Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias (EDOs)

Prof.: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz

J.T.P.: Dr. Juan Ignacio Manassaldi

Aux. 1ra: Ing. Amalia Rueda

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si $y = f(x)$

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^n\right) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente

La denominación de "ordinaria" se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Introducción

Expresión implícita:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$$

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Orden: máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Grado: grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Lineal: la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

No Lineal: la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$$y' - \cos(\omega x) = 0$$

EDO lineal de 1er orden y 1er grado

$$y'' + k^2 y = 0$$

EDO lineal de 2do orden y 1er grado

$$(y'')^3 - xyy' + y = 0$$

EDO no lineal de 2do orden y 3er grado

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Diremos que una función y: $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada n-ésima de y en todo punto del intervalo$[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n}(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n}(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

Introducción

Para encontrar $y(x)$ (solución) es necesario efectuar n integraciones, lo cual implica que deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g\left(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0 \;\; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Problema de Valores de Contorno:

- Deben establecerse condiciones en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio.
- En el espacio o dominio unidimensional hay dos puntos frontera, en $x=a$ y $x=b$ si el dominio es el intervalo cerrado $[a,b]$.
- El orden mínimo de una EDO para un problema de valores de frontera es $n=2$.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

- Evaluación explícita de $f(x,y(x))$ y sus derivadas.
- Avance paso a paso en el tiempo sin utilizar procedimientos iterativos.
- Métodos más difundidos:
  - Euler
  - Runge – Kutta de 4to. orden

Método de Euler (explícito)

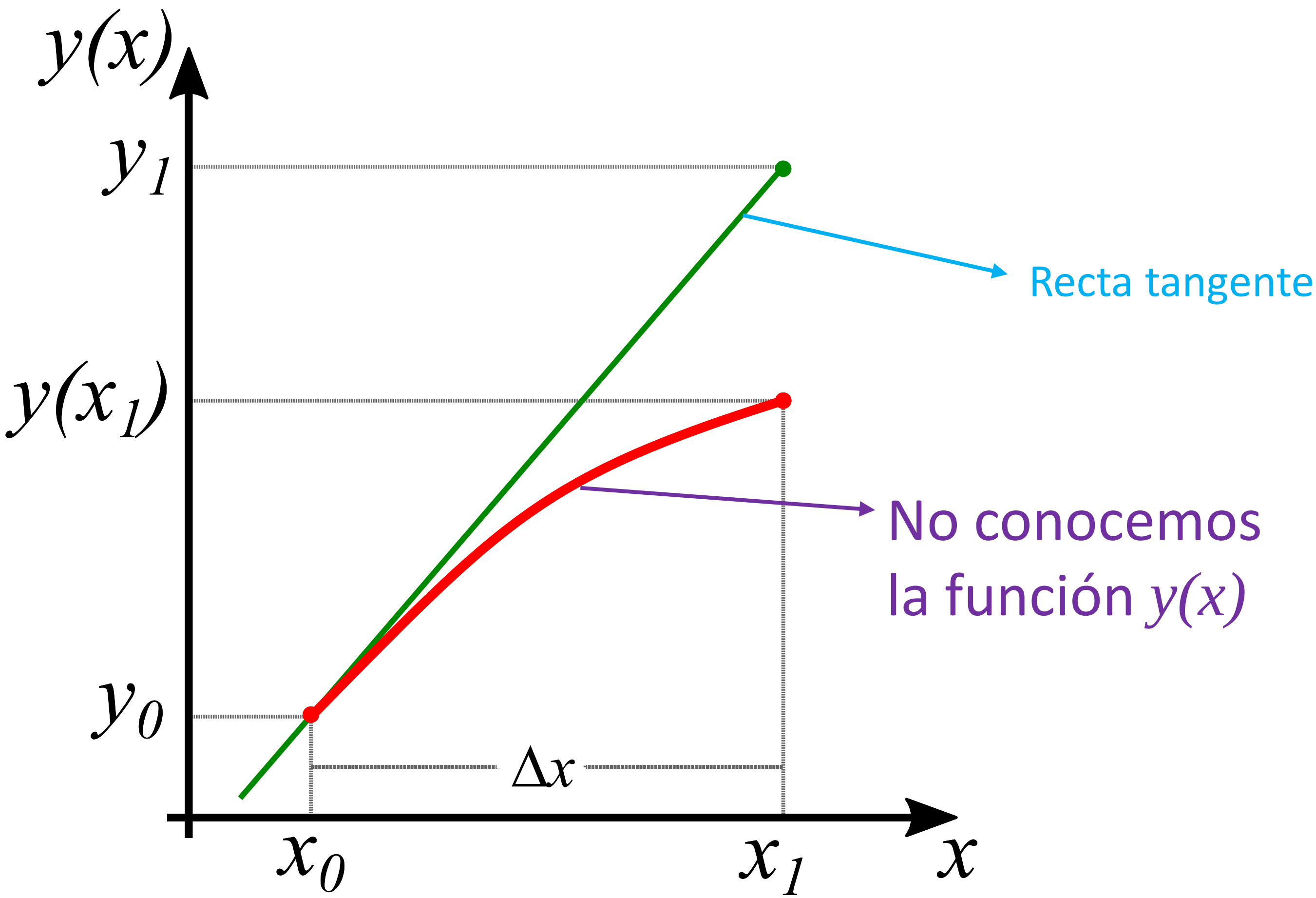
Ventajas

- Sencillo
- Programación rápida
- Bueno para h del orden < 0,1

Desventajas

- Dada su inexactitud suele tener limitaciones en algunos problemas prácticos.
- Inestabilidad para Δx grande

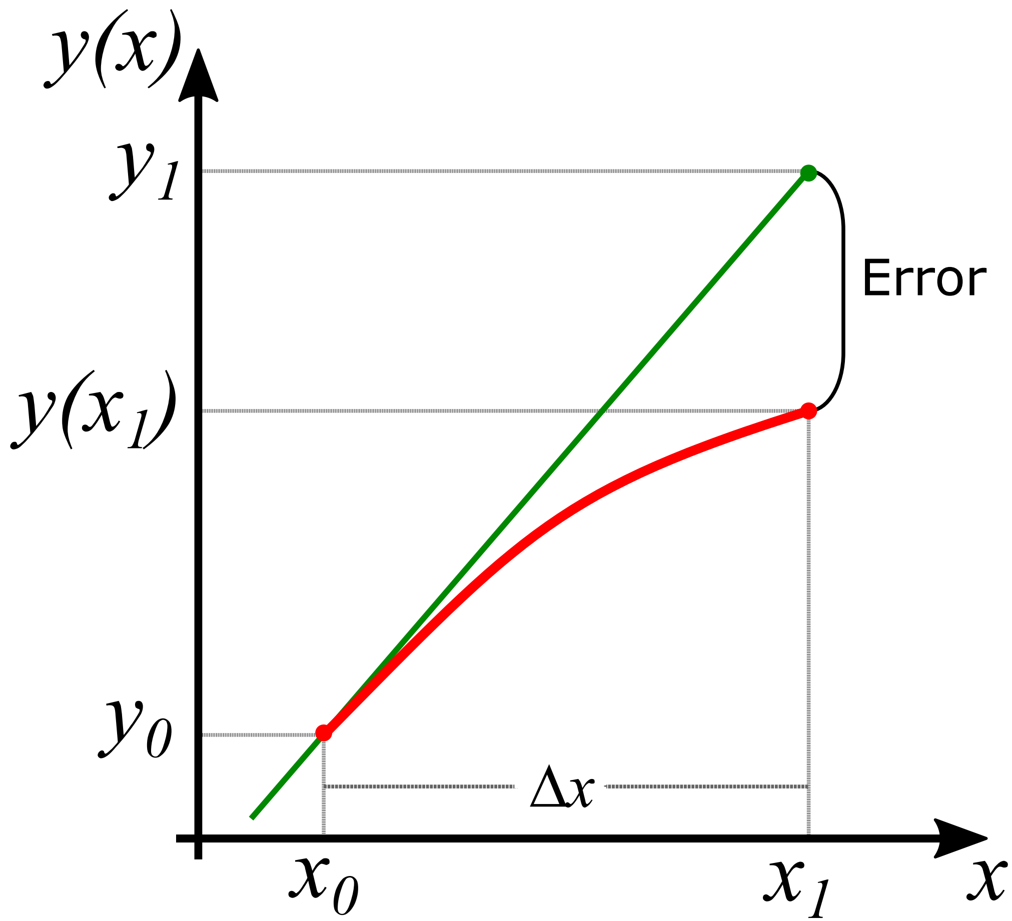
Método de Euler (explícito)



$$y' = f\left(x, y\right)$$

No se conoce la función y pero conocemos su derivada
¿Cómo se podemos estimar el valor de la función en x_1?

Método de Euler (explícito)



Algoritmo:

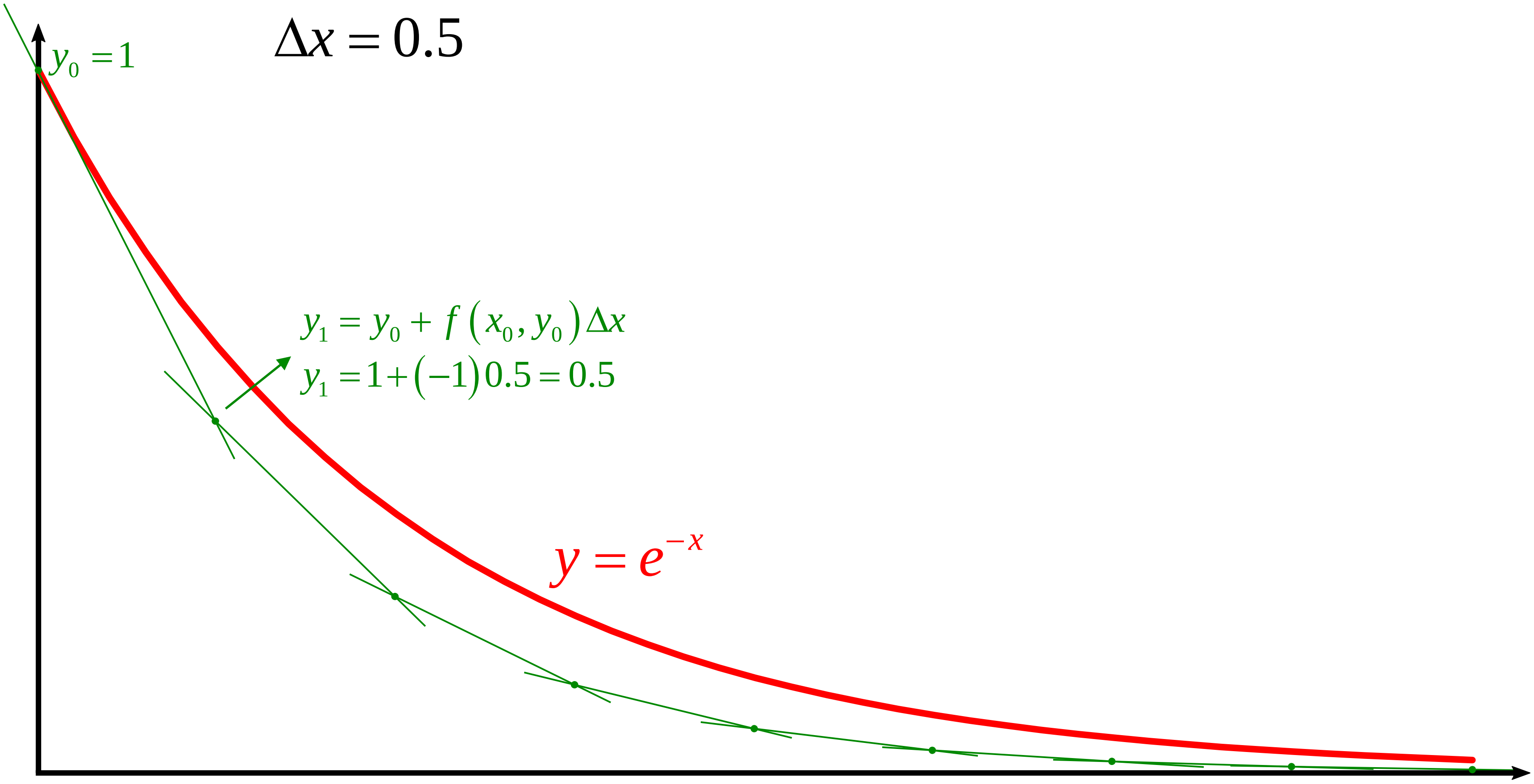
$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\Delta x$$

Método de Euler (explícito)

Ejemplo: $$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\Delta x = 0.5$$



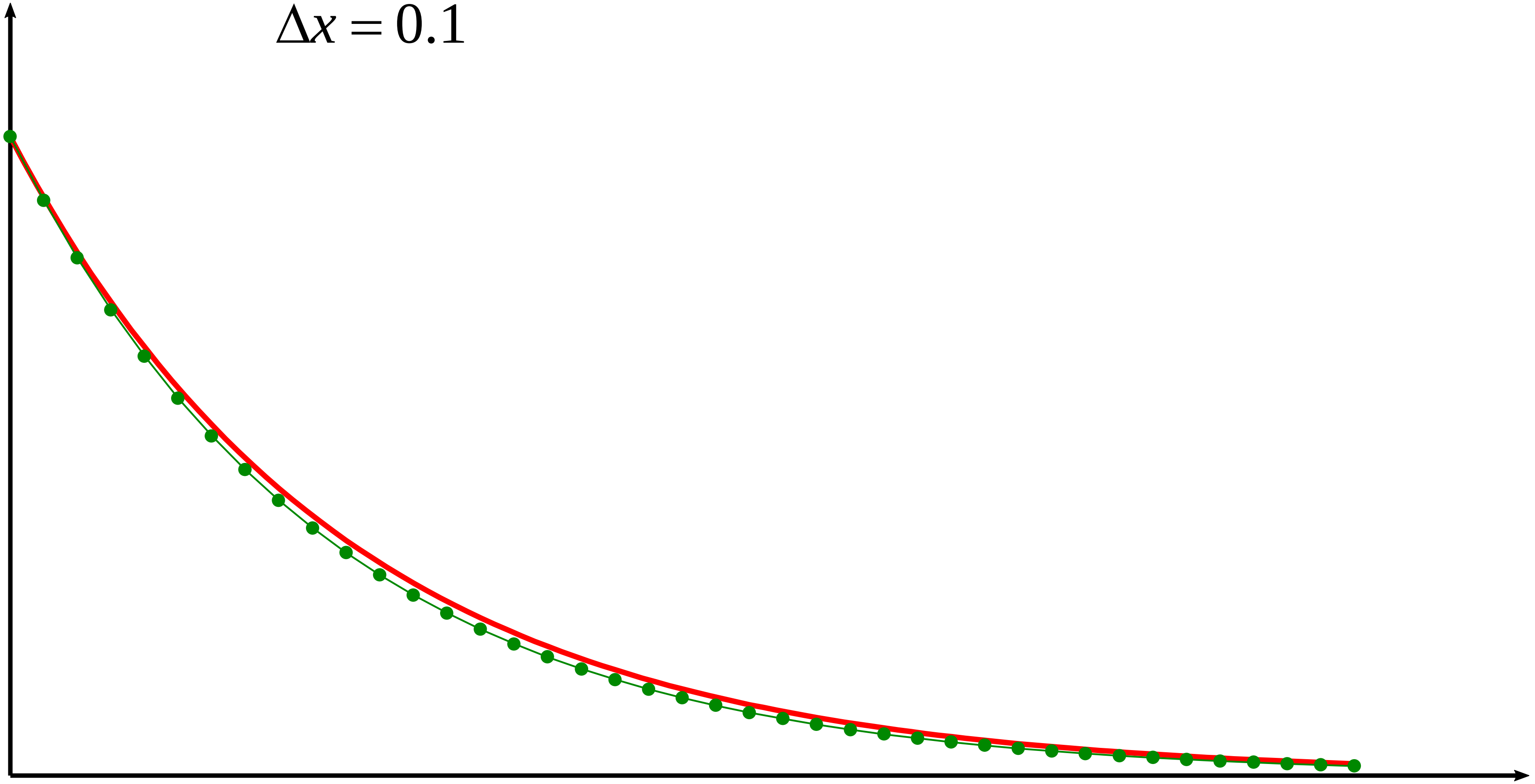
Método de Euler (explícito)

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\Delta x = 0.1$$

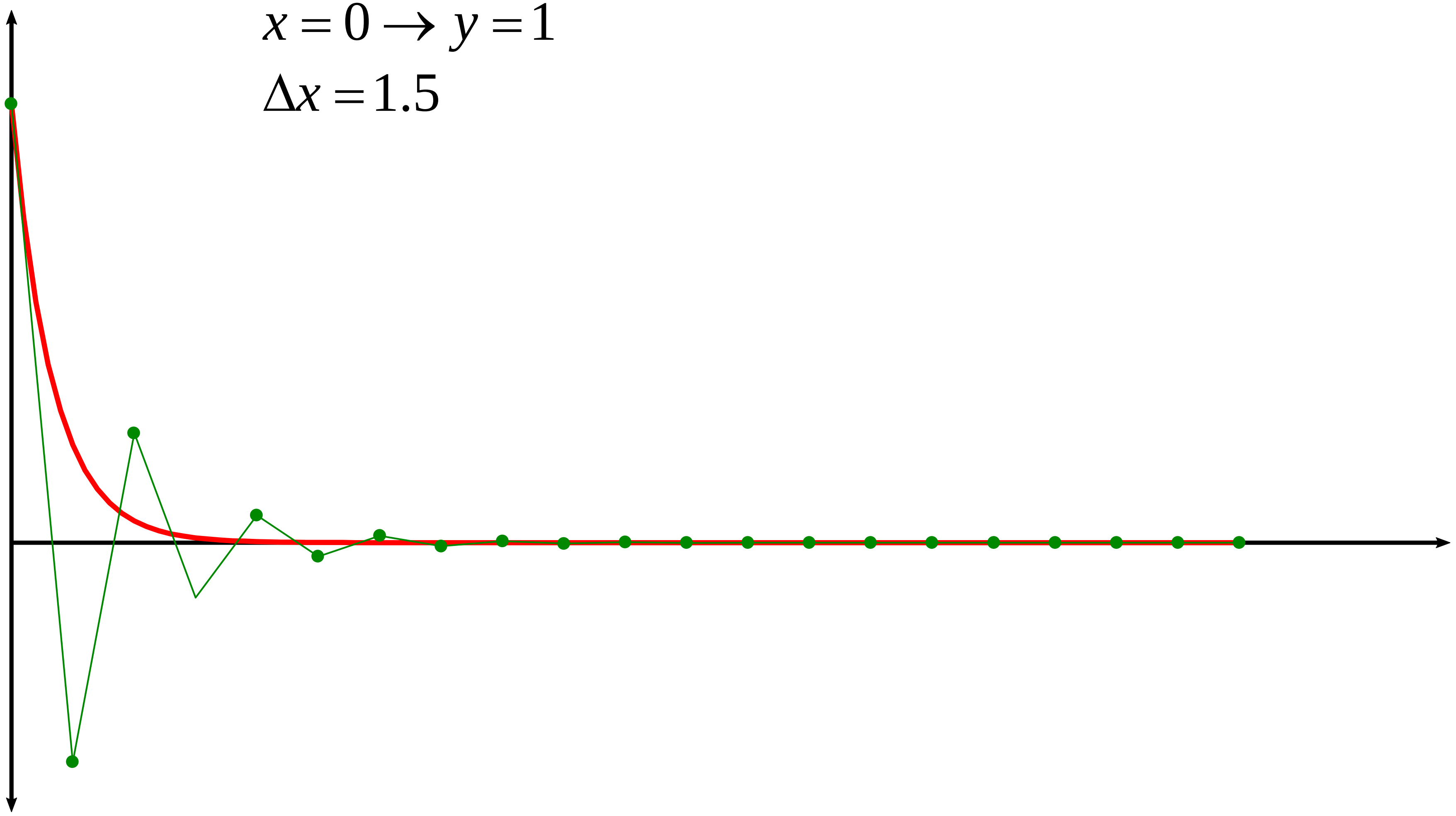


Método de Euler (explícito)

Ejemplo: $$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\Delta x = 1.5$$



- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{ingresa al sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{abandona el sistema}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de la masa dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de moles}\\ \text{del componente i}\\ \text{que ingresan al sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Flujo de moles}\\ \text{del componente i}\\ \text{que abandonan el sistema}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{velocidad de formación}\\ \text{de moles del componente i}\\ \text{por reacción química}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de moles del componente i}\\ \text{dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

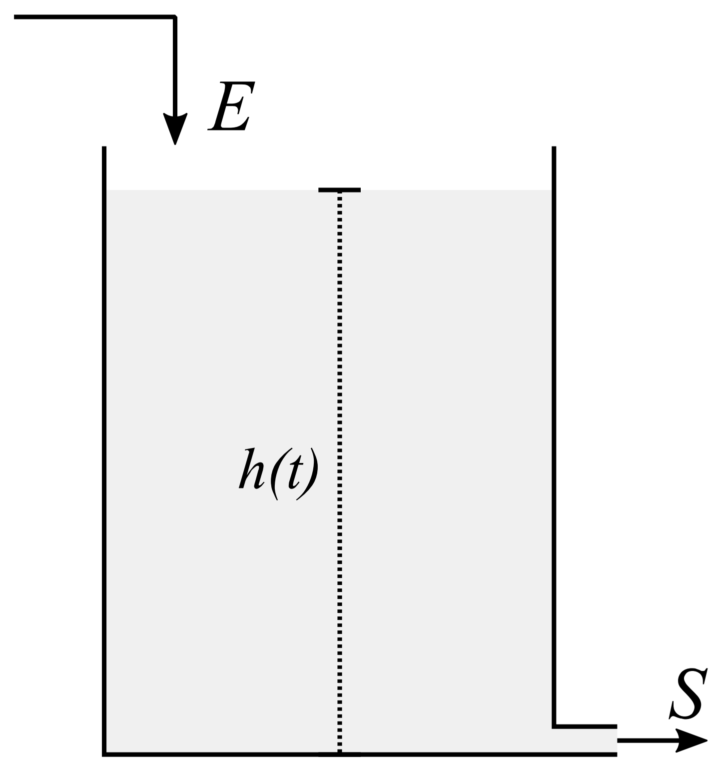
Las unidad de esta ecuación es moles/tiempo

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

- Balance de materia en el tanque: Acumulación = Entrada – Salida

HOLDUP de materia

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

$M \rightarrow$ Masa de fluido dentro del tanque

$m_e \rightarrow$ Flujo masico de entrada de fluido

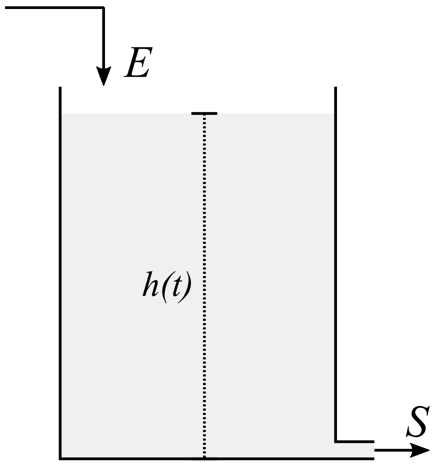
$m_s \rightarrow$ Flujo masico de salida de fluido

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$m_e = \rho E$ $\quad E \rightarrow$ Caudal volumetrico de entrada

$m_s = \rho S$ $\quad S \rightarrow$ Caudal volumetrico de salida

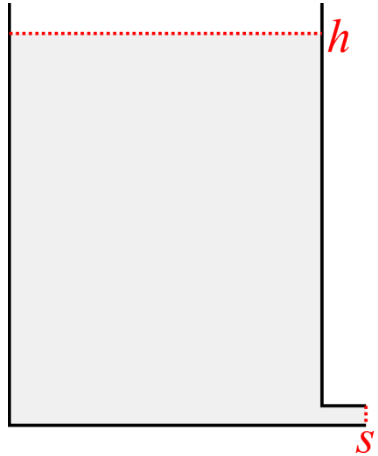
$m_s = \rho A_s v_s$ $\quad A_s \rightarrow$ Area de salida del tanque

$v_s \rightarrow$ velocidad de salida del tanque

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{v_h^{\;2}\rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho g h = \frac{v_s^{\;2}\rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho g h_s}$$

$v_h = 0$ $\quad P_h = P_s$ $\quad h_s = 0$



$$\rho g h = \frac{v_s^{\;2}\rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Luego: $\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T} \sqrt{2gh}}$$

EDO

$t \rightarrow \text{Variable independiente (tiempo)}$

$h \rightarrow \text{Variable dependiente (altura)}$

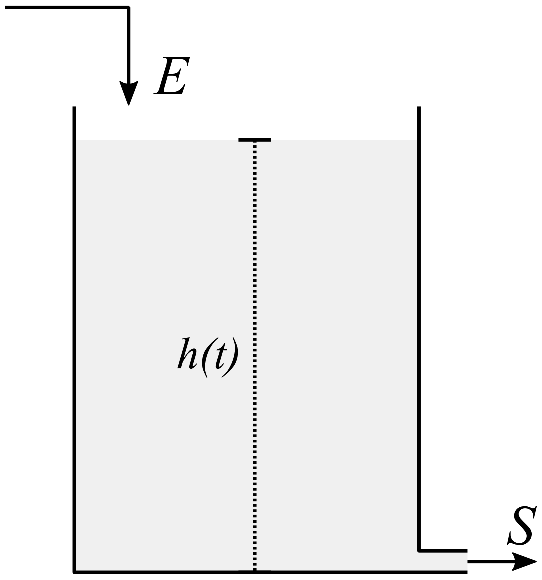
$t = 0 \rightarrow h = h_0 \text{ (problema de valor inicial)}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

```
function f=EDO1(t, h, E, At, As)
    g=9.8; //m.seg-2
    f=E/At - As/At*sqrt(2*g*h);
endfunction
```

Ejemplo practico:

- Vaciado del tanque (E=0)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos



$$A_T = \frac{\pi D_T^{\,2}}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^{\,2}}{4} \quad \rightarrow A_T \frac{dh}{dt} = -A_s\sqrt{2gh} \rightarrow \frac{\pi D_T^{\,2}}{4}\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^{\,2}}{4}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^{\,2}}{D_T^{\,2}}\sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh}}$$

Solución Utilizando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\Delta x$$

$x \rightarrow$ Variable independiente

$y \rightarrow$ Variable dependiente

$\Delta x \rightarrow$ Incremento o salto

$$\frac{\overset{y}{dh}}{\underset{x}{dt}} = \underbrace{-2.5806\times 10^{-3}\sqrt{2gh}}_{f(x,y)}$$

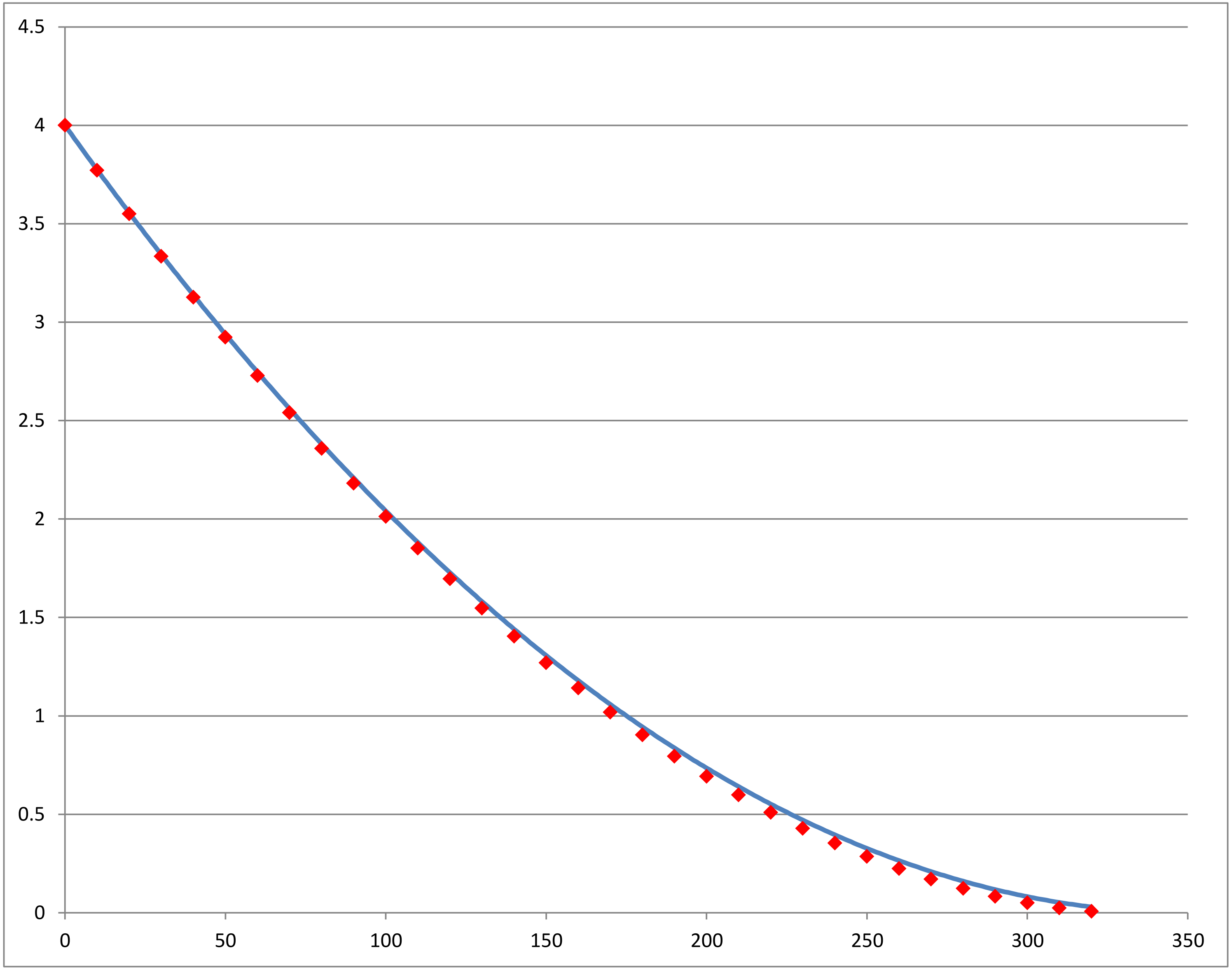
$$\boxed{h_{i+1} = h_i + f\left(t_i, h_i\right)\Delta t}$$

Solución Utilizando el método de Euler ($\Delta t = 10\ seg$):

i	t	h	f
0	0	4	

$$f(t,h) = -2.5806 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

```
Dt= 1; //m
At=%pi*Dt*Dt/4; //m2
Ds= 0.0508; //m
As=%pi*Ds*Ds/4; //m2
E=0; //m3/seg
dt=10; //seg
tf= 320; //seg
t=0:dt:tf;
h_0=4; //m

h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
    h(i+1)=h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
end
```

Método de Runge-Kutta

- Los métodos Runge-Kutta introducen varios parámetros a determinar, y hacen un promedio pesado de la función $f(x,y)$ evaluada en diferentes puntos.
- Son más precisos que los métodos de Euler.
- En general los métodos Runge – Kutta tienen algoritmos de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{\varnothing}_{\text{Incremento}} \Delta x$$

- Según se defina el incremento tenemos R-K de 2º, 3º o 4º orden.

Método de Runge-Kutta

- Dada la siguiente EDO: $y' = f(x, y)$
- Runge-Kutta de 2do orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

Donde:

$$\varnothing = k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1)$$

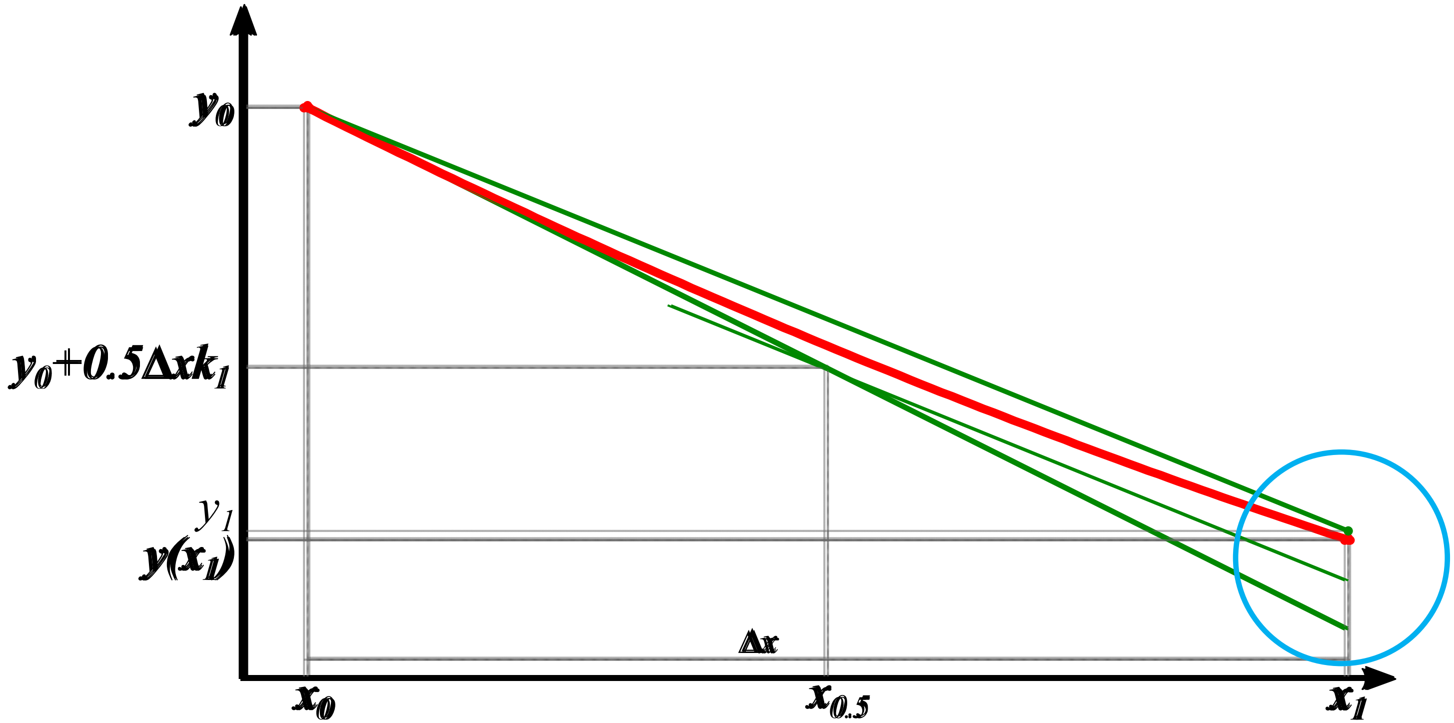
Método de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

$$\varnothing = k_2$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$



Método de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de 3er orden corresponde a:

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta x$$

Donde: $$\varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_{i+1}, y_i + 2\Delta x k_2 - \Delta x k_1\right)$$

- Runge-Kutta de 4to orden (mas difundido) corresponde a:

$$\varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_{i+1}, y_i + \Delta x k_3\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando Runge-Kutta de 4er orden :

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh} \;\rightarrow\; f\left(t,h\right) = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \varnothing\Delta t \qquad \varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \qquad k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \qquad k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right)$$

i	t	h	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	4				
1	1					

$$\begin{cases} \varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ h_1 = h_0 + \varnothing \Delta t \end{cases}$$

Ejemplo para *t=0* (*i=0*):

$$f\left(t,h\right) = -2.5806\times 10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \rightarrow k_1 = f\left(0,4\right)$$

$$k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right) \rightarrow k_2 = f\left(0.5, 4+0.5\times 1\times k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \rightarrow k_3 = f\left(0.5, 4+0.5\times 1\times k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right) \rightarrow k_4 = f\left(1, 4+1\times k_3\right)$$

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \quad k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \quad k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right)$$

```
h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
   k1 = EDO1(t(i)             , h(i)                  ,E,At,As);
   k2 = EDO1(t(i)+0.5*dt , h(i)+0.5*dt*k1 ,E,At,As);
   k3 = EDO1(t(i)+0.5*dt , h(i)+0.5*dt*k2 ,E,At,As);
   k4 = EDO1(t(i)+       dt , h(i)+       dt*k3 ,E,At,As);
   delta = (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
   h(i+1) = h(i) + dt*delta;
end
```

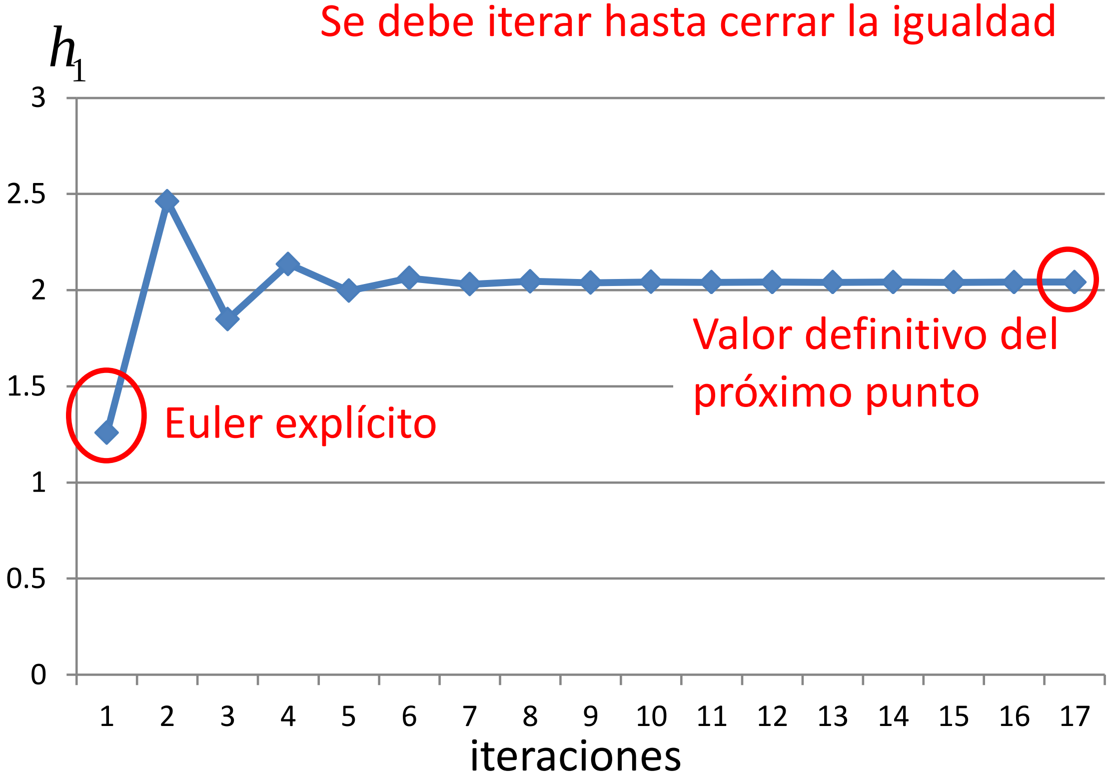
Métodos Implícitos de Resolución de EDOs

- El avance se realiza paso a paso en el tiempo pero se realiza un proceso iterativo para dar por finalizado el paso.
- Métodos más difundidos:
  - Euler implícito
  - Euler-Gauss

Método Implícito de Euler

Algoritmo: $y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\Delta x$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad



$$\frac{dh}{dt} = -2.5806\times10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + f_i\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\Delta t$$

$$h_0 = 4\,m$$

$$\Delta t = 120\ seg$$

$$h_{i+1} = h_i - 2.58064\times10^{-3}\sqrt{2gh_{i+1}}\Delta t$$

Método Implícito de Euler

$$h_{i+1} = h_i + f\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\Delta t$$

```
function h1=EULERIMP(h1)
   f1=EDO1(t1,h1,E,At,As)
   h1 = h0 + f1*dt;
endfunction
```

```
h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
   h(i+1) = h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
   t1 = t(i) + dt;
   h0 = h(i);
   h(i+1) = wegstein(EULERIMP,h(i+1),1e-6);
end
```

Método Implícito de Euler-Gauss

Algoritmo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right]$$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

Análisis:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right]$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}\left[\boxed{y_i + f\left(x_i, y_i\right)} + \boxed{y_i + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)}\right]$$

Euler explícito   Euler implícito

$$\frac{dh}{dt} = -2.5806\times 10^{-3}\sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{2}\left(-2.58064\times 10^{-3}\sqrt{2gh_i} - 2.58064\times 10^{-3}\sqrt{2gh_{i+1}}\right)$$

Método Implícito de Euler-Gauss

Matemática Superior Aplicada

UTN

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{2}\left[f\left(t_i, h_i\right) + f\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\right]$$

```
function h1=EULERGAUSS(h1)
   f1=EDO1(t1,h1,E,At,As)
   f0=EDO1(t0,h0,E,At,As)
   h1 = h0 + (f1 + f0)*dt/2;
endfunction
```

```
h(1)=h_0;
for i=1:length(t)-1
   h(i+1) = h(i) + dt*EDO1(t(i),h(i),E,At,As);
   t1 = t(i) + dt;
   h0 = h(i);
   t0 = t(i);
   h(i+1) = wegstein(EULERGAUSS,h(i+1),1e-5);
end
```

Ejemplo Tanque Esférico

22.16 A spherical tank has a circular orifice in its bottom through which the liquid flows out (Fig. P22.16). The flow rate through the hole can be estimated as

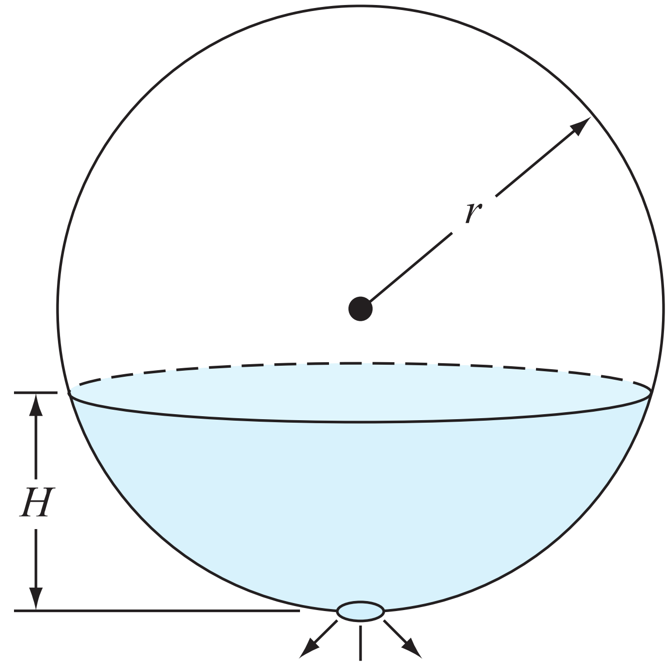
$$Q_{out} = CA\sqrt{2gh}$$

where Q_{out} = outflow (m^3/s), C = an empirically derived coefficient, A = the area of the orifice (m^2), g = the gravitational constant (= 9.81 m/s^2), and h = the depth of liquid in the tank. Use one of the numerical methods described in this chapter to determine how long it will take for the water to flow out of a 3-m diameter tank with an initial height of 2.75 m. Note that the orifice has a diameter of 3 cm and $C = 0.55$.

Chapra, S.; Canale, R. *Numerical Methods for Engineers, Sixth Edition*; McGraw-Hill, 2009.

Ejemplo Tanque Esférico

$$\frac{dM}{dt} = \cancel{m_{in}} - m_{out}$$



$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 \left(3r - H\right)$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi H^2 3r - \rho \frac{1}{3} \pi H^3$$

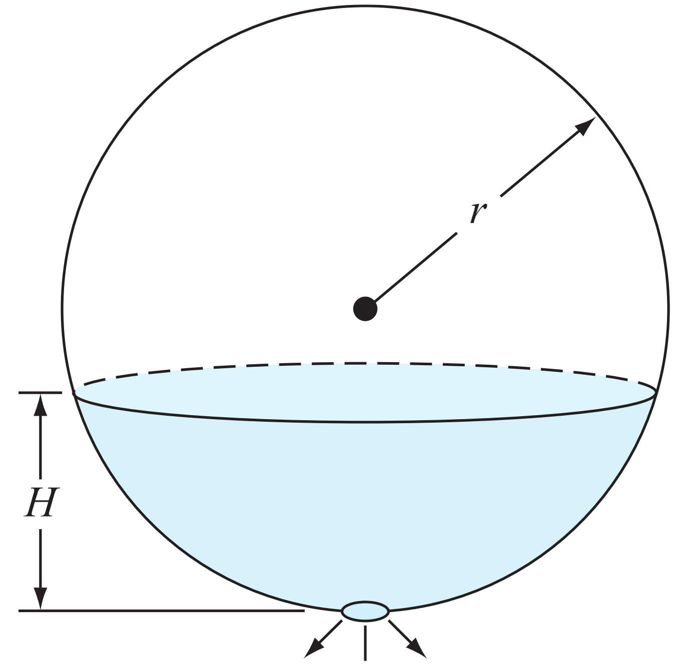
$$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{1}{3} \pi 3r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \frac{1}{3} \pi 3H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$

Ejemplo Tanque Esférico

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi r 2H \frac{dH}{dt} - \rho \pi H^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \pi \left(2rH - H^2 \right) \frac{dH}{dt}$$



$$m_{out} = \rho Q_{out} = \rho C A \sqrt{2gH}$$

$$m_{out} = \rho C \pi \frac{D_o^{\,2}}{4} \sqrt{2gH}$$

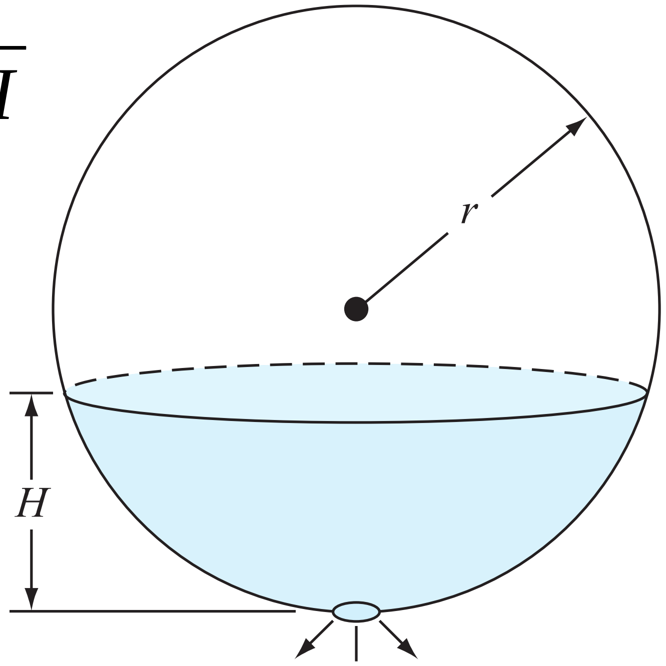
$$\rho \pi \left(2rH - H^2 \right) \frac{dH}{dt} = -\rho C \pi \frac{D_o^{\,2}}{4} \sqrt{2gH}$$

Ejemplo Tanque Esférico

$$\cancel{\rho}\cancel{\pi}\left(2rH - H^2\right)\frac{dH}{dt} = -\cancel{\rho}C\cancel{\pi}\frac{D_o^{\,2}}{4}\sqrt{2gH}$$

$$\left(2rH - H^2\right)\frac{dH}{dt} = -C\frac{D_o^{\,2}}{4}\sqrt{2gH}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{-C\dfrac{D_o^{\,2}}{4}\sqrt{2gH}}{\left(2rH - H^2\right)}}$$



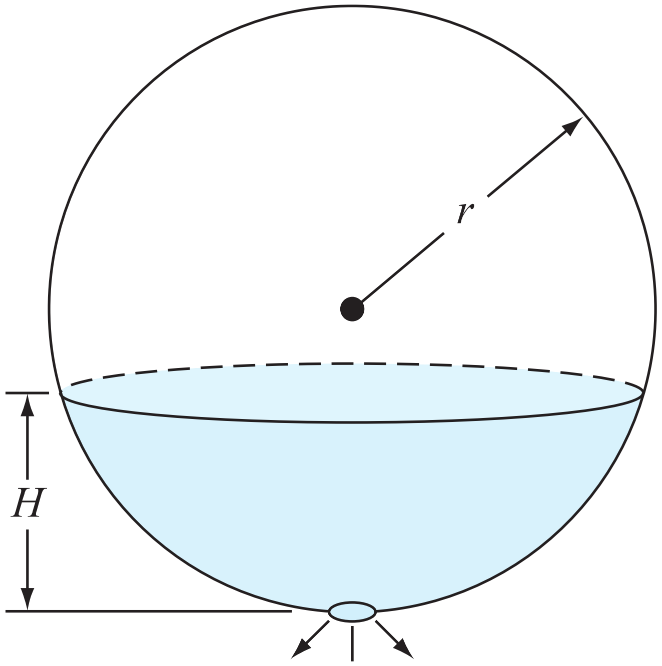
$$\frac{dH}{dt} = \frac{-C\dfrac{D_o^{\,2}}{4}\sqrt{2gH}}{\left(2rH - H^2\right)}$$

$$C : 0.55$$

$$D_o : 0.03\,\mathrm{m}$$

$$r : 1.5\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{-1.2375\times10^{-4}\sqrt{19.6H}}{\left(3H - H^2\right)}}$$



Solución Utilizando el método de Euler:

i	t	h_i	$f(t_i, H_i)$

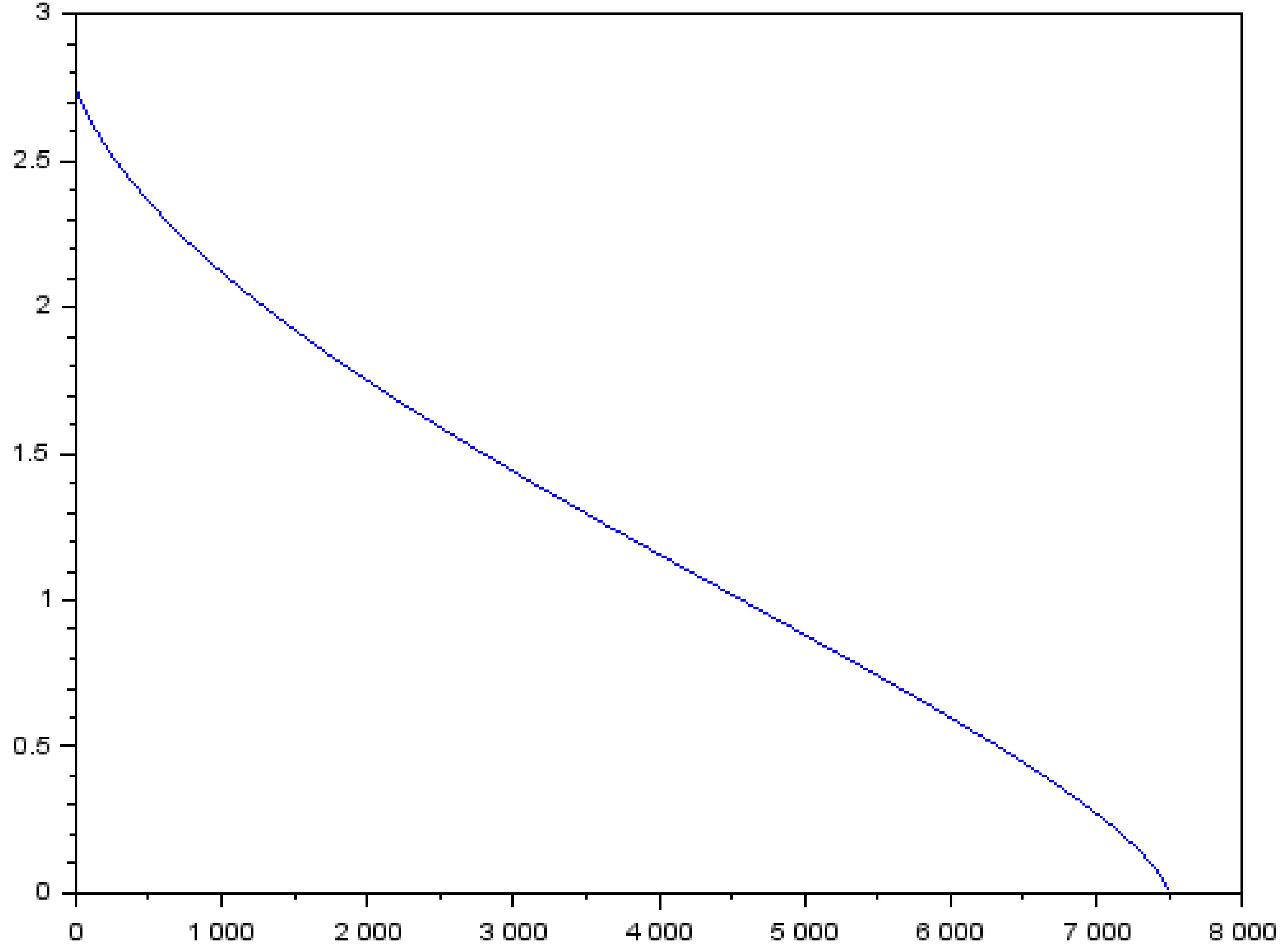
$$f(t,H) = \frac{-1.2375\times10^{-4}\sqrt{19.6H}}{\left(3H - H^2\right)}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

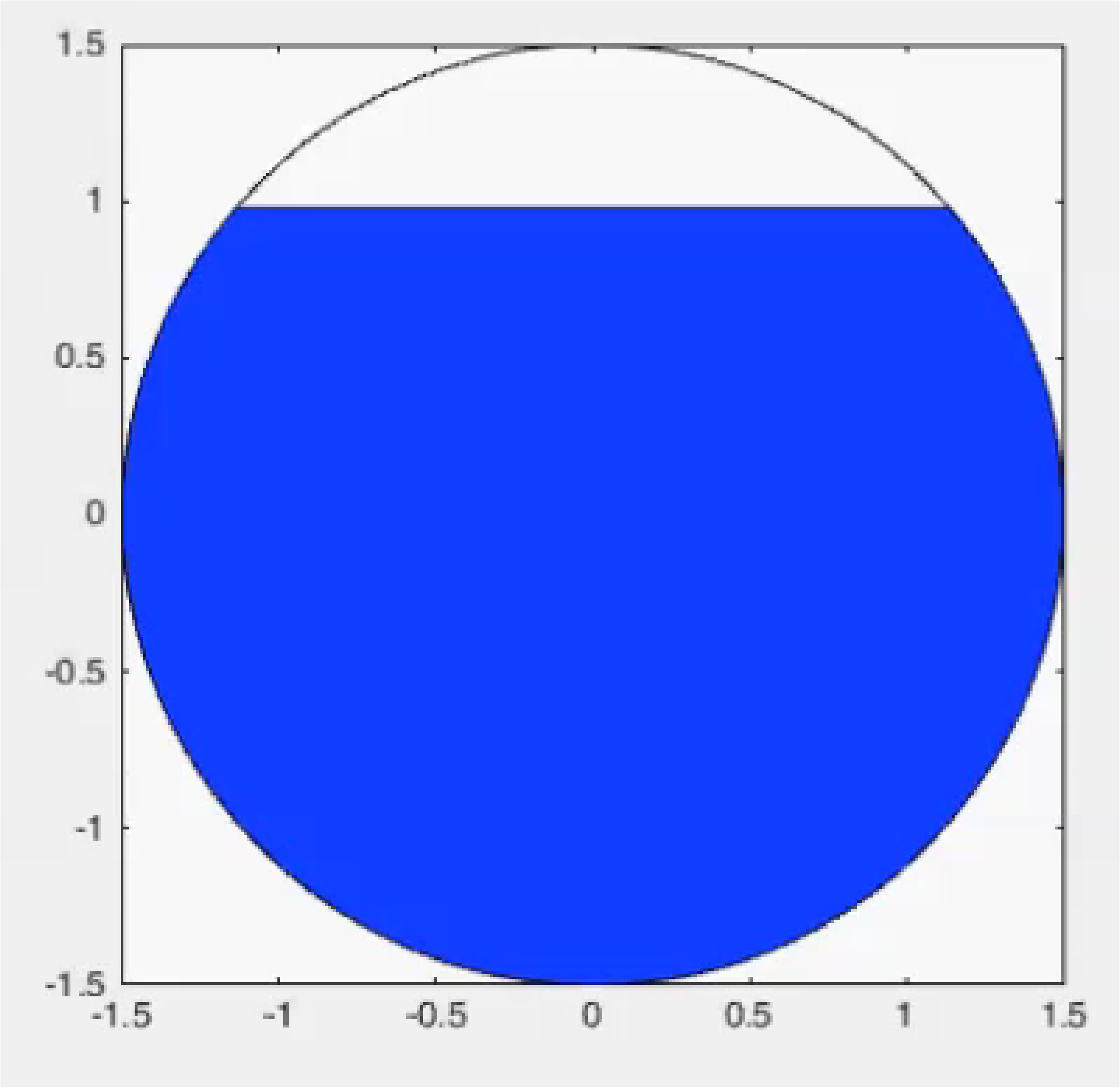
```
clear
clc
function y=f(H)
y=-1.2375e-4*sqrt(19.6*H)/(3*H-(H^2));
endfunction

H(1)=2.75;
t(1)=0;
dt=1;
i=1;
while H(i) > 0.01
H(i+1) = H(i) + f(H(i))*dt;
t(i+1) = t(i) + dt;
i=i+1;
end
plot(t,H)
tiempo=t(i)/3600
```

2.08 horas

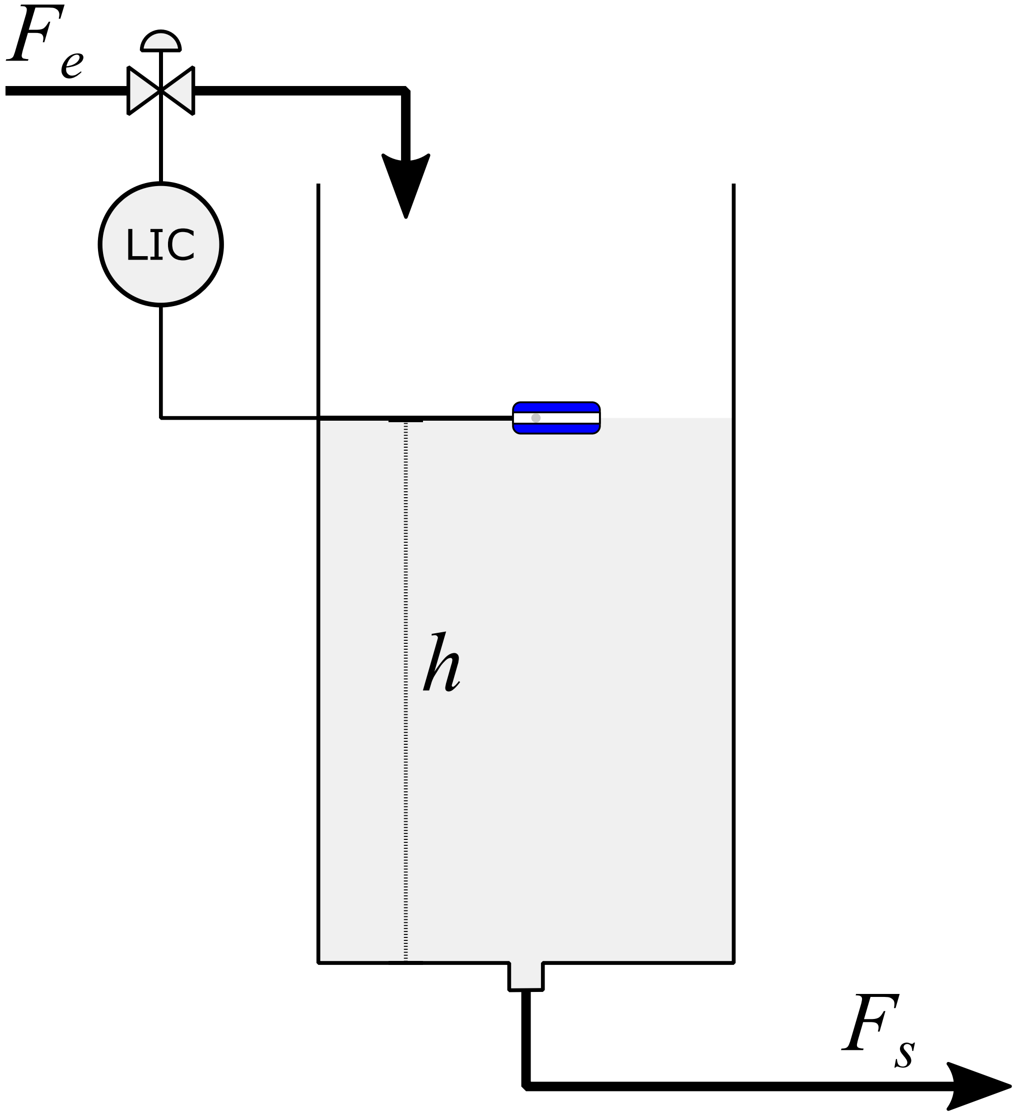
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



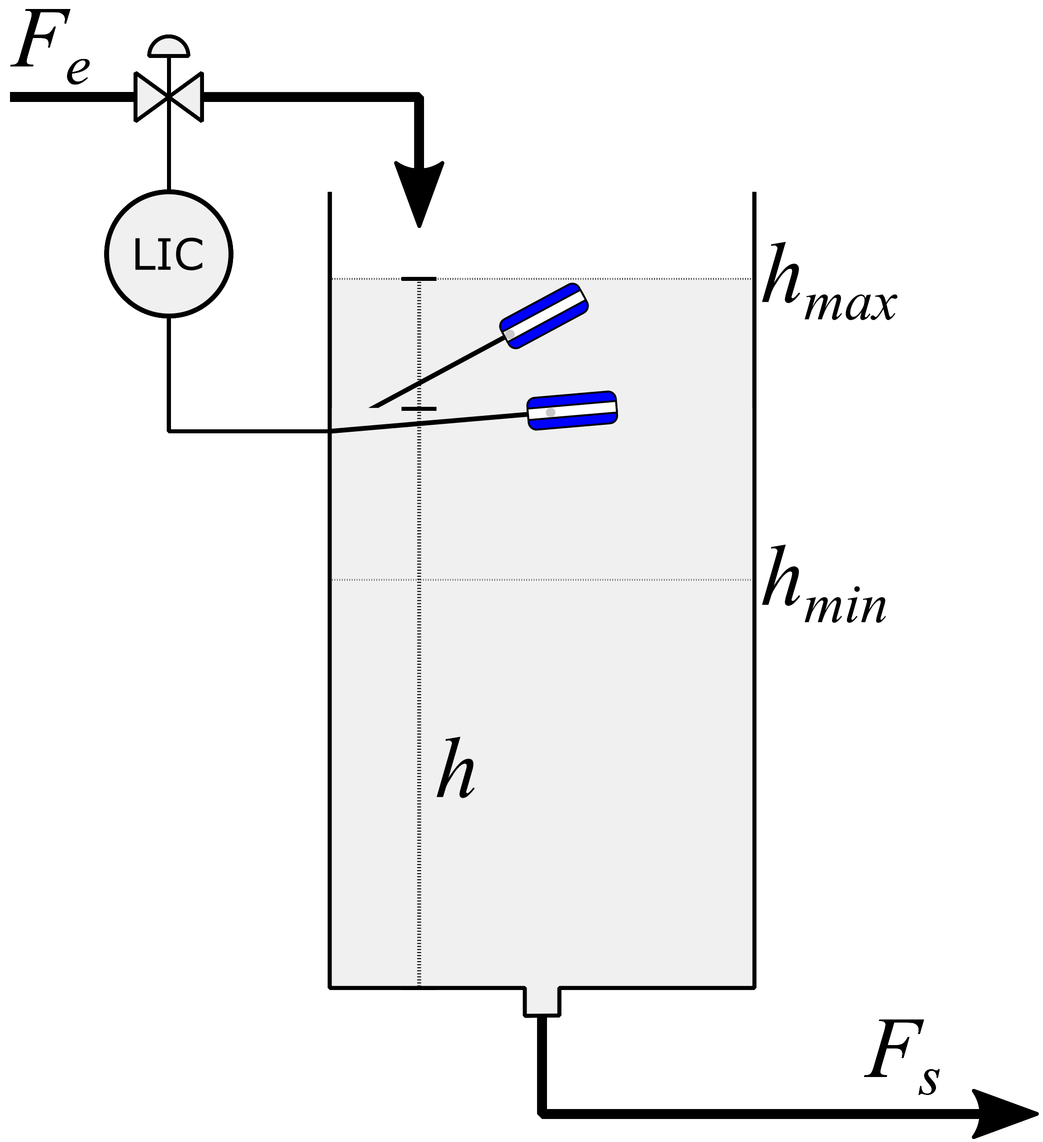
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Ejemplo: Control de nivel con un flotante



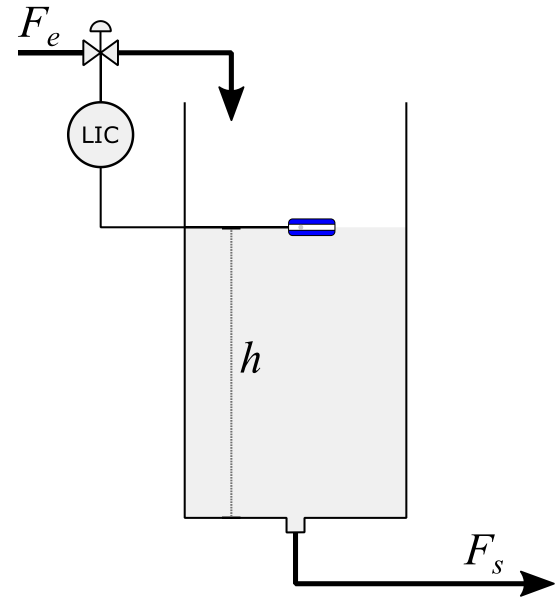
Ejemplo: Control de nivel con un flotante



Ejemplo: Control de nivel con un flotante

Hipótesis:

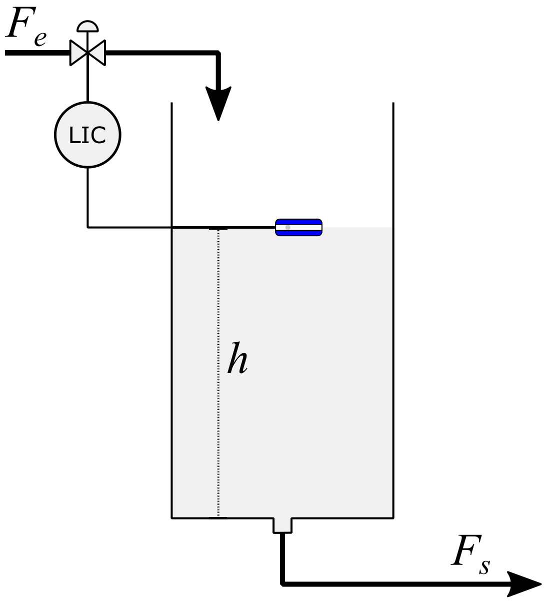
- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Control on/off mediante un flotante



- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

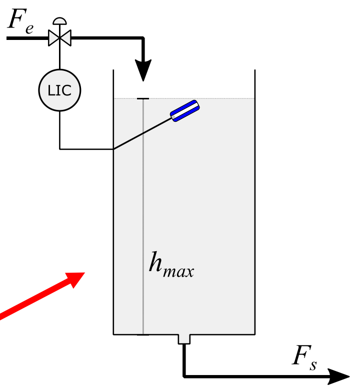
Similar al tanque abierto con salida gravitatoria

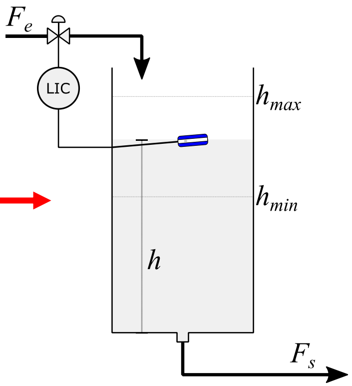


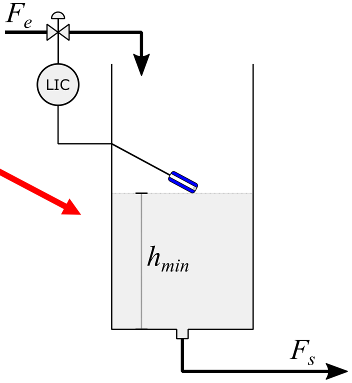
Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Caudal de entrada:

$$F_{e_i}\begin{cases} & si \quad h_i \geq h_{\max} \\ & si \quad h_{\min} < h_i < h_{\max} \\ & si \quad h_i \leq h_{\min} \end{cases}$$

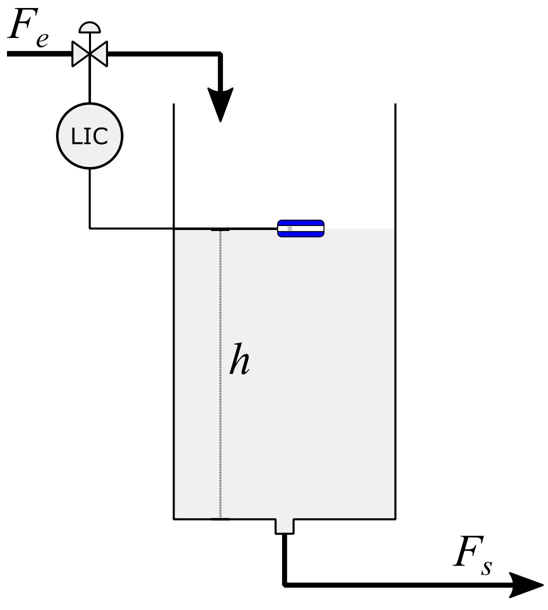




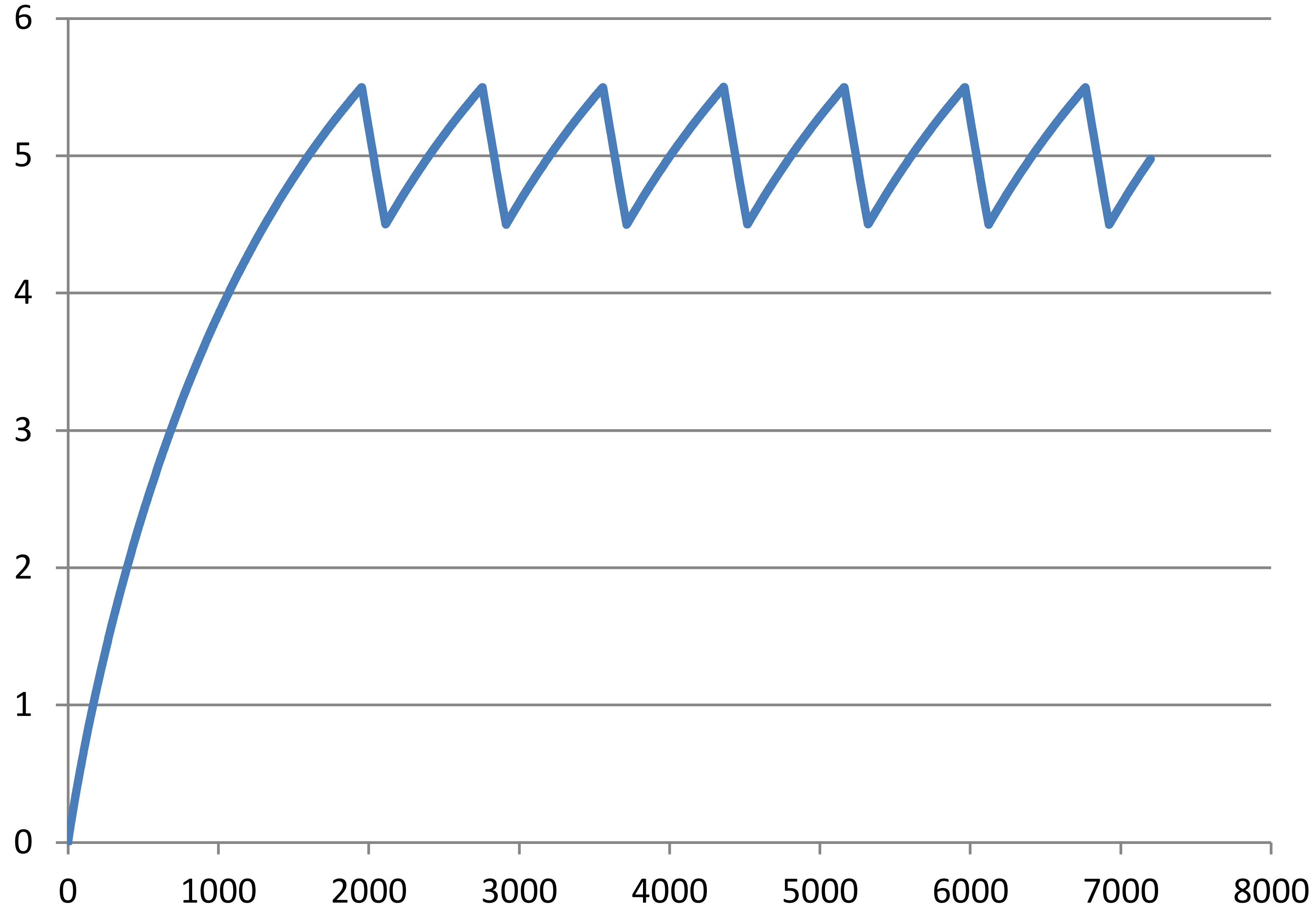


Ejemplo practico:

- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Diámetro del orificio de salida tanque: 0.0508 m
- Caudal de entrada al activarse la válvula: F=0.025 m^3/seg
- Rango del flotante: $h_{min} = 4.5\ m$ y $h_{max} = 5.5\ m$



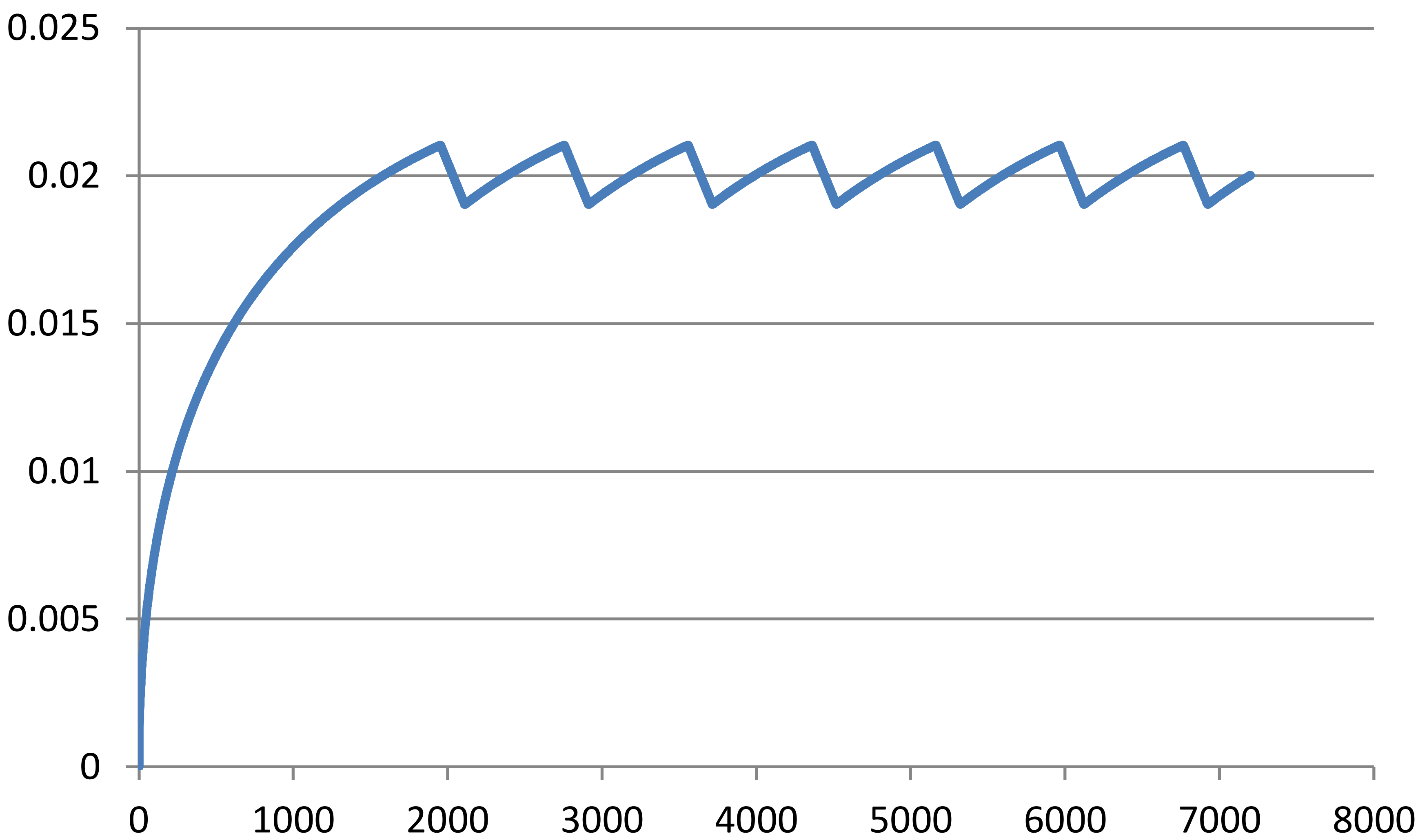
Control de nivel con un flotante (altura vs tiempo)



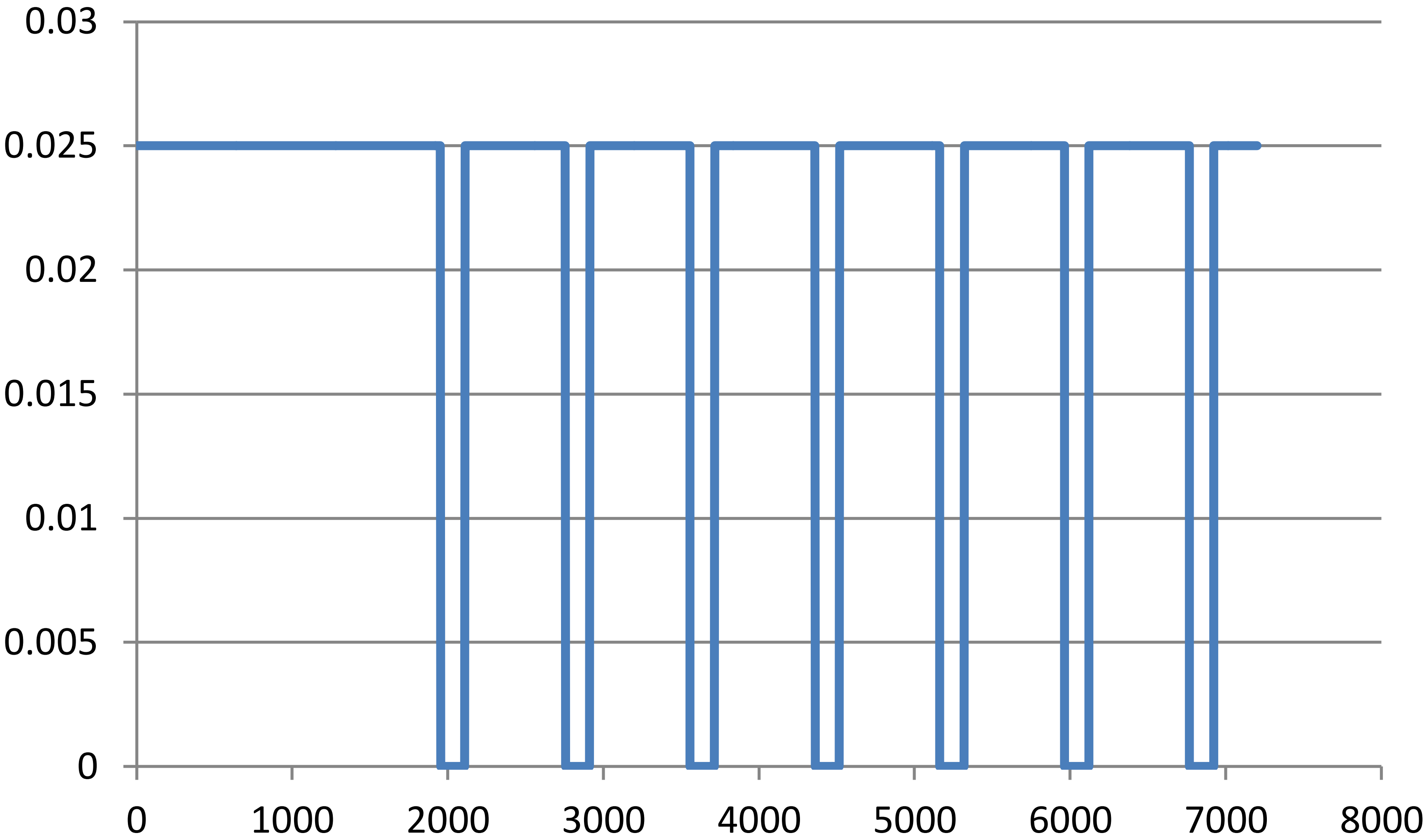
Matemática Superior Aplicada

Control de nivel con un flotante (caudal de salida vs tiempo)

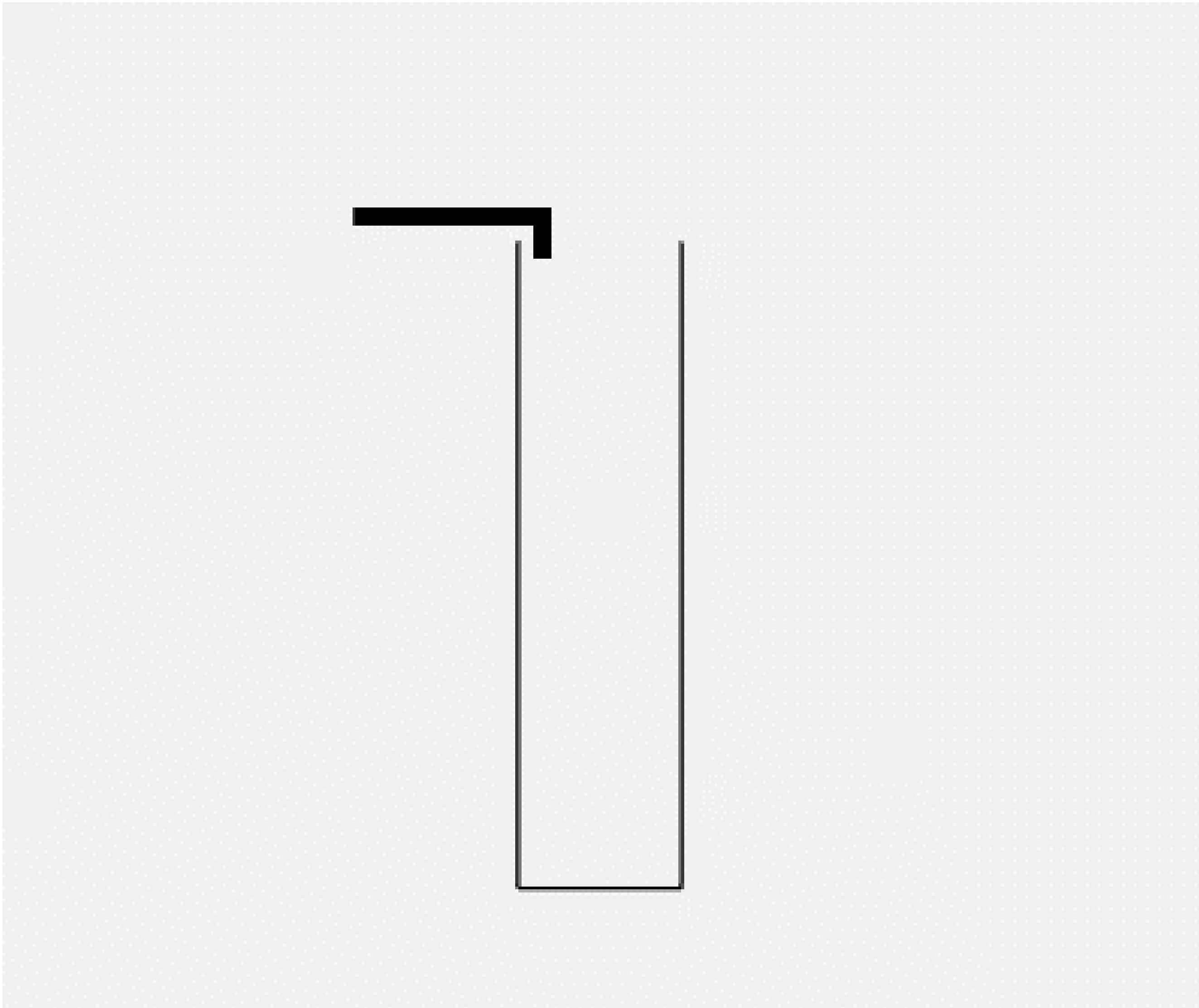
UTN



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)



Ejemplo de EDOs – Euler Explícito

Solve the following initial value problem over the interval from $t = 0$ to 2 where $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

i	t	y_i	$f(t_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

Ejemplo de EDOs – Euler Implícito

Solve the following initial value problem over the interval from $t = 0$ to 2 where $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

i	t	y_i	

$$y_{i+1} = y_i + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right)\Delta t$$

Solve the following initial value problem over the interval from $t = 0$ to 2 where $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

$$y_{i+1} = y_i + \varnothing \Delta t \qquad \varnothing = k_2$$

$$k_1 = f\left(t_i, y_i\right) \qquad k_2 = f\left(t_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta t k_1\right)$$

i	t	y_i	k_1	$t_{i+0.5}$	$y_i + 0.5\Delta t k_1$	k_2

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots, y_m, y'_m\right) = 0 \end{cases}$$

Sistema de EDOs

Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$$

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de energía}\\ \text{interna, cinética y/o potencial}\\ \text{que ingresa al sistema}\\ \text{por conveccion o difusion}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Flujo de energía}\\ \text{interna, cinética y/o potencial}\\ \text{que abandona el sistema}\\ \text{por conveccion o difusion}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{Calor que ingresa al sistema}\\ \text{por conduccion, radiacion y/o reacción}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Trabajo realizado por el sistema}\\ \text{sobre sus alrededores}\\ \text{(Trabajo de Eje o mecanico y PV)}\end{bmatrix}$$

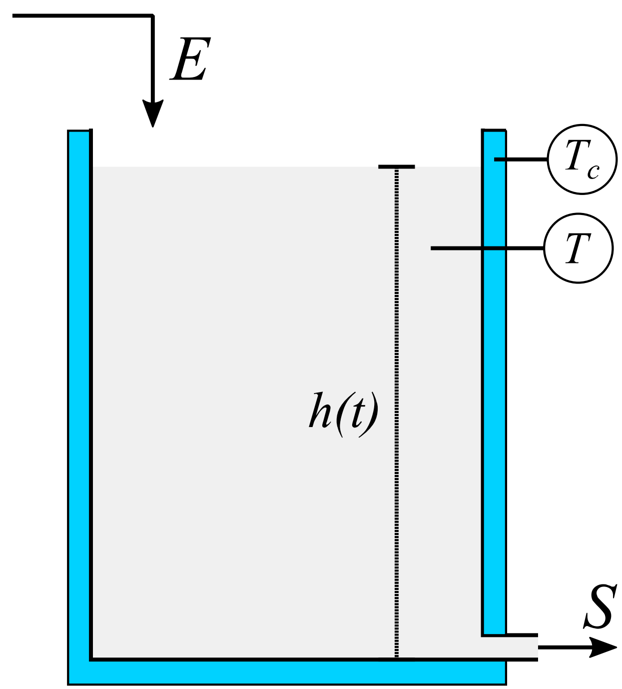
$$= \begin{bmatrix}\text{velocidad de variación de la energía}\\ \text{interna, cinética y/o potencial}\\ \text{dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

Las unidad de esta ecuación es energía/tiempo

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

Hipótesis asumida:

- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Altura inicial conocida
- Temperatura inicial conocida
- Líquido perfectamente mezclado
- Se supone constante la temperatura de la camisa de calentamiento
- Calor especifico del fluido constante



Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dM_T}{dt} = m_E - m_S$$

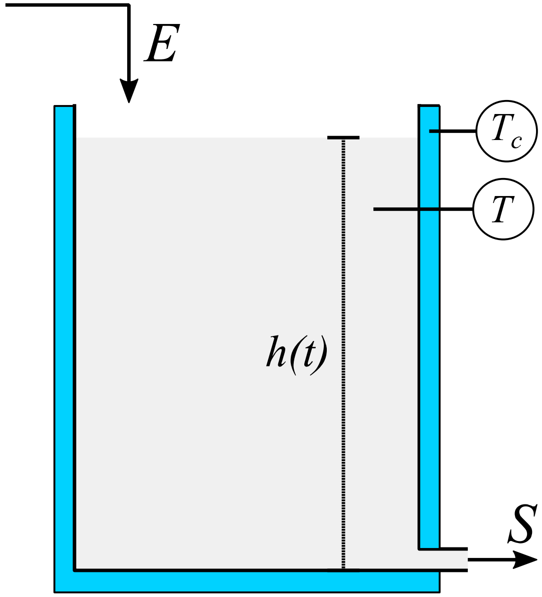
HOLDUP materia del tanque

Flujo másico de cada corriente

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_E - m_S$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}}$$

EDO 1



Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

- Balance de energía en el tanque:

HOLDUP de materia

Las propiedades de salida son idénticas a la del interior del tanque

$$\frac{dM\left(U+\cancel{K}+\cancel{\phi}\right)}{dt}=Q+m_E\left(U_E+\cancel{K}_E+\cancel{\phi}_E\right)-m_S\left(U+\cancel{K}+\cancel{\phi}\right)+m_EP_Ev_E-m_SP_Sv$$

$$\frac{dMU}{dt}=Q+m_E\left(U_E+P_Ev_E\right)-m_S\left(U+P_sv\right)$$

$$\frac{dMU}{dt}=Q+m_EH_E-m_SH$$

Para líquidos el termino Pv es despreciable frene a U por lo que se sigue la evolución de la entalpía del sistema

$$\frac{dMH}{dt}=Q+m_EH_E-m_SH$$

HOLDUP de energía

$MH \rightarrow$ Entalpía total del fluido dentro del tanque

$m_eH_e \rightarrow$ Entalpía total de entrada de fluido

$m_sH_s \rightarrow$ Entalpia total de salida de fluido

$Q \rightarrow$ Calor que ingresa por la camisa

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\frac{dMH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$\frac{dM}{dt} H + M \frac{dH}{dt} = Q + m_E H_E - m_S H$$

$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

$$m_E = \rho F_E$$

$$m_S = \rho F_S = \rho A_s \sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_e - \rho A_s \sqrt{2gh} H$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

EDO 1

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh}\, H$$

EDO 2

$$H = f(T)$$

$$Q = \text{Constante o ley funcional}$$

4 ecuaciones

4 Incógnitas: h, H, T y Q

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh}\, H$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

$$\rho A_T \left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh} \right) H + \rho A_T h \frac{dH}{dt} = Q + \rho F_E H_E - \rho A_s \sqrt{2gh}\, H$$

$$H = cp\left(T - T_0\right)$$

$$dH = cp\, dT$$

$cp \rightarrow$ Calor específico del fluido

$T_0 \rightarrow$ Temperatura inical tomada como referencia

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)H+\rho A_T h\frac{dH}{dt}=Q+\rho F_E H_E-\rho A_s\sqrt{2gh}\,H$$

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)cp\left(T-T_0\right)+\rho A_T h\,cp\frac{dT}{dt}=Q+\rho F_E cp\left(T_E-T_0\right)-\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp\left(T-T_0\right)$$

La temperatura de salida corresponde
a la del fluido dentro del tanque

$$Q=UA_L\left(T_c-T\right)$$

$$A_L=A_T+\pi D_T h$$

$U \rightarrow$ Coeficiente de intercambio de calor

$T_c \rightarrow$ Temperatura de la camisa de calentamiento

$\mathrm{A_L} \rightarrow$ Área de contacto del liquido con la camisa

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)cp\left(T-T_0\right)+\rho A_T h\,cp\frac{dT}{dt}$$

$$=UA_T\left(T_c-T\right)+U\pi D_T h\left(T_c-T\right)+\rho F_E cp\left(T_E-T_0\right)-\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp\left(T-T_0\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\rho A_T\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)cp\left(T-T_0\right)+\rho A_T h\,cp\frac{dT}{dt}$$

$$=UA_T\left(T_c-T\right)+U\pi D_T h\left(T_c-T\right)+\rho F_E cp\left(T_E-T_0\right)-\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp\left(T-T_0\right)$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{UA_T}{\rho A_T h\,cp}\left(T_c-T\right)+\frac{U\pi D_T h}{\rho A_T h\,cp}\left(T_c-T\right)$$

$$+\frac{\rho F_E cp}{\rho A_T h\,cp}\left(T_E-T_0\right)-\frac{\rho A_s\sqrt{2gh}\,cp}{\rho A_T h\,cp}\left(T-T_0\right)-\frac{\rho A_T cp}{\rho A_T h\,cp}\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T-T_0\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dT}{dt}&=\frac{U}{\rho h\,cp}\left(T_c-T\right)+\frac{4U}{\rho D_T\,cp}\left(T_c-T\right)\\&+\frac{F_E}{A_T h}\left(T_E-T_0\right)-\frac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}\left(T-T_0\right)-\frac{1}{h}\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T-T_0\right)\end{aligned}}$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

Sistema de EDOs obtenido:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

2 ecuaciones

2 Incógnitas: h y T

$$\frac{dT}{dt}=\frac{U}{\rho h\,cp}\left(T_c-T\right)+\frac{4U}{\rho D_T\,cp}\left(T_c-T\right)$$
$$+\frac{F_E}{A_T h}\left(T_E-T_0\right)-\frac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}\left(T-T_0\right)-\frac{1}{h}\left(\frac{F_E}{A_T}-\frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T-T_0\right)$$

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$T \rightarrow$ Variable dependiente (temperatura)

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

$$\begin{cases} y'_1 = f_1\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m\right) \\ y'_2 = f_2\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m\right) \\ \vdots \\ y'_m = f_m\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{F_E}{A_T} - \dfrac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh} \\ \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{U}{\rho h\, cp}\left(T_c - T\right) + \dfrac{4U}{\rho D_T\, cp}\left(T_c - T\right) + \dfrac{F_E}{A_T h}\left(T_E - T_0\right) - \dfrac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}\left(T - T_0\right) - \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{F_E}{A_T} - \dfrac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)\left(T - T_0\right) \end{cases}$$

Resolución utilizando Euler:

$$f_1(t,T,h) = \frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

$$f_2(t,T,h) = \frac{U}{\rho h\, cp}(T_c - T) + \frac{4U}{\rho D_T\, cp}(T_c - T)$$

$$+\frac{F_E}{A_T h}(T_E - T_0) - \frac{A_s\sqrt{2g}}{A_T\sqrt{h}}(T - T_0) - \frac{1}{h}\left(\frac{F_E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}\right)(T - T_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = f_1(t,T,h) \\ \dfrac{dT}{dt} = f_2(t,T,h) \end{cases}$$

Formula recursiva utilizando Euler:

$$h_{i+1} = h_i + f_1\left(t_i, T_i, h_i\right)\Delta t$$

$$T_{i+1} = T_i + f_2\left(t_i, T_i, h_i\right)\Delta t$$

Condiciones iniciales :

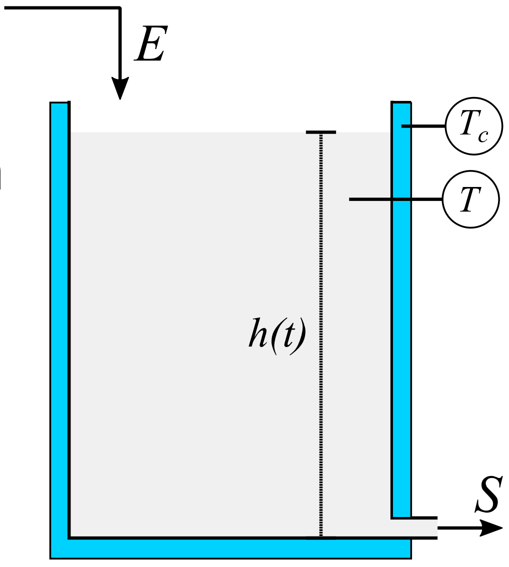
$$t = 0 \rightarrow h = h_0$$

$$t = 0 \rightarrow T = T_0$$

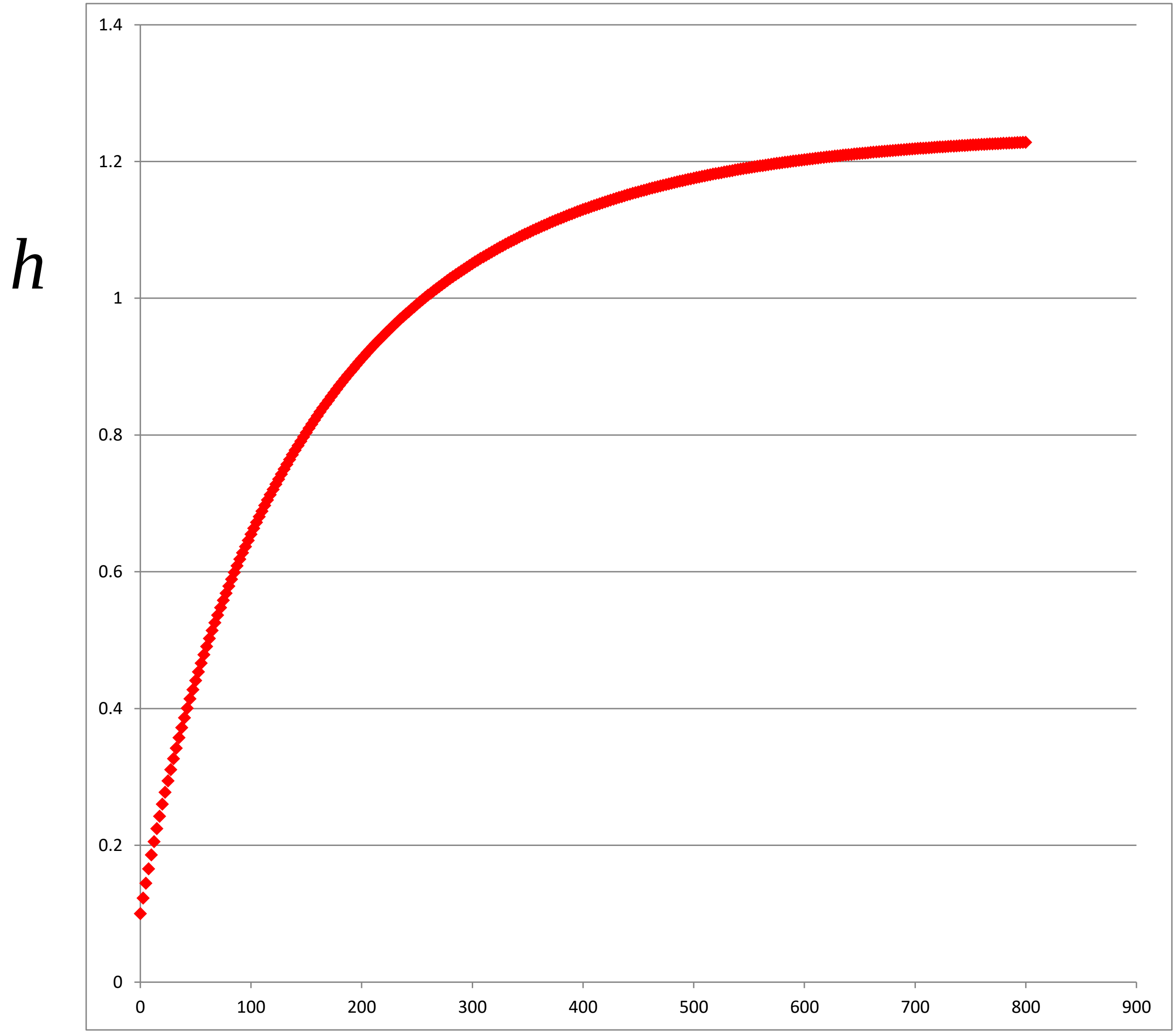
Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

Ejemplo practico:

- Caudal constante de alimentación (F_E=0.01 m^3/h)
- Altura inicial del tanque: h_0=0.1 m
- Diámetro del tanque: D_T=1 m
- Diámetro de orificio de salida: D_S= 0.0508 m
- Tiempo final 800 segundos
- Densidad del fluido ρ=1000 kg/m^3
- Temperatura inicial T_0=283.15 K
- Temperatura de alimentación T_E=283.15 K
- Temperatura de la camisa T_c=373.15 K
- Calor especifico del fluido cp=4.2 kJ/(kg K)
- Coeficiente de intercambio de calor U=1 kW/(m^2 K)

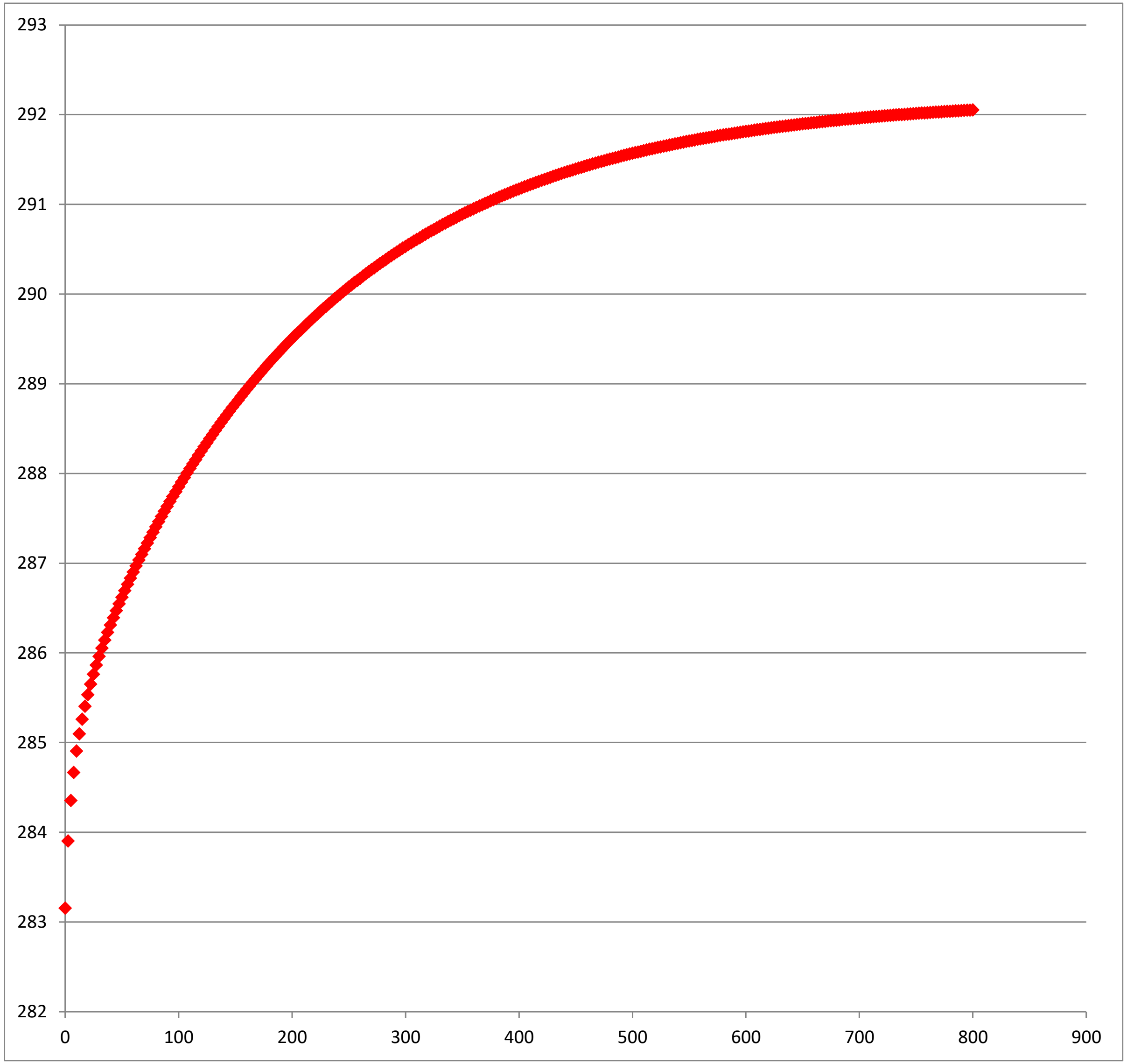


Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento



Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento

T



Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio y calentamiento