Normas de Vectores y de Matrices
Números de Condición

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

- Normas de matrices y números de condición:
  - Sistemas de ecuaciones mal condicionados.
  - Normas de matrices: norma de Frobenius y normas asociadas a una norma vectorial.
  - Números de condición de una matriz.
  - Cálculo del número de condición para la norma Euclídea.
  - Inversas de matrices perturbadas.
- Observaciones:
  - Se va a abordar el problema de la ***estimación de los errores*** introducidos en la resolución numérica de los sistemas de ecuaciones lineales mediante los métodos vistos en el curso.
  - Para poder hacer este estudio son necesarios varios conceptos introducidos en Álgebra, principalmente el concepto de norma de un vector y de valores y vectores propios.
  - Además es necesario introducir el concepto de ***norma de una matriz***, que se basará en la norma de un vector.

Sistemas de Ecuaciones Mal Condicionados (1/2)

- Posibles orígenes de los errores en el resultado de unos cálculos:
  - Errores en el ***modelo*** (por ejemplo, prescindir del rozamiento)
  - Errores en los ***datos*** (por ejemplo, los originados por medidas poco precisas)
  - Errores en el ***algoritmo*** (hay algoritmos estables e inestables)
  - Errores en las ***operaciones aritméticas***: imposibles de evitar en la práctica.
- Errores en las operaciones aritméticas
  - Debidos al ***nº limitado de cifra***s que almacena el ordenador (53 bits ó 15~16 cifras decimales equivalentes en los PCs).
  - Unos problemas son mucho más sensibles que otros (matriz aleatoria o matriz de Hilbert). Se dice que son ***problemas mal condicionados***.
- Problemas mal condicionados:
  - Son aquellos problemas en los que los errores tienden a crecer en una forma incontrolada, potencial o exponencial, superior por tanto a un crecimiento lineal con el número de operaciones aritméticas.
  - La ***condición*** de un problema es la sensibilidad de los resultados a pequeñas variaciones en los datos.
  - Si esta sensibilidad es muy grande, pueden esperarse ***importantes dificultades*** aunque los datos iniciales sean exactos, pues los errores numéricos tenderán a amplificarse.
- En este tema se estudiarán los errores en los ***sistemas de ecuaciones lineales***.

Sistemas de Ecuaciones Mal Condicionados (2/2)

- Ejemplos de pequeño tamaño:
  - Supóngase los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Éste es un problema ***mal condicionado***, porque un pequeño cambio en el término independiente da lugar a un cambio muy grande en la solución. En realidad, la segunda ecuación es muy parecida a la primera,
  - Considérese ahora otro sistema de ecuaciones, que se va a resolver mediante el Método de Gauss de modo exacto y con tres cifras decimales de precisión :

$$\textit{Exacto:} \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9998 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9999 \end{bmatrix}$$

$$\textit{3 cifras:} \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 0 & -10000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Si se intercambian las ecuaciones:

$$\textit{3 cifras:} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.0001 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.9999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9998 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - En este caso el problema está bien condicionado, pero se estaba aplicando un algoritmo incorrecto (inestable).

Normas Vectoriales en $\mathbf{R}^n$ (1/3)

- Objetivo:
  - Disponer de una medida del tamaño de los vectores, con objeto de estudiar convergencias, relaciones de mayor o menor, proximidad a cero, etc.
- Normas de vectores
  - Estudiadas al hablar de los espacios vectoriales Euclídeos.
  - La norma de un vector $||\mathbf{x}||$ debe satisfacer las tres propiedades siguientes:
    1. $||\mathbf{x}|| \geq 0$, y $||\mathbf{x}|| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$
    2. $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|\,||\mathbf{x}||$, para cualquier $\alpha \in R$
    3. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (desigualdad triangular)
  - El ***producto escalar*** permite definir de modo natural una norma en $\mathbf{R}^n$, que coincide con la longitud de un vector en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}.\mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

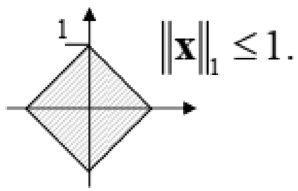
  - Esta norma, llamada ***norma Euclídea***, no es la única posibilidad. Puede considerarse caso particular de una norma más general llamada ***norma p***:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \; ; \; p \geq 1$$

Normas Vectoriales en $\mathbf{R^n}$ (2/3)

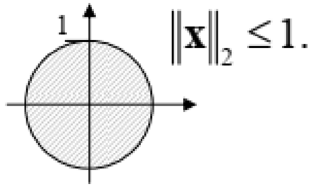
- Casos particulares más utilizados de la ***norma-p***:
  - ***Norma-1***: Se toma p=1,

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$



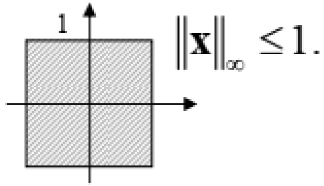
  - ***Norma-2*** ó ***norma Euclídea***: Se toma p=2,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$



  - ***Norma-∞*** ó ***norma máxima***: Se toma p=∞,

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} = \max_{1\le j\le n} |x_j|$$



  - En la parte derecha de cada norma se muestra el lugar geométrico de los puntos de $\mathbf{R^2}$ que cumplen la condición $\|x\| \leq 1$
  - Es inmediato ver que se cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición de norma. También se demuestra fácilmente que se cumple la condición 3;

$$\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Normas Vectoriales en $\mathbf{R}^n$ (3/3)

- Se enuncian dos Teoremas (sin demostración):
- Teorema 1:
  - Cada norma vectorial $\|\boldsymbol{x}\|_p$ es una función continua de las componentes del vector $\boldsymbol{x}$, es decir, de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Teorema 2:
  - Para cada dos normas vectoriales $\|\mathbf{x}\|_i$ y $\|\mathbf{x}\|_j$ existen dos constantes positivas m y M tales que:

$$m\ \|\mathbf{x}\|_i \le \|\mathbf{x}\|_j \le M\ \|\mathbf{x}\|_i\ ,\ \forall\, \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n$$

  - Este Teorema establece una ***equivalencia*** de las normas. Si con una determinada norma una secuencia de vectores tiende por ejemplo a cero, también tenderá a cero con cualquier otra norma

Normas Matriciales (1/6)

Norma de una matriz

- Una ***norma de una matriz*** es un número real positivo que "mide" el tamaño de una matriz, y permite por ejemplo estudiar cuando una matriz tiende a otra matriz o a la matriz nula.
- A la norma de una matriz se le exigen las ***tres condiciones*** que debía satisfacer la norma de un vector, y ***una condición adicional*** relacionada con el producto de matrices:
  1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{A}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{A}=0$
  2. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\|$, para cualquier $\alpha \in K$ (R o C)
  3. $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ (desigualdad triangular)
  4. $\|\mathbf{A}.\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| . \|\mathbf{B}\|$
- Es posible definir normas de matrices directamente. Por otra parte, las matrices $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{(m\times n)}$ forman un espacio vectorial Euclídeo con un producto escalar definido como $\langle \mathbf{A},\mathbf{B} \rangle = traza(\mathbf{A}^T.\mathbf{B})$. Este producto escalar induce una norma, llamada ***norma de Frobenius***, que responde a la expresión:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\langle \mathbf{A},\mathbf{A} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Normas Matriciales (2/6)

- Norma matricial inducida por una norma vectorial (***norma natural***):
  - En este caso la norma matricial se define a partir de una norma vectorial:

$$\|A\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|A.x\|}{\|x\|} \;\; o \;\; \|A\| = \max_{u\neq 0}\|A.u\| = \|A.y\| \;;\; (\|y\|=1)$$

donde **y** es el vector concreto de $\mathbf{R}^n$ que produce el máximo (y la igualdad). El máximo se alcanza porque el conjunto de vectores ***u*** es cerrado y acotado.

  - De esta definición de norma matricial se concluye que:

$$\|A.x\| \leq \|A\|\|x\|$$

  - Se cumplen las cuatro condiciones de la definición de norma matricial:

$$1.\;\; Si\;\; \|x\| \neq 0\,,\;\; \|A\| \neq 0 \;y\;\; \|A\| = 0 \; sí \; y \; sólo \; si \; A = 0$$

$$2.\;\; \|\alpha A\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|\alpha A x\|}{\|x\|} = \max_{x\neq 0}|\alpha|\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha|\|A\| \;\; \forall \alpha \in \; K\;(R \; o \; C)$$

$$3.\;\; \|A+B\| = \|(A+B)y\| = \|Ay+By\| \leq \|Ay\| + \|By\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$4.\;\; \|AB\| = \|(AB)y\| = \|A(By)\| \leq \|A\|\|By\| \leq \|A\|.\|B\|$$

  - Se pueden estudiar las normas matriciales inducidas por las normas vectoriales: $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ y $\|x\|_\infty$ que se denotarán con la notación correspondiente

Normas Matriciales (3/6)

- La expresión de la ***norma-1*** de una matriz es la siguiente:

$$\|A\|_1 = \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|$$

  - Es decir, la norma-1 es el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada ***columna***.

- Demostración:
  - Supóngase que la igualdad en la definición de la norma se alcanza para un vector ***y*** tal que $\|A\|_1 = \|A\,y\|_1$, siendo $\|y\|_1 = 1$

$$\|A\|_1 = \|A\,y\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k \right| \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| |y_k| = \sum_{k=1}^{n} |y_k| \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |y_k| \max_m \sum_{j=1}^{n} |a_{jm}| = \left(\max_m \sum_{j=1}^{n} |a_{jm}| \right) \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \left(\max_m \sum_{j=1}^{n} |a_{jm}| \right) \|y\|_1 = \left(\max_m \sum_{j=1}^{n} |a_{jm}| \right)$$

  - El desarrollo anterior demuestra que el máximo de las sumas de los valores absolutos de cada columna es un límite superior de la norma-1, pero para que sea verdaderamente la expresión de la norma este límite debe ser alcanzado.
  - Supóngase que la columna que da el máximo es la columna *K*. Tomando como vector ***x*** al vector e_k de la base natural **(**$\|e_k\| = 1$**)**:

$$\|Ae_K\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \delta_{kK} \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{jK}| = \|A\|_1$$

Normas Matriciales (4/6)

- La expresión de la ***norma-∞*** de una matriz es la siguiente:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{k} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

  - Es decir, la norma-∞ es el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada ***fila***.

- Demostración:
  - Supóngase que la igualdad en la definición de la norma se alcanza para un vector y tal que:

$\|A\|_{\infty} = \|A\,y\|_{\infty}$, siendo $\|y\|_{\infty}=1$

$$\|A\|_{\infty} = \|Ay\|_{\infty} = \max_{j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k\right| \leq \max_{j}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}||y_k| \leq$$

$$\leq \left(\max_{k}|y_k|\right)\left(\max_{j}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|\right) = \max_{j}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|$$

  - Al igual que el caso anterior, el máximo de las sumas de los valores absolutos de cada fila es un límite superior de la norma-∞, pero para que sea verdaderamente la expresión de la norma este límite debe ser alcanzado.
  - Supóngase que la fila que da el máximo es la fila J. Se toma un vector x tal que $x_k = a_{Jk}/|a_{Jk}|$ si $a_{Jk} \neq 0$ y $x_k = 0$ si $a_{Jk} = 0$

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{Jk} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_{Jk}^2}{|a_{Jk}|}\right| = \sum_{k=1}^{n}|a_{Jk}|\ ;\ \|x\|_{\infty} = 1$$

Normas Matriciales (5/6)

- La expresión de la ***norma espectral*** o ***norma***-2 de una matriz es:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^H A\right)}$$

  - Es decir, la norma-2 es la raíz cuadrada del máximo valor propio de la matriz $A^H A$, que es una ***matriz hermítica*** y –al menos– ***semidefinida positiva***, cuyos valores propios son por tanto ***reales*** y ***no negativos***.

$$A^H A u_j = \lambda_j u_j \Rightarrow \lambda_j = u_j^H A^H A u_j$$

- Demostración:
  - La matriz $A^H A$ tendrá una base ortonormal de vectores propios $u_1, u_2, \ldots, u_n$
  - El vector y que produce la igualdad en la definición de la norma inducida se puede expresar como combinación lineal de los vectores propios u_j:

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \;\; ; \;\; \|y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

  - Aplicando ahora la definición de la norma-2 de un vector:

$$\|A\|_2^2 = \|Ay\|_2^2 = y^H A^H A\, y = \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j u_j^H\right) A^H A \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j u_j^H\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k u_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\alpha_k|^2\right) \le \left(\max_i \lambda_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2\right) = \max_i \lambda_i = \rho\left(A^H A\right)$$

  - De nuevo éste es un límite superior, pero dicho límite se alcanza para $x = u_n$.

$$\|Au_n\|_2^2 = u_n^H A^H A u_n = u_n^H u_n \lambda_n = \lambda_n = \rho\left(A^H A\right)$$

Normas Matriciales (6/6)

- Teoremas relacionados con las normas matriciales (sin demostración)
  - **Teorema 1:** Cualquier norma matricial es una función continua de los m×n elementos de la matriz $A \in C^{(m\times n)}$.
  - **Teorema 2:** Para cada par de normas matriciales existen unas constantes positivas m y M tales que:

$$m\ ||A||_i \leq ||A||_j \leq M\ ||A||_i$$

    Este Teorema permite hablar de "equivalencia de normas".
  - **Teorema 3:** Para cualquier norma natural y cualquier matriz cuadrada $A \in C^{(n\times n)}$ se verifica: $\rho(A) \leq \|A\|$ pues

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Au_n\| = \|\lambda_n u_n\| = |\lambda_n| \|u_n\| = |\lambda_n| = \rho(A)$$

  - **Teorema 4:** Para cualquier matriz cuadrada $A \in C^{(n\times n)}$ y cualquier valor ε arbitrariamente pequeño existe alguna norma natural tal que:

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A+\varepsilon)$$

    El radio espectral de una matriz cuadrada no es una norma (salvo que la matriz A sea normal, en cuyo caso $||A||_2 = \rho(A)$), pero puede ser utilizado como tal dada su "cercanía".
  - **Corolario:** Para cualquier matriz cuadrada A: $\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|$

Números de Condición de una Matriz (1/4)

- Recordatorio de conceptos ya estudiados en Álgebra:
  - Matriz convergente $\lim_{m\to\infty}\left\|\mathbf{A}^m\right\|=0 \iff \rho(\mathbf{A})<1 \iff \lim_{m\to\infty}\mathbf{A}^m=\mathbf{0}$
  - La serie $\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots$ converge si $\mathbf{A}$ es convergente.
  - Si $\mathbf{A}$ es convergente la matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ es no singular y se puede expresar como:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots$$

- Proposición:
  - Si $\|\mathbf{A}\|<1$, la matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ es no singular y se verifican las desigualdades:

$$\frac{1}{1+\|\mathbf{A}\|}\underset{a)}{\leq}\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\|\underset{b)}{\leq}\frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|}$$

Desigualdad *a*)

$$\mathbf{I}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$$

$$1\leq\|\mathbf{I}-\mathbf{A}\|\cdot\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\|\leq(1+\|\mathbf{A}\|)\cdot\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\| \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+\|\mathbf{A}\|}\leq\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\|$$

Desigualdad *b*)

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{A})=\mathbf{I} \;\Rightarrow\; (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}-(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I} \;\Rightarrow\; (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$$

$$\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\|\leq 1+\|\mathbf{A}\|\cdot\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\| \;\Rightarrow\; \left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\|\leq\frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|}$$

Números de Condición de una Matriz (2/4)

- Propagación de errores en SEAL:
  - Error relativo en la solución debido al error en el término independiente:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ \mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ \mathbf{A}\delta\mathbf{x}=\delta\mathbf{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ \delta\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\|\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|\\ \|\delta\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|\end{array}\right\}$$

$$\|\mathbf{b}\|\|\delta\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|\|\delta\mathbf{b}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

  - Error relativo en la solución debido al error en la matriz del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ (\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=\mathbf{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A}\delta\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=0 \Rightarrow \delta\mathbf{x}=-\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})$$

$$\|\delta\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

  - En ambas expresiones el error relativo en los datos se multiplica por un factor:

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A})\equiv\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|}, \quad \kappa(\mathbf{A})\ge 1 \text{ pues } \mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A},\ 1\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|=\kappa(\mathbf{A})$$

- Número de condición numérica:
  - Se llama número de condición o condición numérica al escalar positivo κ(A) que controla la transmisión de errores en los sistemas de ecuaciones lineales

Números de Condición de una Matriz (3/4)

- Fórmula general de propagación de errores en SEAL
  - Los desarrollos matemáticos son este caso un poco más complicados. Se suponen unas perturbaciones en **A** y **b** que producen un error en **x**:

$$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=\mathbf{b}+\delta\mathbf{b} \qquad (1)$$

  - Se supone que las perturbaciones en **A** son pequeñas, de modo que se cumple:

$$\|\delta\mathbf{A}\|<\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}=\frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|}=\frac{\|\mathbf{A}\|}{\kappa(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\leq\frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} \quad \kappa(\mathbf{A})\equiv \text{condición numérica de } \mathbf{A}$$

  - La matriz $(\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})$ es convergente, pues por hipótesis se cumple:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\|\leq\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|<1, \qquad (\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}) \text{ no singular}$$

  - Aplicando a la matriz $(-\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})$ la desigualdad de la proposición anterior:

$$\left\|(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})^{-1}\right\|\leq\frac{1}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\|}\leq\frac{1}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|} \qquad (2)$$

  - Desarrollando la expresión (1):

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$$

  - Despejando $\delta\mathbf{x}$ y tomando normas:

$$\delta\mathbf{x}=(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{b}-\delta\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \|\delta\mathbf{x}\|\leq\left\|(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})^{-1}\right\|\|\mathbf{A}^{-1}\|(\|\delta\mathbf{b}\|+\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|)$$

Números de Condición de una Matriz (4/4)

- Fórmula general de propagación de errores en SEAL (cont.)
  - Dividiendo por $\|\mathbf{x}\|$ y teniendo en cuenta la desigualdad (2):

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{1}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|}\|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|}+\|\delta\mathbf{A}\|\right)\overset{\|\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|}{\Rightarrow}\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|}\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\|\mathbf{A}\|+\|\delta\mathbf{A}\|\right)$$

  - Haciendo aparecer la condición numérica $\kappa(\mathbf{A})$ se llega finalmente a:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|}\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\|\mathbf{A}\|+\|\delta\mathbf{A}\|\right)=\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}+\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{\kappa(\mathbf{A})}{1-\kappa(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}+\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)$$

  - De nuevo la condición numérica es el factor que controla la amplificación (siempre es ***$\kappa(A)\geq 1$***) de los errores relativos en los datos.
  - La condición numérica no depende de la magnitud de los elementos de una matriz: Si la matriz se multiplica por el escalar α la condición numérica permanece invariable.

Números de Condición para la Norma Euclídea

- Número de condición para la norma Euclídea o espectral:
  - La norma euclídea de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ es la raíz cuadrada del radio espectral de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho\left(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)}$$

  - La matriz $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ es ***hermítica*** y todos sus valores propios son reales y no negativos, pues dicha matriz es –al menos– ***semidefinida positiva***.
  - Además, si la matriz $\mathbf{A}$ es ***normal*** y sus valores propios son λ_j, los valores propios de la matriz $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ son

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U} = \overline{\mathbf{D}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{U} = \mathbf{D} \overline{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{U} = \mathbf{D} \overline{\mathbf{D}} = \operatorname{diag}\left(\left|\lambda_1\right|^2, \ldots, \left|\lambda_n\right|^2\right) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho\left(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)} = \sqrt{\left|\lambda_n\right|^2} = \left|\lambda_n\right| = \rho(\mathbf{A})$$

  - Si la matriz $\mathbf{A}$ es regular los valores propios de $\mathbf{A}^{-1}$ son los inversos de los valores propios de $\mathbf{A}$. Por tanto, se verificará que:

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\rho\left(\mathbf{A}^{-H} \mathbf{A}^{-1}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}} = \frac{1}{\left|\lambda_1\right|} = \rho\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$$

  - De acuerdo con esto, el número de condición de una matriz normal y regular será:

$$\kappa^{(2)}(\mathbf{A}) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 \|\mathbf{A}\|_2 = \rho\left(\mathbf{A}^{-1}\right) \rho(\mathbf{A}) = \frac{\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_1\right|}$$

Consideraciones Generales y Conclusiones

- Consideraciones sobre las fórmulas de propagación del error
  - La ***condición numérica*** indica cómo se amplifican los errores $\delta\mathbf{A}$ y $\delta\mathbf{b}$.
  - Como mínimo estos errores son de la ***precisión de los datos*** (eps = 2.22e–16).
  - Además, en el transcurso de los cálculos se introducen errores de redondeo. Existen dos formas de estudiar los efectos de estos errores:
    - ✓ El ***análisis directo*** considera el error en cada operación y trata de estudiar cómo se propaga y acumula hasta el resultado final. Conduce a resultados muy pesimistas.
    - ✓ El ***análisis inverso*** (Wilkinson,1965) considera los errores de redondeo como perturbaciones en los datos iniciales y trata de acotarlos. Los resultados son mucho más precisos.

$$\left|(\delta A)_{ij}\right| \leq 2n\varepsilon \max_{1\leq i,j,k\leq n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$$

  - Resultado del análisis inverso de errores con la factorización: $\boldsymbol{L^*U^* = (A + \delta A)}$ donde n es el número de ecuaciones, ε es la precisión de la máquina (2.22e–16 para las PCs) y $a_{ij}^{(k)}$ son los elementos que van apareciendo en ***A*** en el proceso de factorización.
  - El pivotamiento por columnas basta para evitar que estos elementos crezcan incontroladamente.
  - Las matrices definidas positivas no necesitan pivotamiento y no suelen dar problemas de errores de redondeo.
  - Conviene estimar los errores a través de un número de condición aproximado.