Unidad 2: Descomposición LU

Prof.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

J.T.P.: Ing. Amalia Rueda

Descomposición LU

Se llama factorización LU (o LU) de A a la descomposición de A en tres matrices P; L; U que cumplen las siguientes condiciones:

$$PA = LU$$

Donde:
U es una matriz triangular superior con elementos diagonales no nulos
L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales iguales a 1
P es una matriz de permutaciones.

Otra propiedad de interés: $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$

Descomposición PLU

A =

16	12	19	19
18	1	19	9
2	5	3	16
18	10	19	2

```
>> [L U P]=lu(A)
```

P =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L =

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8889 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0.8100 & 1.0000 & 0 \\ 0.1111 & 0.4400 & 0.0234 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

U =

$$\begin{pmatrix} 18.0000 & 1.0000 & 19.0000 & 9.0000 \\ 0 & 11.1111 & 2.1111 & 11.0000 \\ 0 & 0 & -1.7100 & -15.9100 \\ 0 & 0 & 0 & 10.5322 \end{pmatrix}$$

Descomposición PLU

Aplicación en Sistema de ecuaciones

Sea el sistema: $$Ax = b$$

Realizamos la descomposición PLU de A $\Longrightarrow$ $$PA = LU$$

¿?

Luego:

$$A = P^{'}LU$$

Finalmente reemplazamos en el sistema Original

$$P^{'}LUx = b$$

Descomposición PLU

Nuestro nuevo sistema a resolver es

$$P' L U x = b$$

Para resolverlo definimos los siguientes nuevos vectores

$$LUx = Pb \Rightarrow L\underbrace{(Ux)}_{y} = \underbrace{(Pb)}_{z}$$

$$z = Pb$$

Conozco P y conozco b por lo que calculo z de manera directa

$$\boxed{Ly = z \qquad Ux = y}$$

Debemos resolver estos dos sistemas de ecuaciones

Descomposición PLU

¿Cuál es la ventaja si ahora debo resolver dos sistemas en vez de uno?

Lo vemos con un ejemplo:

A =

16	12	19	19
18	1	19	9
2	5	3	16
18	10	19	2

b =

4
9
7
9

```
>> [L U P]=lu(A)
```

P =

0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0

L =

1.0000	0	0	0
0.8889	1.0000	0	0
1.0000	0.8100	1.0000	0
0.1111	0.4400	0.0234	1.0000

U =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000
0	0	-1.7100	-15.9100
0	0	0	10.5322

Descomposición PLU

Primer paso: $z = Pb$

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & 4 \\
 & & & & 9 \\
 & & & & 7 \\
 & & & & 9 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 7
\end{array}
$$

Segundo Paso: $Ly = z$

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & y_1 \\
 & & & & y_2 \\
 & & & & y_3 \\
 & & & & y_4 \\
\hline
1.0000 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
0.8889 & 1.0000 & 0 & 0 & 4 \\
1.0000 & 0.8100 & 1.0000 & 0 & 9 \\
0.1111 & 0.4400 & 0.0234 & 1.0000 & 7
\end{array}
$$

¿Qué ventaja tiene este sistema de ecuaciones?

$$Ly = z$$

y_1	y_2	y_3	y_4	
1.0000	0	0	0	9
0.8889	1.0000	0	0	4
1.0000	0.8100	1.0000	0	9
0.1111	0.4400	0.0234	1.0000	7

¡Fácil resolución!
Aplicamos el método de sustitución hacia delante

Descomposición PLU

Lo resolvemos y obtenemos: y =

9.0000
-4.0000
3.2400
7.6842

Ultimo Paso: $$Ux = y$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 18.0000 & 1.0000 & 19.0000 & 9.0000 \\ 0 & 11.1111 & 2.1111 & 11.0000 \\ 0 & 0 & -1.7100 & -15.9100 \\ 0 & 0 & 0 & 10.5322 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 9.0000 \\ -4.0000 \\ 3.2400 \\ 7.6842 \end{array}\right]$$

¿Qué ventaja tiene este sistema de ecuaciones?

$$Ux = y$$

				x_1 x_2 x_3 x_4
18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	0	-1.7100	-15.9100	3.2400
0	0	0	10.5322	7.6842

¡Fácil resolución!

Aplicamos el método de sustitución hacia atrás

Finalmente:

```
x =

    9.2690
    0.5675
   -8.6830
    0.7296
```

Descomposición PLU

Resumen:

$$Ax = b$$

```
>> [L U P]=lu(A)
```

$$P^{'}LUx = b$$ Nuevo sistema equivalente

$$z = Pb \longrightarrow Ly = z \longrightarrow Ux = y$$

Calculo directo de ***z***

Obtenemos ***y*** por sustitución hacia delante

Obtenemos ***x*** por sustitución hacia atrás

Algunas cuestiones para discutir…

Recordamos la eliminación Gaussiana:

A =

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 19 & 19 \\ 18 & 1 & 19 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 16 \\ 18 & 10 & 19 & 2 \end{bmatrix}$$

b =

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ C =

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 19 & 19 & 4 \\ \boxed{18} & 1 & 19 & 9 & 9 \\ \boxed{2} & 5 & 3 & 16 & 7 \\ \boxed{18} & 10 & 19 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 18 & 1 & 19 & 9 & 9 \end{array}$$

$$- \frac{18}{\boxed{16}} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 16 & 12 & 19 & 19 & 4 \end{array}}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 0 & -12.5000 & -2.3750 & -12.3750 & 4.5000 \end{array}$$

La técnica de ***pivoteo parcial*** consiste en ubicar en la fila pivote el termino de mayor magnitud de tal forma que al realizar la división por dicho termino no se incurre en la violación de división por números cercanos a cero ni la división por cero.

Entonces debemos cambiar de lugar las filas

```
C =

    16    12    19    19     4
    18     1    19     9     9
     2     5     3    16     7
    18    10    19     2     9
```

```
C =

    18     1    19     9     9
    16    12    19    19     4
     2     5     3    16     7
    18    10    19     2     9
```

Ahora si eliminamos la primera columna:

```
C =

   18.0000    1.0000   19.0000    9.0000    9.0000
         0   11.1111    2.1111   11.0000   -4.0000
         0    4.8889    0.8889   15.0000    6.0000
         0    9.0000         0   -7.0000         0
```

Descomposición PLU

C =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	4.8889	0.8889	15.0000	6.0000
0	9.0000	0	-7.0000	0

¿hace falta cambiar el pivote?

No, procedemos con la eliminación

C =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	0	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0	-1.7100	-15.9100	3.2400

```
C =

   18.0000    1.0000   19.0000    9.0000    9.0000
         0   11.1111    2.1111   11.0000   -4.0000
         0         0   -0.0400   10.1600    7.7600
         0         0   -1.7100  -15.9100    3.2400
```

¿hace falta cambiar el pivote?

Si!

```
C =

   18.0000    1.0000   19.0000    9.0000    9.0000
         0   11.1111    2.1111   11.0000   -4.0000
         0         0   -1.7100  -15.9100    3.2400
         0         0   -0.0400   10.1600    7.7600
```

```
C =

   18.0000    1.0000   19.0000    9.0000    9.0000
         0   11.1111    2.1111   11.0000   -4.0000
         0         0   -1.7100  -15.9100    3.2400
         0         0   -0.0400   10.1600    7.7600
```

Completamos la eliminación

```
C =

   18.0000    1.0000   19.0000    9.0000    9.0000
         0   11.1111    2.1111   11.0000   -4.0000
         0         0   -1.7100  -15.9100    3.2400
         0         0         0   10.5322    7.6842
```

Resumen:

Primero cambiamos la fila 1 por la 2

C =

16	12	19	19	4
18	1	19	9	9
2	5	3	16	7
18	10	19	2	9

C =

18	1	19	9	9
16	12	19	19	4
2	5	3	16	7
18	10	19	2	9

Luego cambiamos la fila 3 por la 4

C =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	0	-0.0400	10.1600	7.7600
0	0	-1.7100	-15.9100	3.2400

C =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	0	-1.7100	-15.9100	3.2400
0	0	-0.0400	10.1600	7.7600

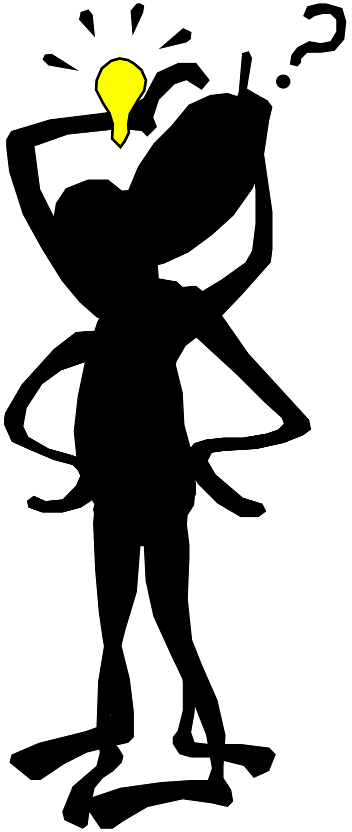
Descomposición PLU

Fila 1 por la 2

Fila 3 por la 4

```
P =

     0     1     0     0
     1     0     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
```



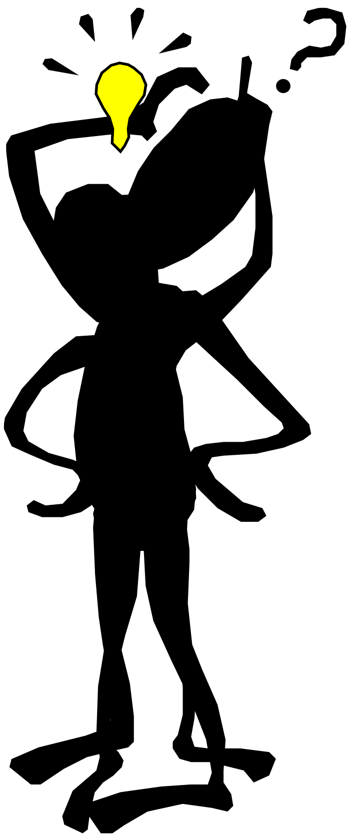
Descomposición PLU

C =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	0	-1.7100	-15.9100	3.2400
0	0	0	10.5322	7.6842

U =

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000
0	0	-1.7100	-15.9100
0	0	0	10.5322



Descomposición PLU

L =

1.0000	0	0	0
0.8889	1.0000	0	0
1.0000	0.8100	1.0000	0
0.1111	0.4400	0.0234	1.0000

¡Almacena los multiplicadores de la eliminación gaussiana!

1era eliminación:

18	1	19	9	9
16	12	19	19	4
2	5	3	16	7
18	10	19	2	9

2da eliminación:

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	4.8889	0.8889	15.0000	6.0000
0	9.0000	0	-7.0000	0

3ra eliminación:

18.0000	1.0000	19.0000	9.0000	9.0000
0	11.1111	2.1111	11.0000	-4.0000
0	0	-1.7100	-15.9100	3.2400
0	0	-0.0400	10.1600	7.7600

Descomposición PLU

Ventajas:

✓La descomposición PLU realiza internamente el proceso de pivoteo parcial

✓La resolución del sistema es simple, solo requiere sustitución hacia delante y hacia atrás

Descomposición PLU

Si con la eliminación Gaussiana también resuelvo aplicando sustitución. ¿En donde está la ventaja?

Descomposición PLU

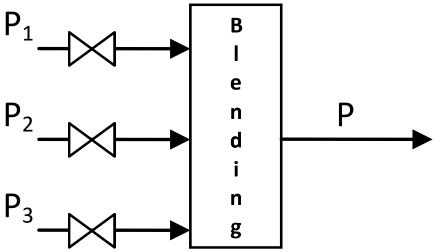
✓La eliminación gaussiana con pivoteo se le realiza a la matriz ampliada y la descomposición PLU solo a la matriz de coeficientes.

✓Si tenemos que resolver una sola vez el sistema no hay ventajas.

✓Pero si debemos resolver un mismo sistema varias veces con distintos términos independientes aquí la descomposición PLU se realiza una única vez y la EG se le debe realizar a cada nueva matriz ampliada.

Ejercicio

Ejercicio 1: Contamos con tres corrientes provenientes de diferentes líneas de producción y deseamos mezclarlas para obtener un único producto que cumpla con las especificaciones requeridas.



La descarga (P) debe tener un flujo másico de 32 kg/h, 84 kg/h y 34 kg/h de componentes A, B y C respectivamente.

Según análisis realizados, la composición (fracción de masa) de cada corriente que ingresa es:

$A^{P1} = 0.2$	$B^{P1} = 0.6$	$C^{P1} = 0.2$
$A^{P2} = 0.4$	$B^{P2} = 0.6$	$C^{P2} = 0$
$A^{P3} = 0.1$	$B^{P3} = 0.5$	$C^{P3} = 0.4$

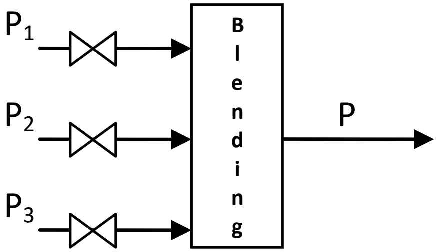
Deseamos conocer que cantidad de cada corriente debe ingresar al equipo para obtener el producto deseado.

Solución

$A^{P1} = 0.2$ $B^{P1} = 0.6$ $C^{P1} = 0.2$

$A^{P2} = 0.4$ $B^{P2} = 0.6$ $C^{P2} = 0$

$A^{P3} = 0.1$ $B^{P3} = 0.5$ $C^{P3} = 0.4$



$$0.2P_1 + 0.4P_2 + 0.1P_3 = 32$$

$$0.6P_1 + 0.6P_2 + 0.5P_3 = 84$$

$$0.2P_1 + 0P_2 + 0.4P_3 = 34$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 84 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Descomposición PLU

$$Ax = b$$

```
>> [L U P]=lu(A)
```

$$P^{'} LUx = b$$ Nuevo sistema equivalente

$$z = Pb$$

Calculo directo de ***z***

$$Ly = z$$

Obtenemos ***y*** por sustitución hacia delante

$$Ux = y$$

Obtenemos ***x*** por sustitución hacia atrás

Ejercicio 2:

Las descarga (P) ahora debe tener un flujo másico de 30 kg/h, 80 kg/h y 36 kg/h de componentes A, B y C respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 80 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

Las descarga (P) ahora debe tener un flujo másico de 30 kg/h, 80 kg/h y 36 kg/h de componentes A, B y C respectivamente.

Ejemplo: Matriz Inversa con descomposición LU

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡Sistema de ecuaciones con la primera columna de la matriz identidad!

La solución de este sistema nos permite obtener la primera columna de la matriz inversa. Posteriormente se continua con el resto de las columnas.

¿Y la ventaja?

¡LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES SIEMPRE LA MISMA!