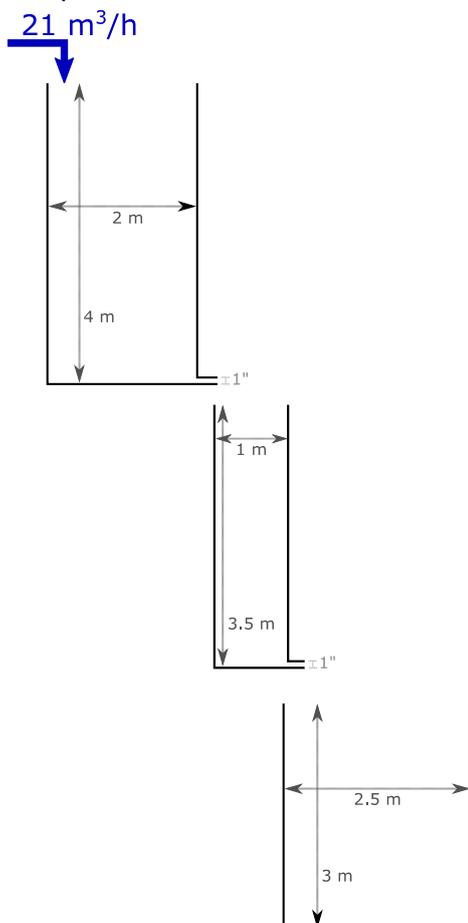


## Modelado de un sistema dinámico mediante EDOs

### Modelado del sistema

Un sector de una planta de tratamiento de agua cuenta con tres tanques cilíndricos por los cuales circula agua. Al comienzo de la operación el sistema se alimenta desde el tanque superior con un caudal de 21 m<sup>3</sup>/h de agua. Los tanques superiores tienen un orificio de descarga de 1" que permite alimentar los tanques inferiores.



Realizando un balance de masa sobre un tanque en estado dinámico se tiene:

$$\textit{Acumulación} = \textit{Masa que entra} - \textit{Masa que sale}$$

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

Donde  $m_e$  y  $m_s$  son los caudales másicos de entrada y salida del tanque respectivamente y  $\frac{dM}{dt}$  es la velocidad de acumulación de masa dentro del tanque.

Reemplazando los caudales másicos por el caudal volumétrico  $Q$  por la densidad del líquido  $\rho$  se obtiene  $m = Q\rho$ . Reemplazando en el balance y considerando que la densidad no varía con el tiempo:

$$\frac{dV}{dt} \rho = Q_e \rho - Q_s \rho$$

Considerando que la densidad se mantiene constante puede simplificarse y se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s$$

Reemplazando el volumen V por el volumen de un cilindro  $V = A_t h$  donde  $A_t$  es el área transversal del tanque y h la altura del líquido en el tanque. Reemplazando en el balance:

$$A_t \frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s \quad (\text{Ec. 1})$$

El caudal Q dependerá si proviene de una bomba o si proviene de otro tanque:

Caudal proveniente de una bomba	$Q = cte$
Caudal proveniente de otro tanque de sección transversal $A_s$ y altura de líquido h	$Q = A_s \sqrt{2gh}$

### Aplicación al problema

Realice el modelado de cada tanque utilizando la Ecuación 1 (Ec. 1) y el caudal Q de entrada y de salida correspondiente dependiendo del tanque. Considere una alimentación fresca de 21 m<sup>3</sup>/h y que los tanques se encuentran vacíos al iniciar.

- Muestre en un mismo gráfico la evolución en el tiempo de la altura de cada tanque. Incluya también en el gráfico las alturas máximas de los tanques. ¿Cuál de los tres tanques rebalsa primero y en qué instante?
- Analice cuál de los tres tanques rebalsa primero para una alimentación desde 15 m<sup>3</sup>/h hasta 25 m<sup>3</sup>/h con saltos de 1 m<sup>3</sup>/h para completar la tabla que se encuentra debajo.
- Se realiza una modificación en el sistema para que el agua del tercer tanque drene a un reservorio de amplia capacidad. Para esto se habilita una salida de 1" también en el tercer tanque. Encuentre el caudal de alimentación máximo para que ningún tanque rebalse e indique las alturas de cada tanque en este estado estacionario. Grafique la evolución de cada tanque en un mismo gráfico junto con las alturas máximas de cada tanque.

Caudal de alimentación (m <sup>3</sup> /h)	Tanque que rebalsa	Tiempo de rebalse
15		
16		
17		
...		

### Ejercicio opcional

Considere que por un dispositivo de emergencia se activa una salida extra de  $5 \text{ m}^3/\text{h}$  mediante una bomba para cada tanque cuando su altura de líquido es mayor a la mitad de su altura máxima.

Para el sistema del apartado c) grafique la evolución de cada tanque en un mismo gráfico junto con las alturas máximas de cada tanque para un tiempo de 9 horas. Considere una alimentación fresca de  $21 \text{ m}^3/\text{h}$  y que los tanques están vacíos al iniciar.

