Cuál es el criterio de tolerancia?

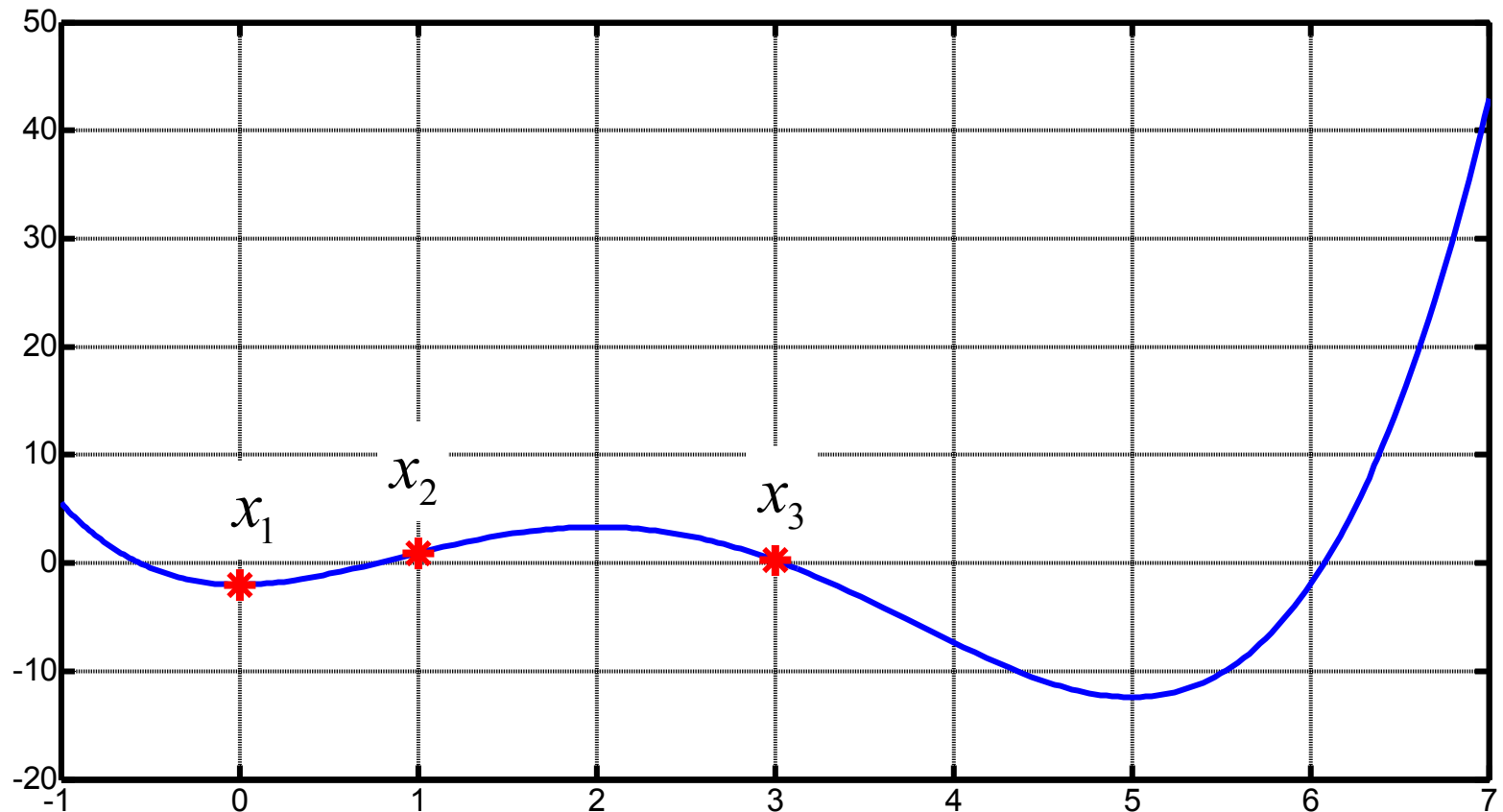
Ejemplo:

$$\max f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$$



¿Cómo elegir los tres valores de arranque?

max $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 - 2$

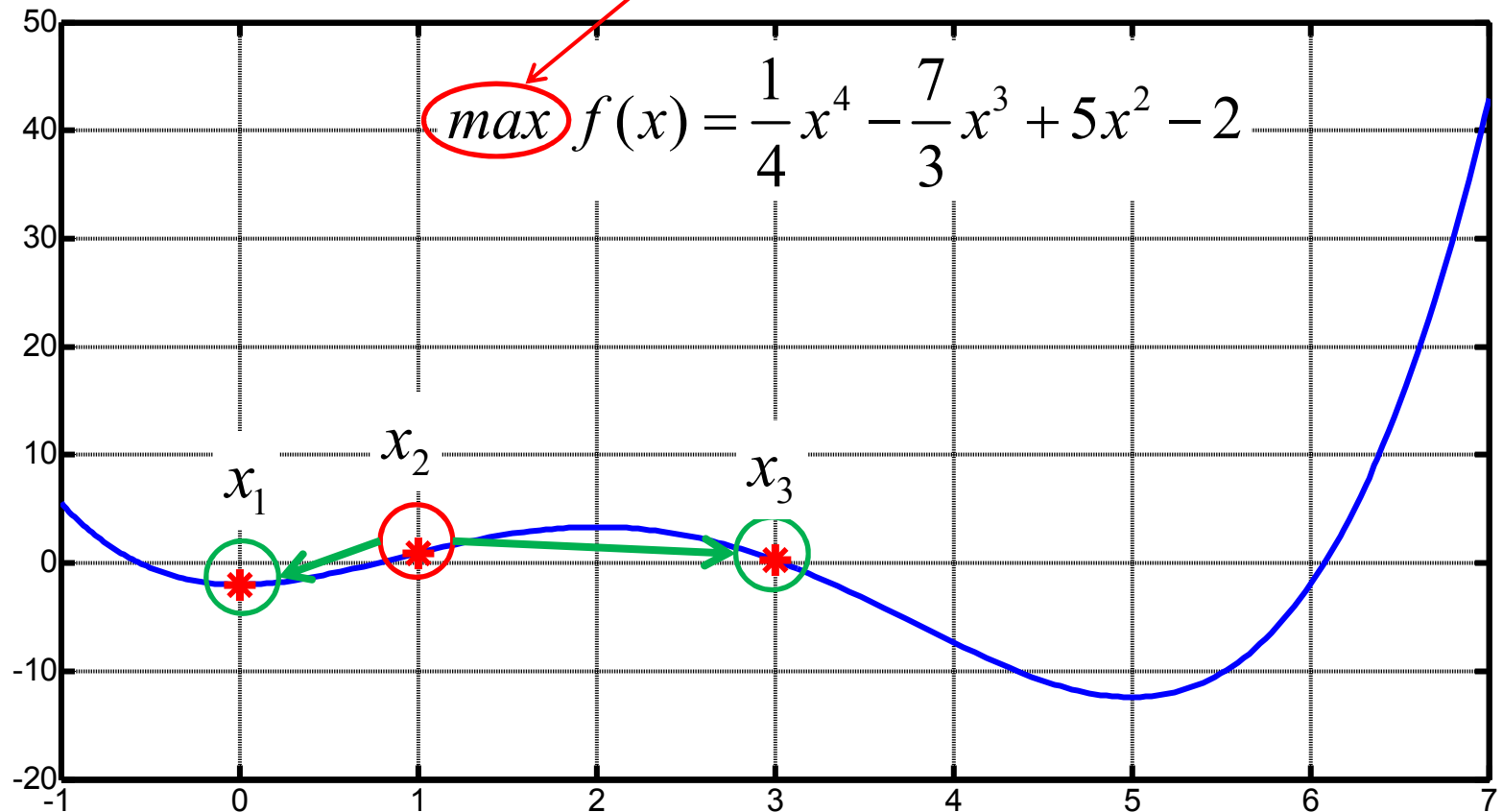


$$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$$

$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 0.9167$$

$$x_3 = 3 \quad f(x_3) = 0.25$$

El valor de la función en el punto intermedio mayor que el de los extremos



¿Cómo encontrar la parábola?

La parábola debe pasar por los siguientes puntos:

$$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2 \quad (0; -2)$$

$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 0.9167 \quad \longrightarrow \quad (1; 0.9167)$$

$$x_3 = 3 \quad f(x_3) = 0.25 \quad (3; 0.25)$$

$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$ Los tres puntos deben cumplir esta ecuación

$$\begin{aligned} a0^2 + b0 + c &= -2 \\ a1^2 + b1 + c &= 0.9167 \\ a3^2 + b3 + c &= 0.25 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.9167 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \text{Sistema } 3 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.9167 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

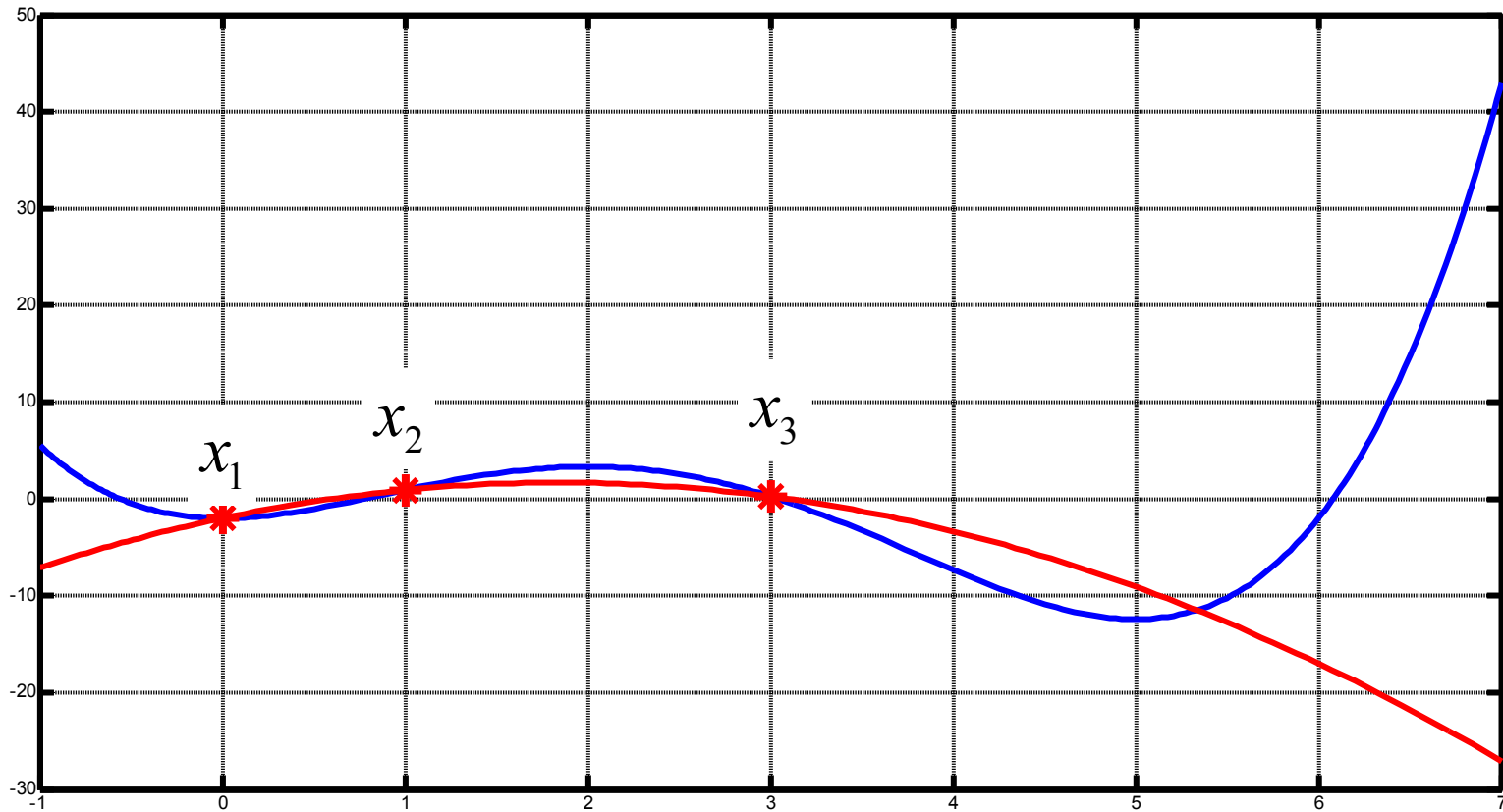
Resolvemos

$$a = -1.0833$$

$$b = 4$$

$$c = -2$$

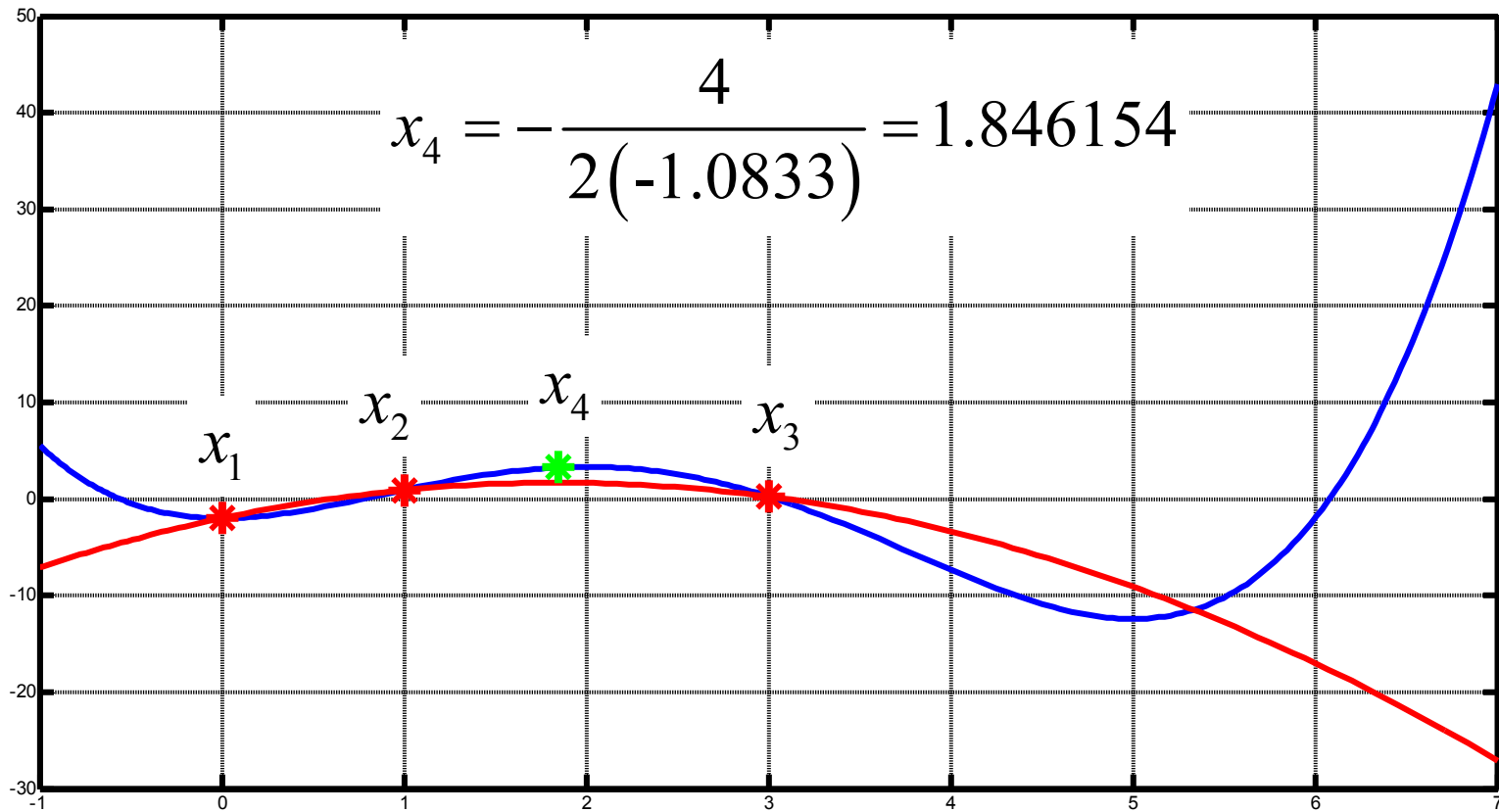
$$y = -1.0833x^2 + 4x - 2$$



¿Cómo encontrar el extremo de la parábola?

$$y = ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad y' = 2ax + b \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y' = 0$$

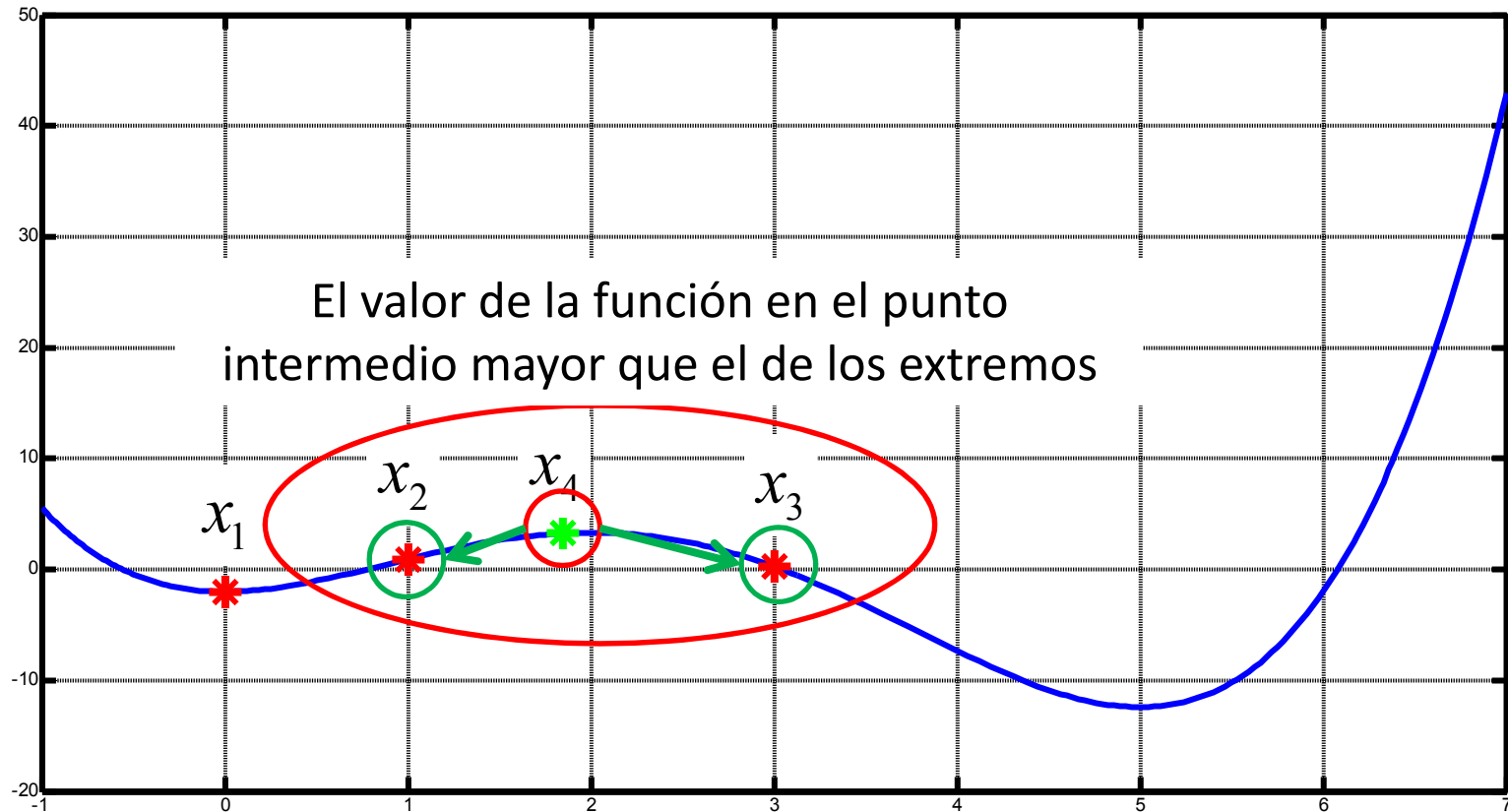
El nuevo punto corresponde al extremo de la parábola:



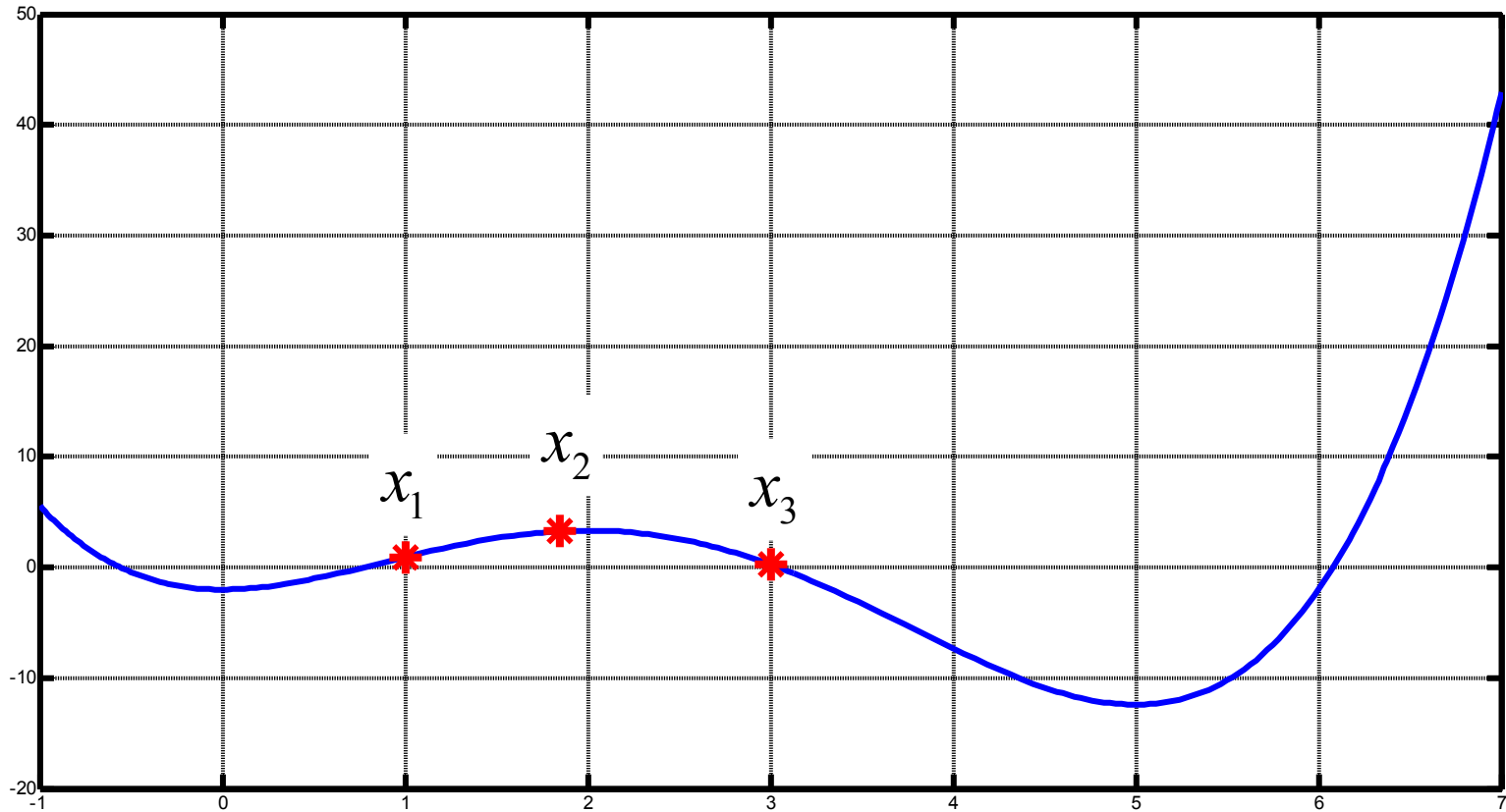
¿Cómo elijo los nuevos puntos?

Debemos quedarnos con el nuevo punto y dos de los anteriores.

¿Cuáles son los nuevo tres puntos?



Nuevo intervalo:



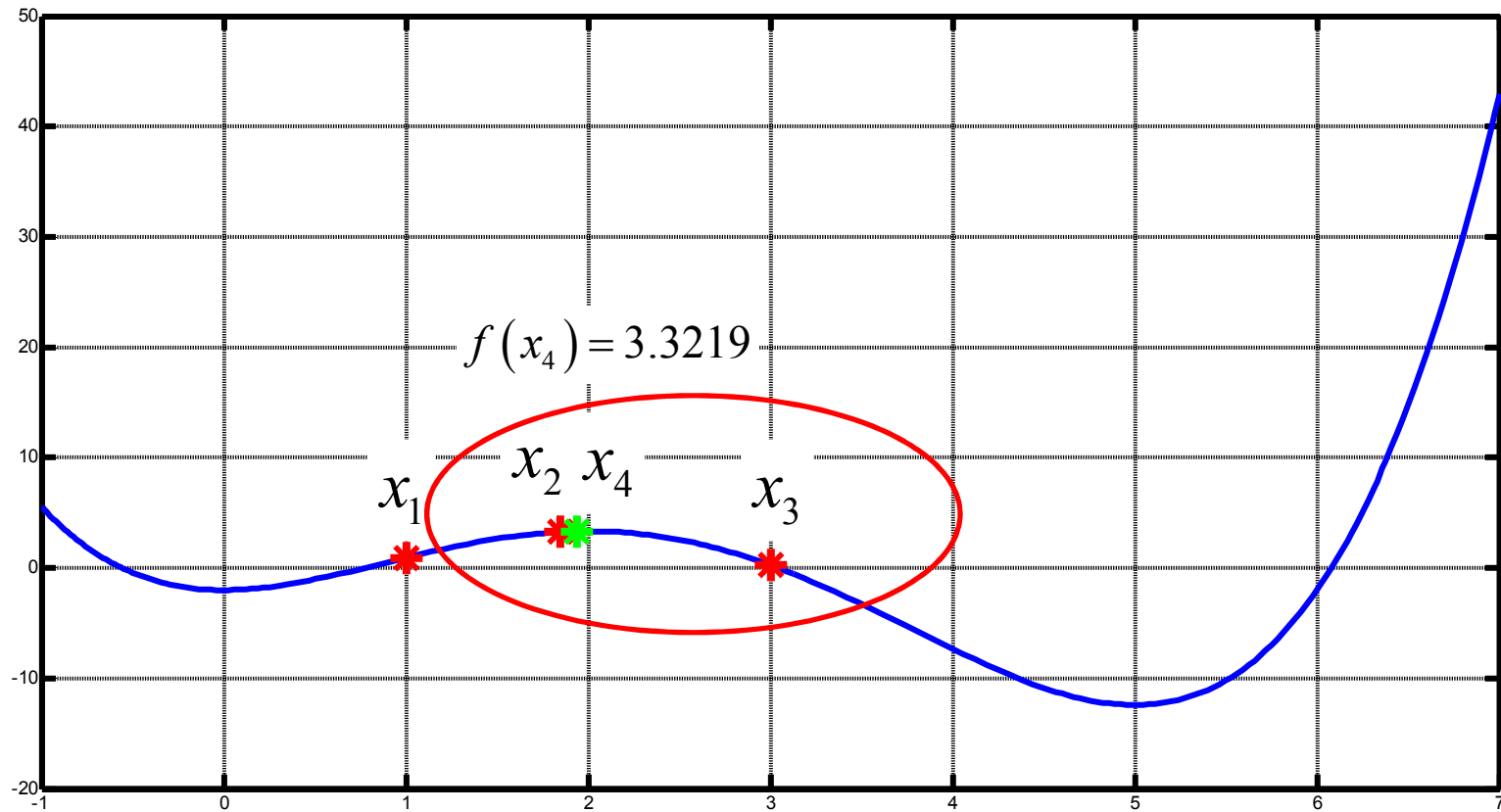
$$\begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 1.8461^2 & 1.8461 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9167 \\ 3.2636 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$a = -2.6928$$

$$b = 10.4378$$

$$c = -6.8284$$

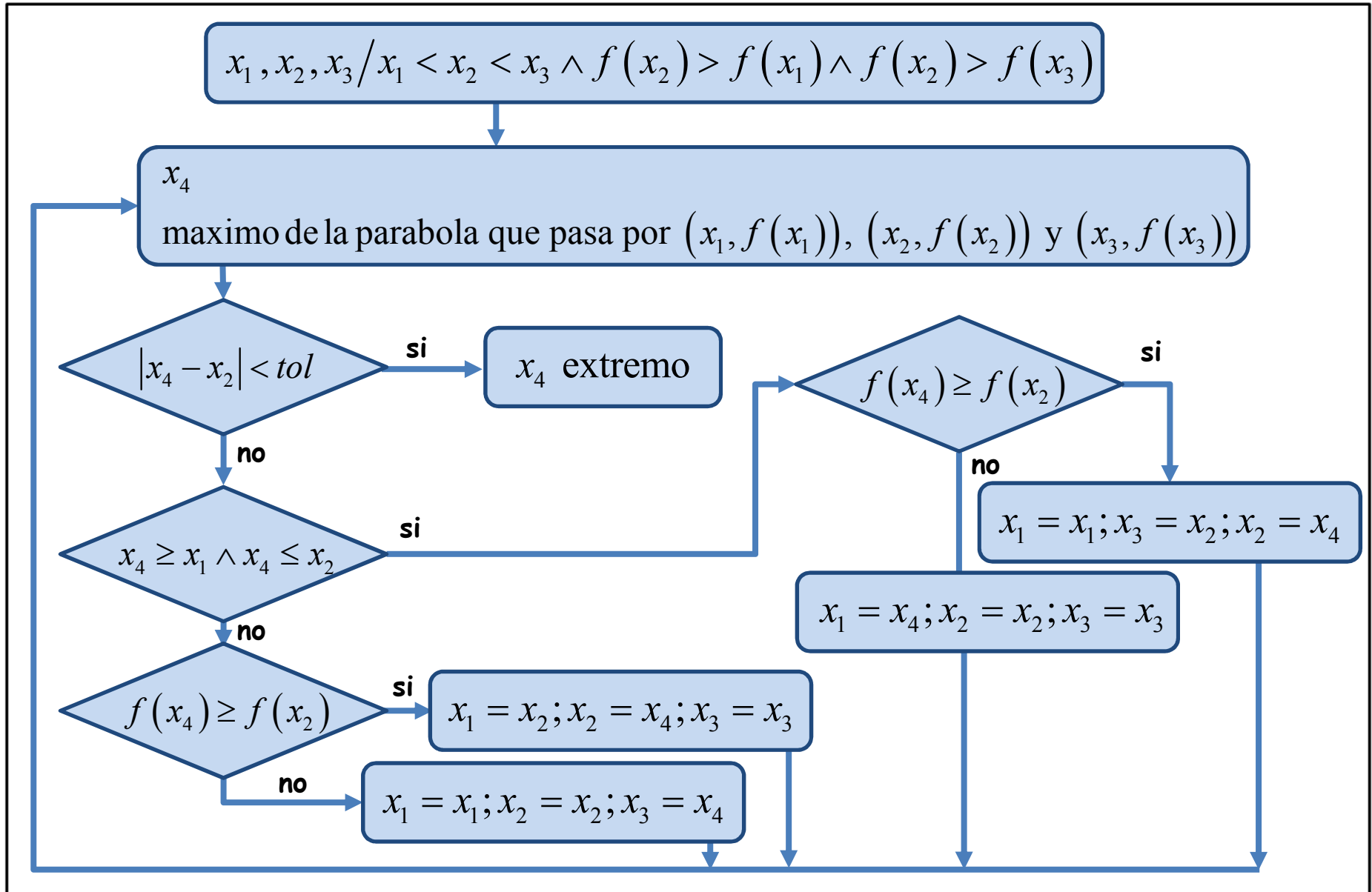
$$x_4 = -\frac{10.4378}{2(-2.6928)} = 1.9381$$



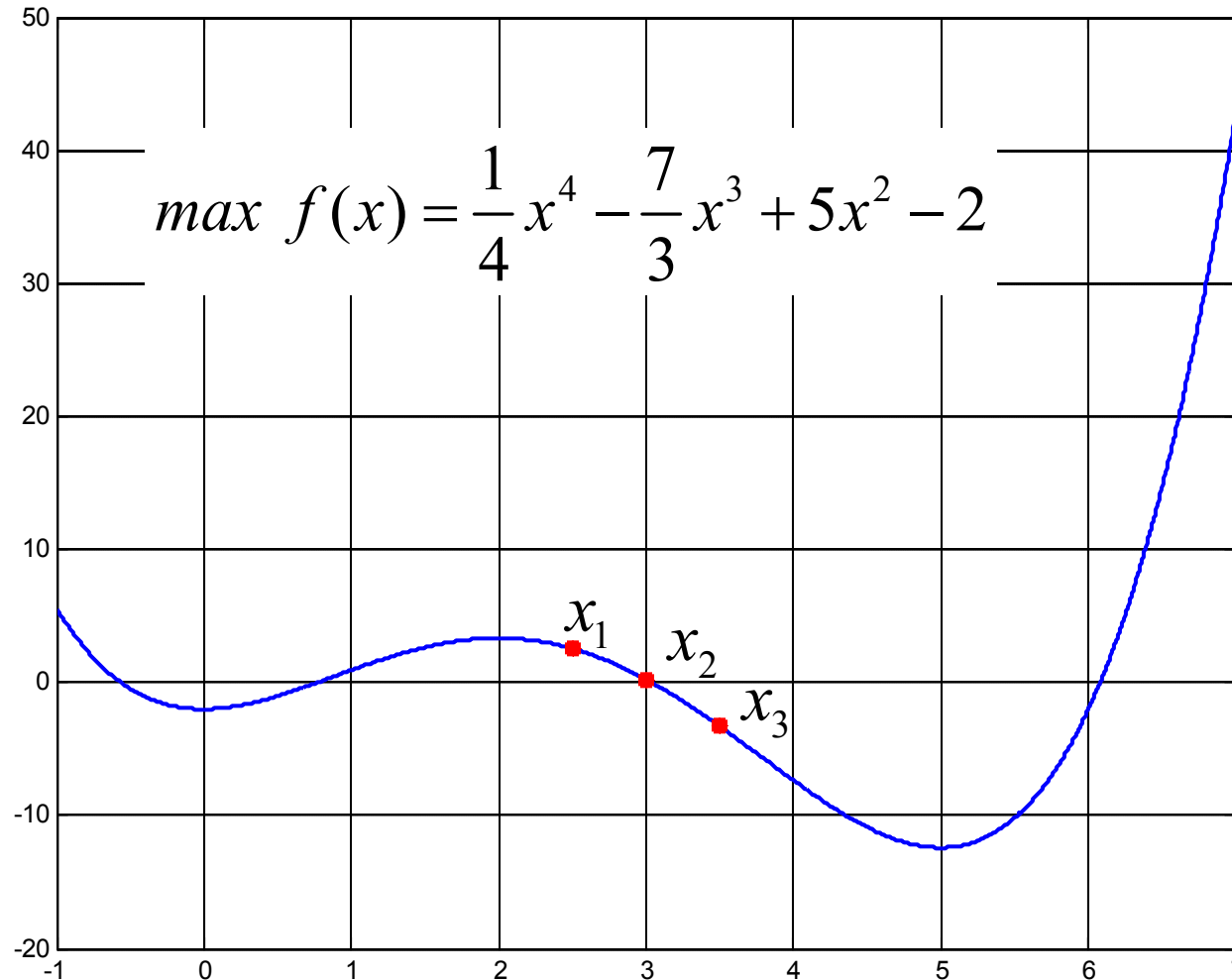
¿Cuál es el criterio de tolerancia?

El nuevo punto encontrado va convergiendo al valor optimo

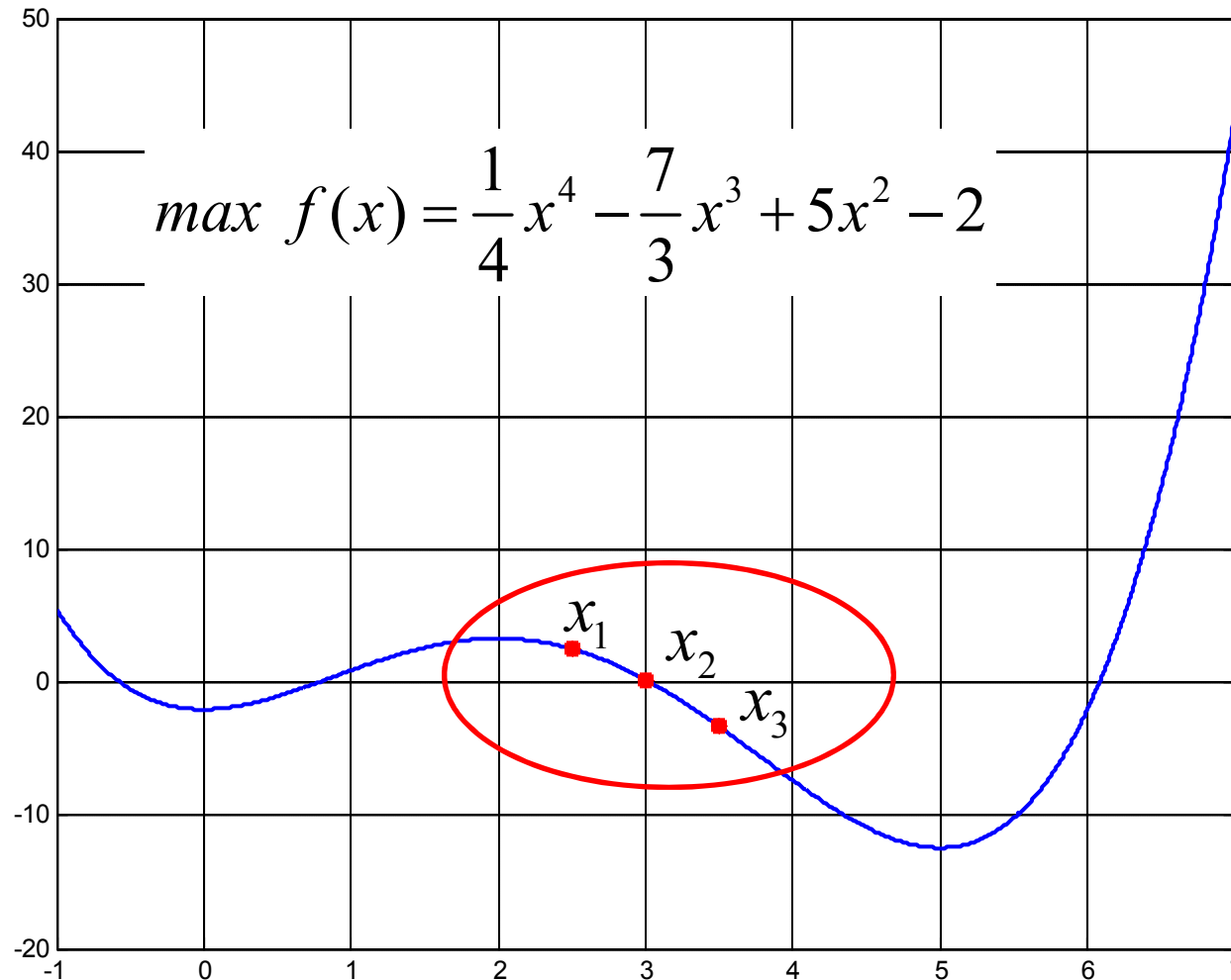
x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
0	-2	1	0.91666667	3	0.25	1.84615385	3.26368124



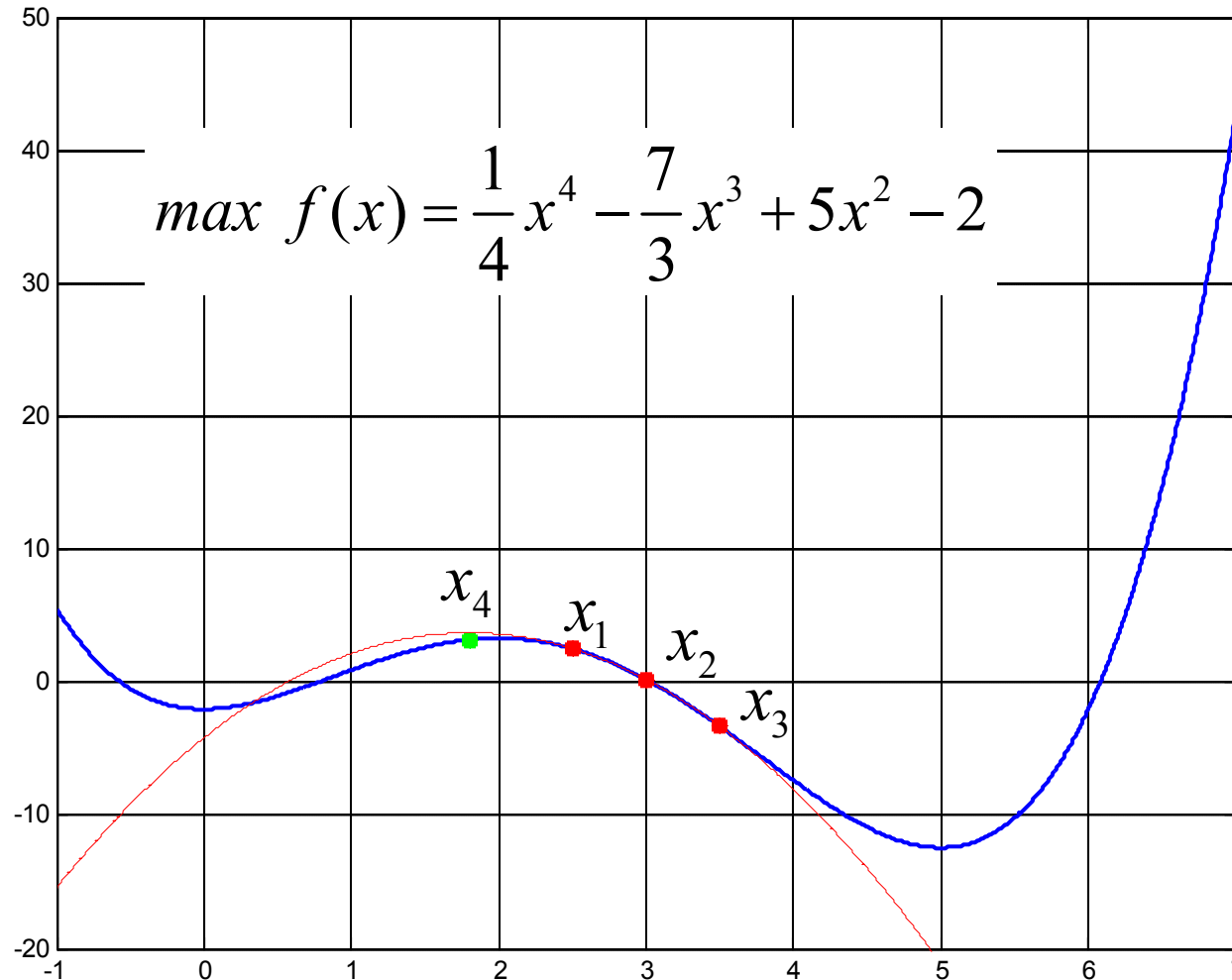
¿Cómo elegir los tres valores de arranque?



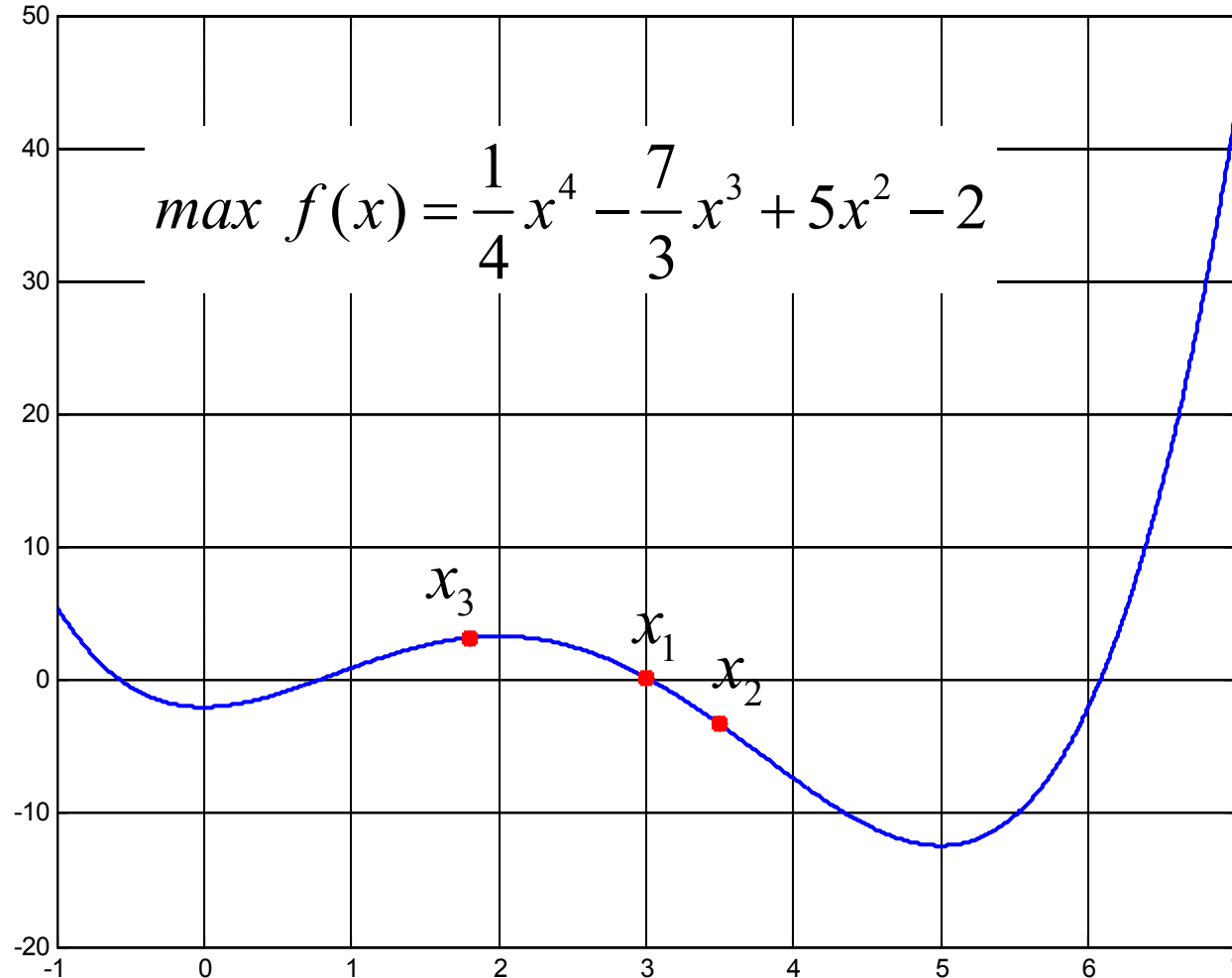
Solo necesitamos tres puntos del dominio



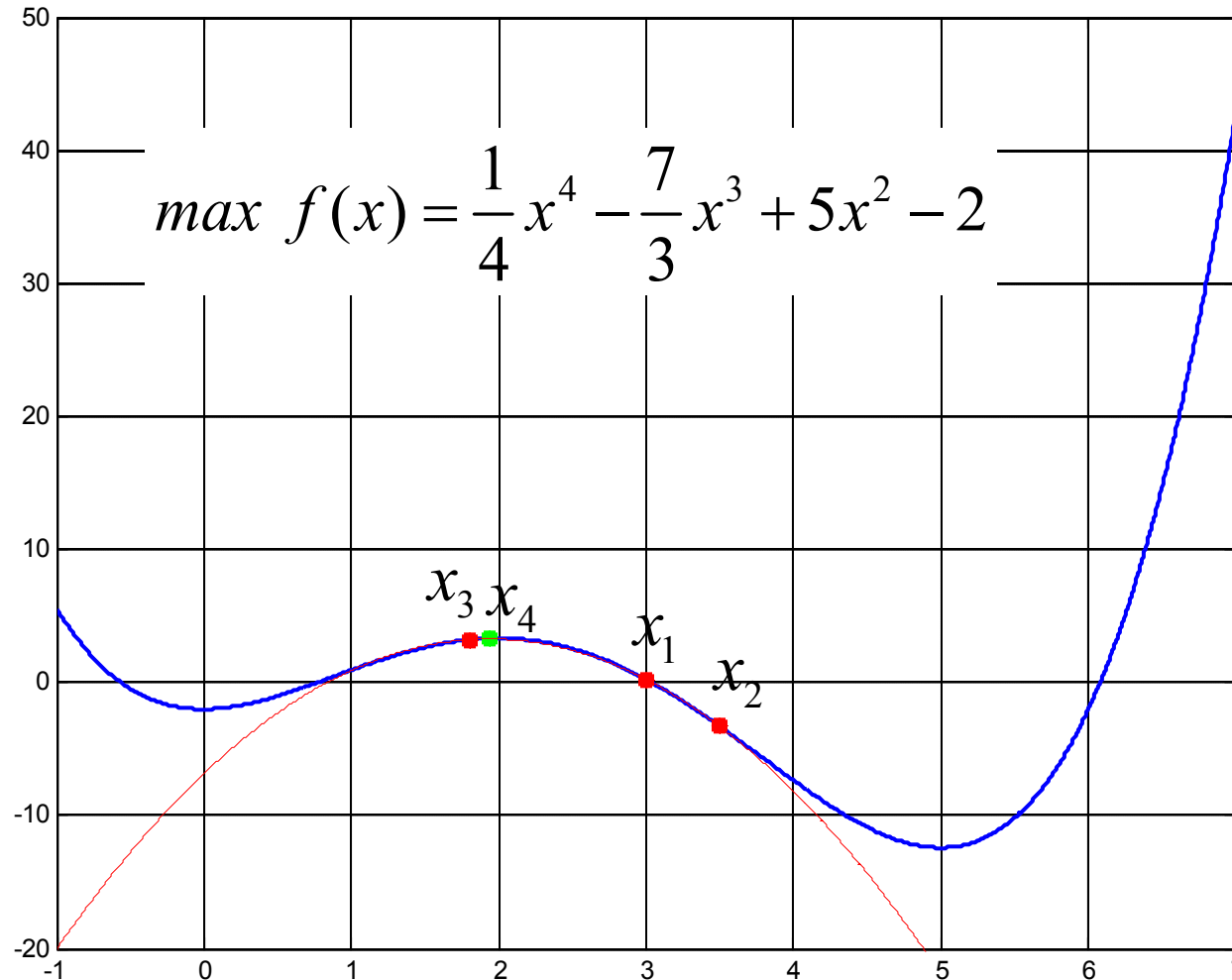
Encontramos la parábola que pasa por los tres puntos. El nuevo punto corresponde al **extremo** de la misma.

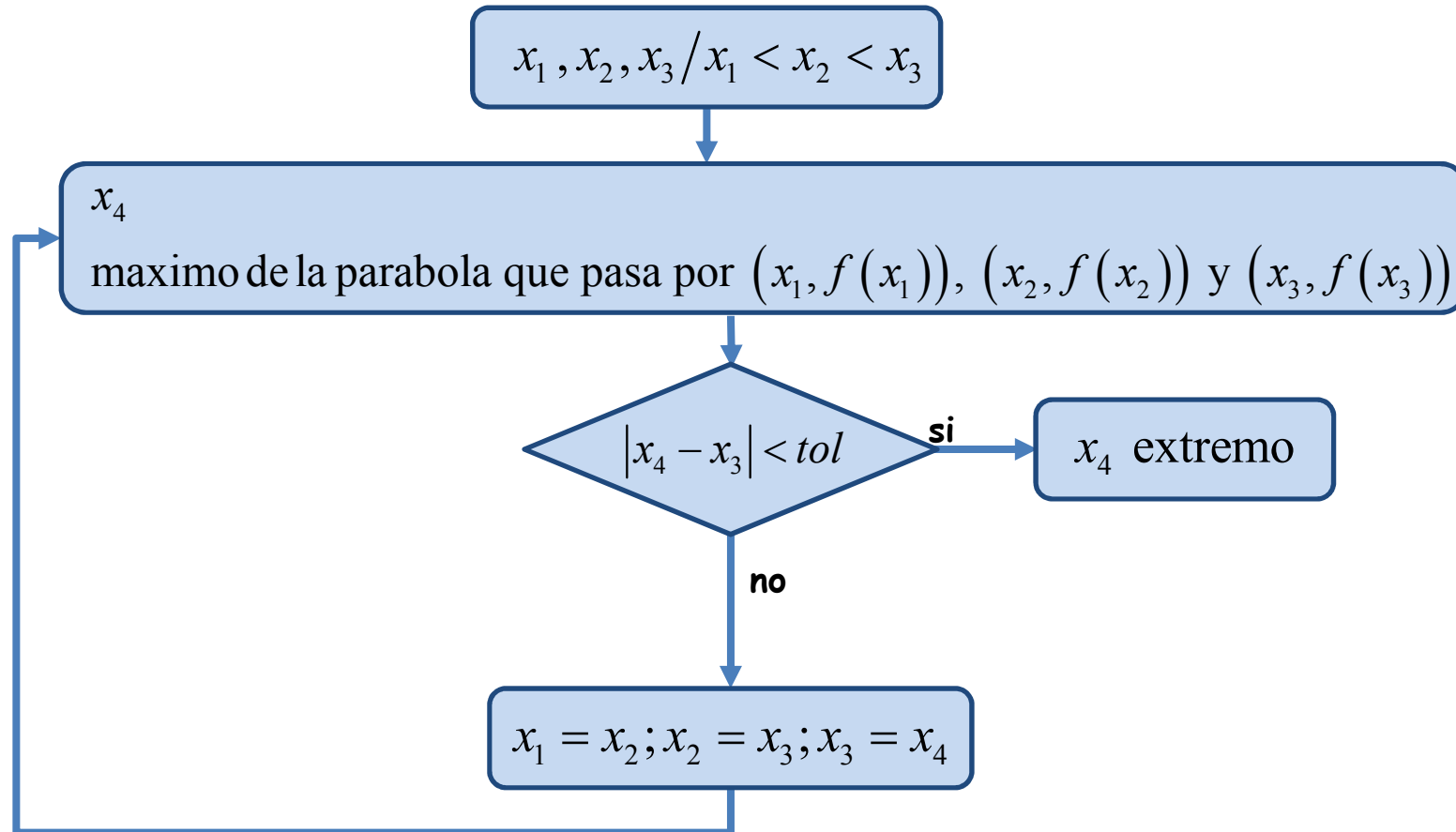


¿Cómo elijo los nuevos puntos?
Nos quedamos con los tres últimos



Continuamos... hasta satisfacer la tolerancia





¿Cuál es la diferencia?

En funciones de un solo máximo (o mínimo) ambos llegan al mismo resultado.

Para funciones con varios extremos:

- La metodología (1) converge a un máximo o mínimo según lo que estemos buscando. Podemos decidir que buscar.
- La metodología (2) puede llevarnos a un extremo que no corresponde al que estamos buscando.

Tip: Existe una formula directa para el calculo del nuevo punto

$$x_4 = \frac{f(x_1)(x_2^2 - x_3^2) + f(x_2)(x_3^2 - x_1^2) + f(x_3)(x_1^2 - x_2^2)}{2f(x_1)(x_2 - x_3) + 2f(x_2)(x_3 - x_1) + 2f(x_3)(x_1 - x_2)}$$

Ejemplo: $\max 2\text{sen}(x) - \frac{x^2}{10}$

x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
0		1		4			

$$x_4 = \frac{f(x_1)(x_2^2 - x_3^2) + f(x_2)(x_3^2 - x_1^2) + f(x_3)(x_1^2 - x_2^2)}{2f(x_1)(x_2 - x_3) + 2f(x_2)(x_3 - x_1) + 2f(x_3)(x_1 - x_2)}$$

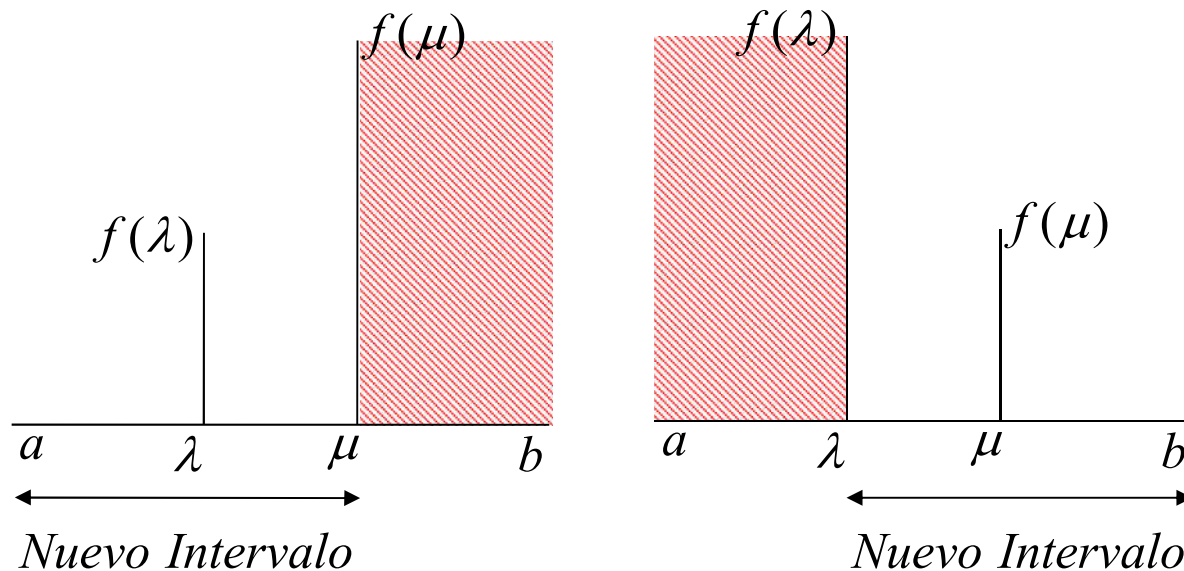
(Minimización)

Sea $\lambda, \mu \in [a, b]$ tal que $\lambda < \mu$

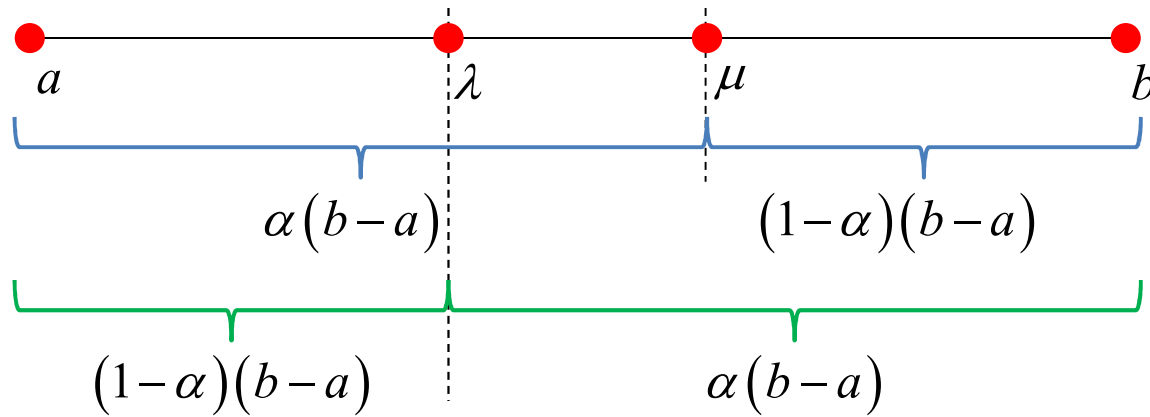
\therefore

Si $f(\lambda) < f(\mu)$, luego $f(x) \geq f(\lambda) \quad \forall x \in (\mu, b]$

Si $f(\lambda) \geq f(\mu)$, luego $f(x) \geq f(\mu) \quad \forall x \in [a, \lambda)$



Expresamos a λ y μ como una fracción α del intervalo $[a,b]$:



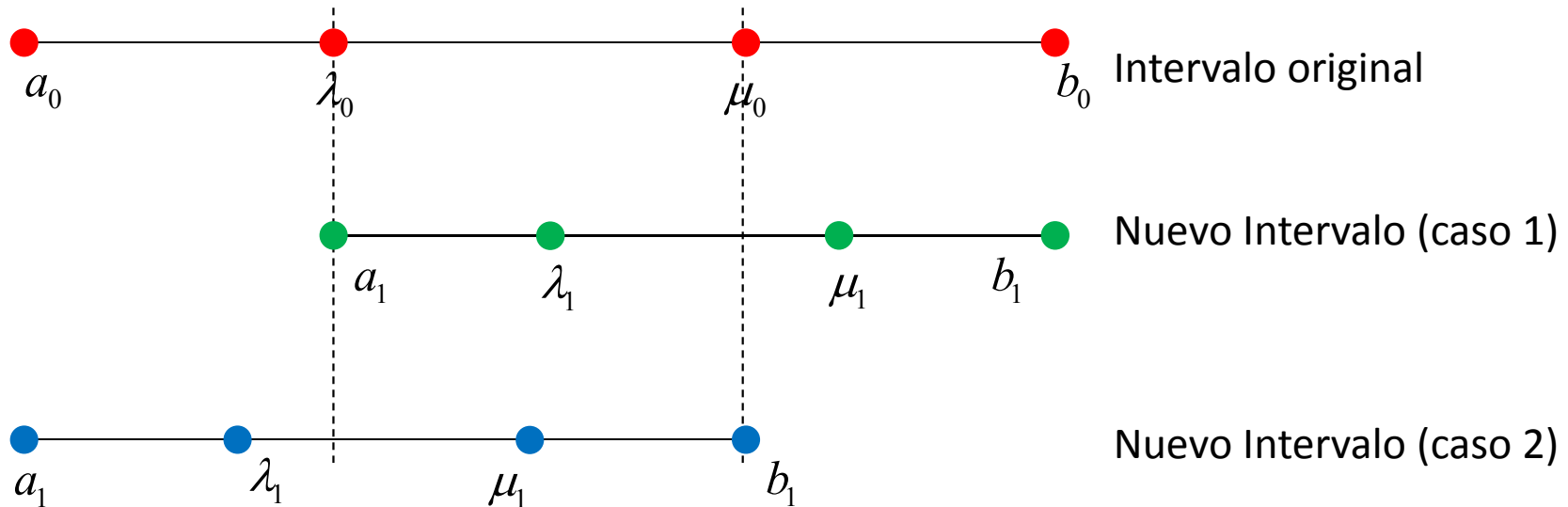
Analizando la grafica anterior encontramos las siguientes expresiones de λ y μ :

$$\lambda = b - \alpha(b - a)$$

$$\mu = a + \alpha(b - a)$$

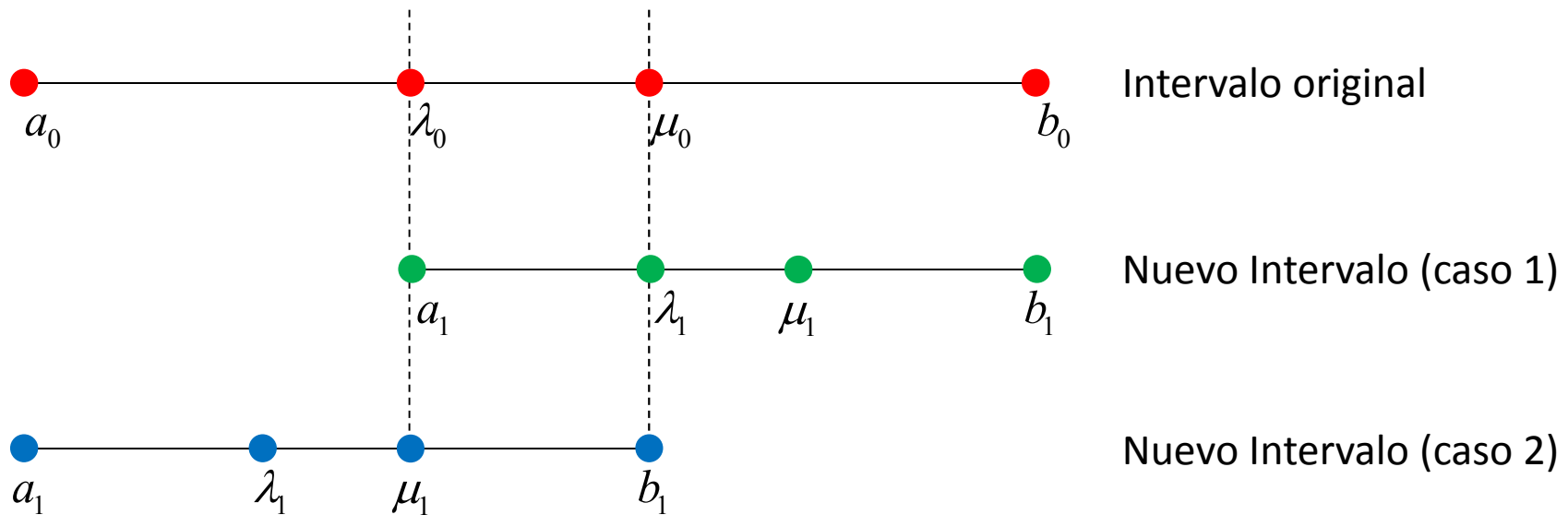
¿ α ?

Valor aleatorio: $\alpha=0.7$:



En cada iteración debemos calcular λ y μ

Buscamos α de manera que se cumpla lo siguiente:

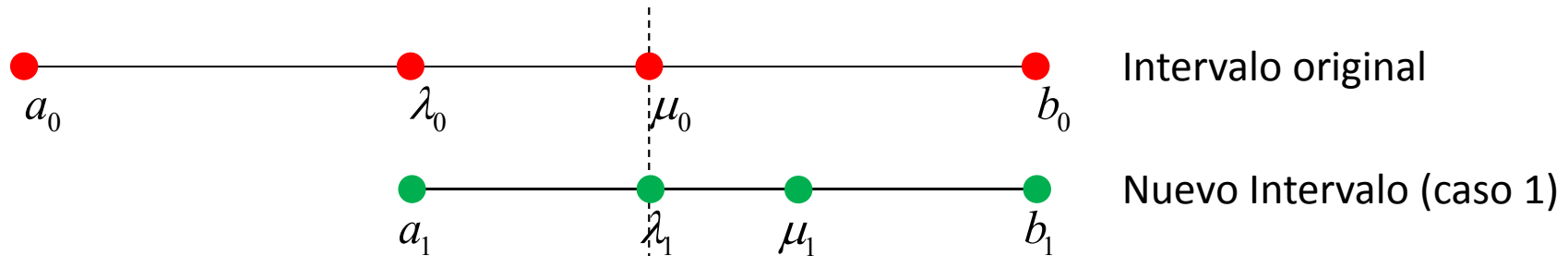


Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$

Caso 2: $\mu_1 = \lambda_0$

En cada iteración solo debemos calcular λ o μ

Caso 1: $\lambda_1 = \mu_0$



$$\mu_0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)$$

$$\lambda_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$

$$\longrightarrow a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$

De la grafica:

$$b_1 = b_0$$

$$a_1 = \lambda_0 = b_0 - \alpha(b_0 - a_0)$$

Reemplazando:

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha(b_0 - (b_0 - \alpha(b_0 - a_0)))$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha(b_0 - b_0 + \alpha(b_0 - a_0))$$

$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha^2(b_0 - a_0)$$

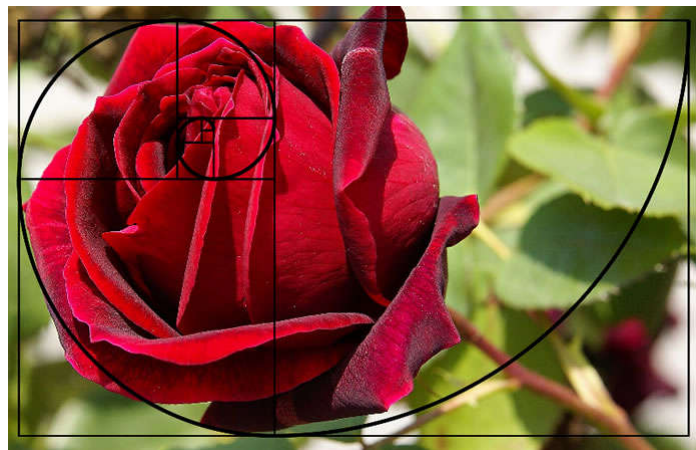
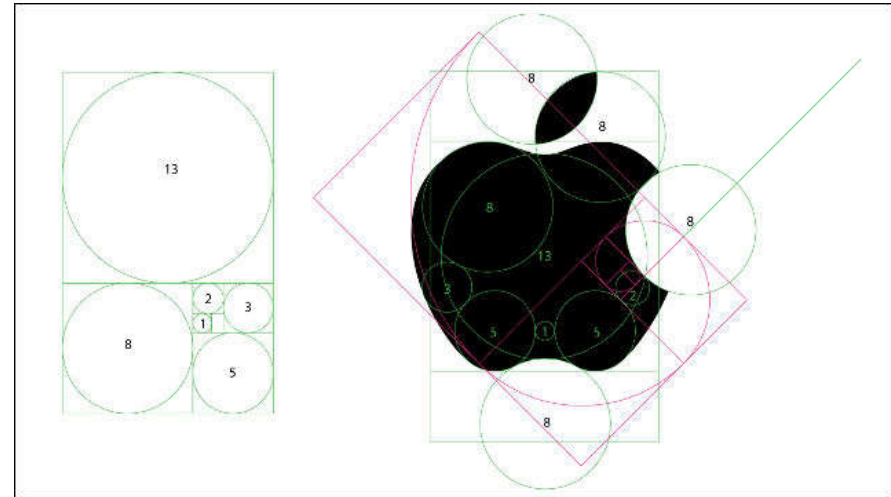
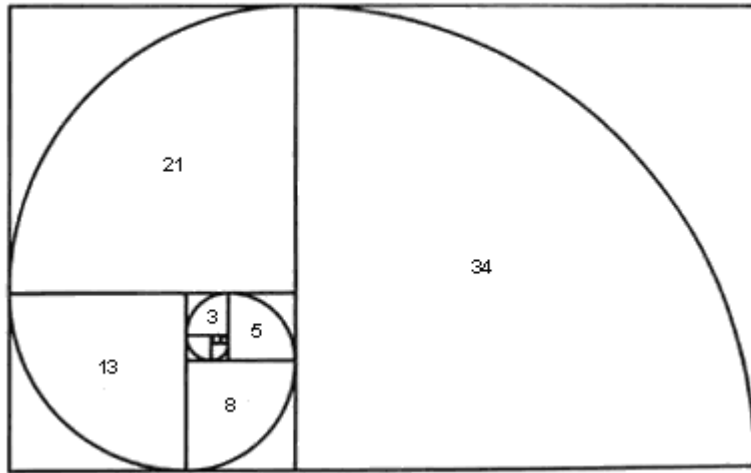
$$a_0 + \alpha(b_0 - a_0) = b_0 - \alpha^2(b_0 - a_0)$$

$$\alpha^2 \cancel{(b_0 - a_0)} + \alpha \cancel{(b_0 - a_0)} - \cancel{(b_0 - a_0)} = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \begin{cases} \alpha_1 \cong 0.618 \\ \alpha_2 \cong -1.618 \end{cases}$$

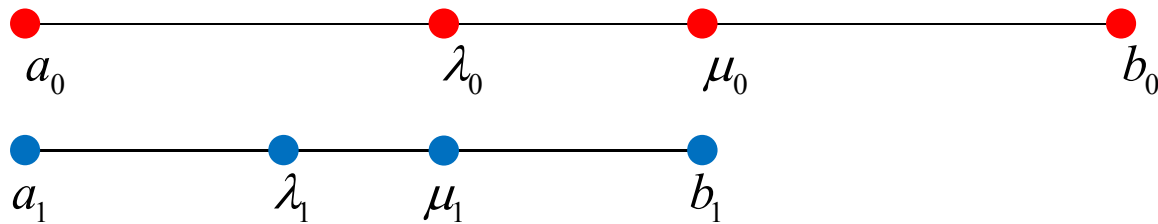
¡Encontramos el α !

Analizando el Caso 2 se llega a la misma conclusión



(Minimización)

Si $f(\lambda) < f(\mu)$

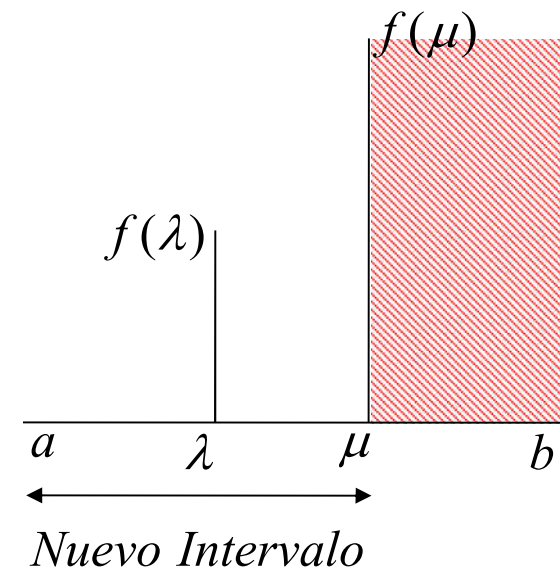


$$a_1 = a_0$$

$$b_1 = \mu_0$$

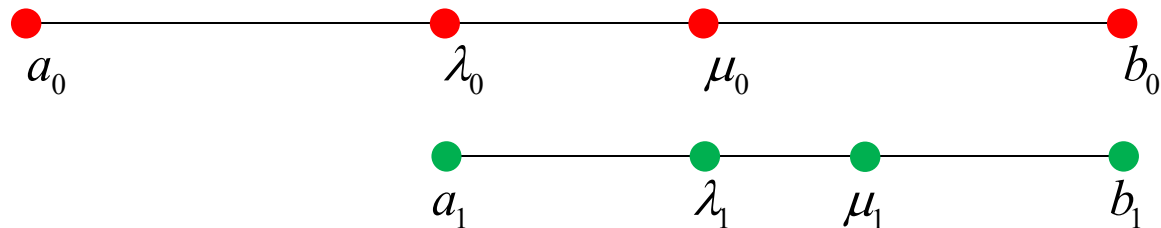
$$\mu_1 = \lambda_0$$

$$\lambda_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$$



(Minimización)

Si $f(\lambda) \geq f(\mu)$

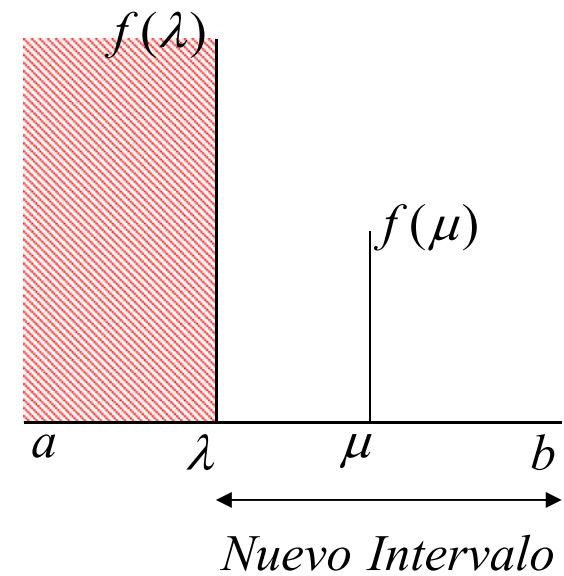


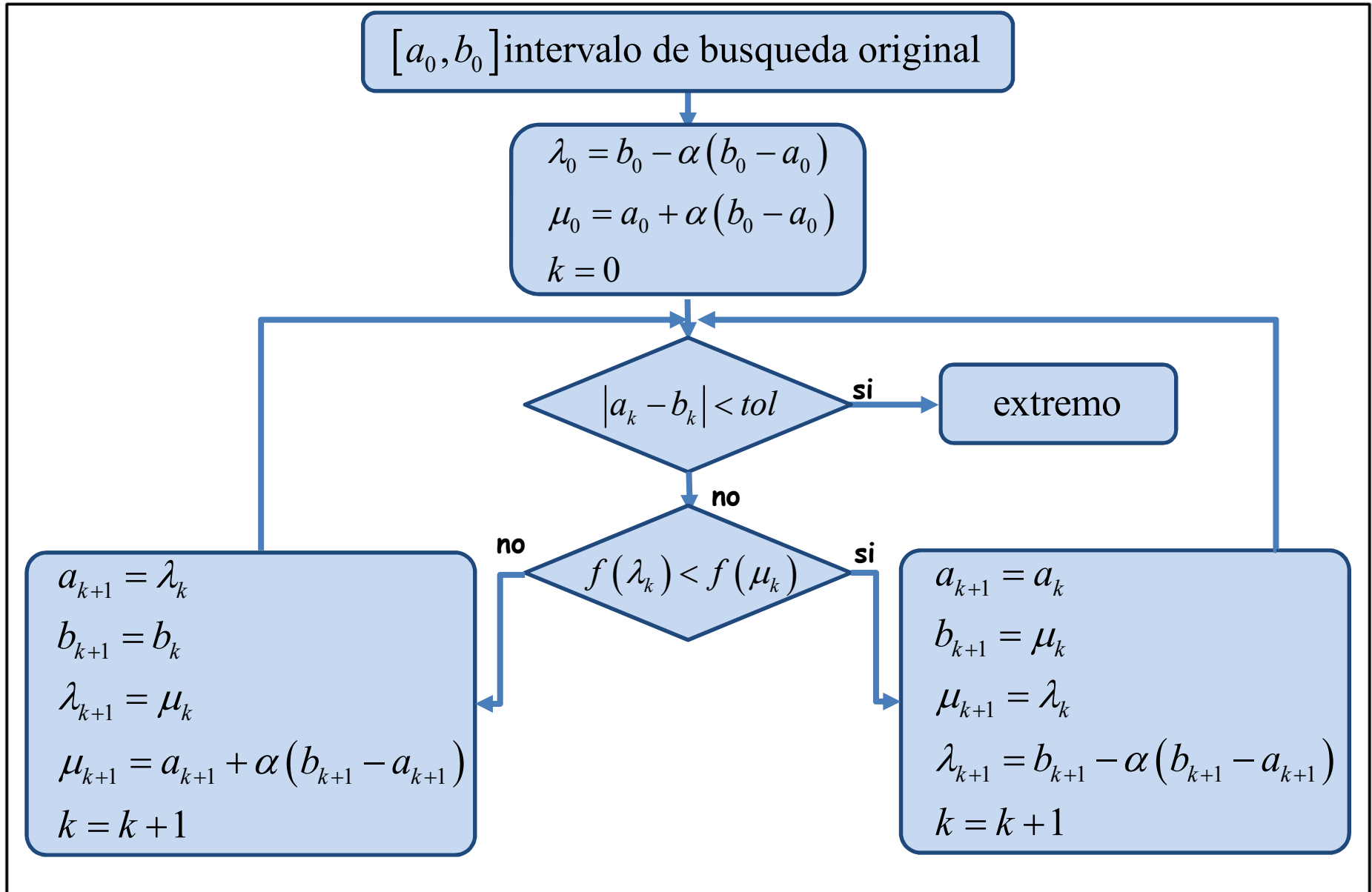
$$a_1 = \lambda_0$$

$$b_1 = b_0$$

$$\lambda_1 = \mu_0$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$$





Plantear Caso de Maximización