UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL ROSARIO
Departamento de Ingeniería Química

Cátedra: Integración IV

Tema: Resolución Numérica de Ecuaciones No Lineales (ENL)

Alumnos: Damián Matich, Marcos Bossi y Juan M. Pignani

Profesores: Dr. Nicolás Scenna, Dr. Alejandro Santa Cruz y Dra. Sonia Benz

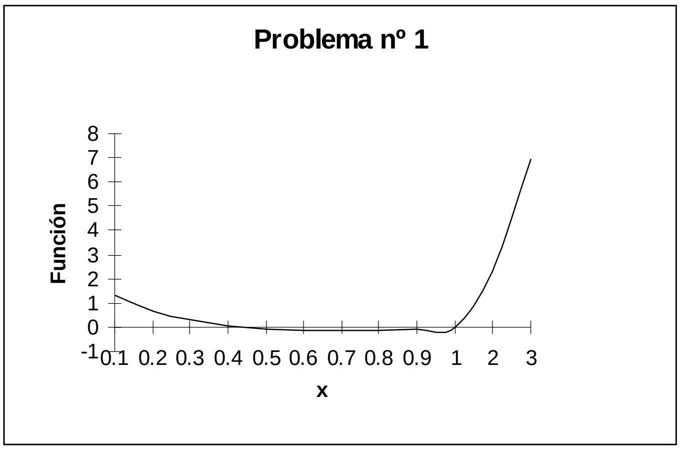
Año de cursado: 1999

Problema 1:

Sea la siguiente ecuación definida para $x > 0$:

$$x^2 - \text{Ln}(3x) + 1/9 = 0;$$

encontrar sus raíces por los siguientes métodos: (a) Aproximaciones sucesivas, y (b) Newton-Raphson.



a) Aproximaciones sucesivas:

Dada una función o una ecuación, si puede resolverse en forma explícita para una variable, es decir:

$$\text{dado } f(x) = 0;$$

$$\text{se propone: } x = F(x);$$

esto es, explicitando la variable independiente, se puede, establecer la fórmula para un algoritmo de un solo punto y estacionario, es decir:

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

Si x^* es raíz de $f(x)$, $f(x^*) = 0$, entonces $x^* = F(x^*)$. También se puede probar que sí: $|F'(x)| < 1$, $x \in I \subset x^*$ es convergente. Además, el método converge en forma lineal (p = 1).

$F(x)$ se puede hallar sumando la variable a explicitar a ambos miembros de la ecuación $f(x) = 0$, por lo tanto $x = f(x) + x = F(x)$

Cálculos:

x_n	f(x_n)	F(x_n)	Error
0.4000	0.08878	0.4887	0.08878
0.4887	-0.03276	0.4560	0.03276
0.4560	0.00566	0.4616	0.00566
0.4616	-0.00148	0.4602	0.00148
0.4602	0.00036	0.4605	0.00036
0.4605	-0.00009	0.4604	0.00009
0.4604	0.00002	0.4605	0.00002
0.4605	-0.00001	0.4605	0.00001

x_n	f(x_n)	F(x_n)	Error
0.9900	0.00264	0.9926	0.00264
0.9926	0.00522	0.9978	0.00522
0.9978	0.01038	1.0082	0.01038
1.0082	0.02086	1.0291	0.02086
1.0291	0.04288	1.0720	0.04288
1.0720	0.09217	1.1641	0.09217
1.1641	0.21580	1.3800	0.21580
1.3800	0.59480	1.9748	0.59480

Nota: Para la segunda raíz el método no converge ya que en las cercanías de la raíz $|F'(x)| > 1$.

El método se preparó en una planilla de cálculos con la siguiente estructura:

	A	B	C	D	
	x_n	*f(x_n)*	*F(x_n)*	Error	
1	0.40000	B3^2-LN(3*B3)+1/9	B3^2+B3-LN(3*B3)+1/9	ABS(D3-B3)	Preparación
2	C2	A3^2-LN(3*A3)+1/9	A3^2+A3-LN(3*A3)+1/9	ABS(C3-A3)	1º arrastre
3	C3	A4^2-LN(3*A4)+1/9	A4^2+A4-LN(3*A4)+1/9	ABS(C4-A4)	2º arrastre
4	C4	A5^2-LN(3*A5)+1/9	A5^2+A5-LN(3*A5)+1/9	ABS(C5-A5)	
5	C5	A6^2-LN(3*A6)+1/9	A6^2+A6-LN(3*A6)+1/9	ABS(C6-A6)	
6	C6	A7^2-LN(3*A7)+1/9	A7^2+A7-LN(3*A7)+1/9	ABS(C7-A7)	
7	C7	A8^2-LN(3*A8)+1/9	A8^2+A8-LN(3*A8)+1/9	ABS(C8-A8)	
8	C8	A9^2-LN(3*A9)+1/9	A9^2+A9-LN(3*A9)+1/9	ABS(C9-A9)	

Preparación: las fórmulas deben ingresarse manualmente; 1º arrastre: algunas de las fórmulas son arrastradas de la fila anterior; 2º arrastre: las ecuaciones de la fila anterior son arrastradas hasta obtener el valor del error especificado, en el caso de que el método converja.

b) Newton-Raphson:

Es un método modificado de aproximaciones sucesivas, con un orden de convergencia cuadrático (p = 2). Siendo la expresión general:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cálculos:

x_n	f(x_n)	f ′(x_n)	x_{n+1}	Error
0.4000	0.08879	-1.7000	0.4522	0.05223
0.4522	0.01058	-1.3068	0.4603	0.00809
0.4603	0.00022	-1.2517	0.4605	0.00018
0.4605	$1.07 \cdot 10^{-07}$	-1.2505	0.4605	$8.6 \cdot 10^{-8}$
0.4605	$2.47 \cdot 10^{-14}$	-1.2505	0.4605	$1.97 \cdot 10^{-14}$
0.4605	0.00000	-1.2505	0.4605	0.00000

x_n	f(x_n)	f ′(x_n)	x_{n+1}	Error
0.9900	0.00265	0.9699	0.9873	0.00273
0.9873	$1.12 \cdot 10^{-05}$	0.9616	0.9873	$1.17 \cdot 10^{-05}$
0.9873	$2.07 \cdot 10^{-10}$	0.9616	0.9873	$2.16 \cdot 10^{-10}$
0.9873	$5.55 \cdot 10^{-17}$	0.9616	0.9873	$1.11 \cdot 10^{-16}$
0.9873	$-1.66 \cdot 10^{-16}$	0.9616	0.9873	$2.22 \cdot 10^{-16}$
0.9873	$2.77 \cdot 10^{-16}$	0.9616	0.9873	$3.33 \cdot 10^{-16}$

El método se preparó en una planilla de cálculos con la siguiente estructura:

	A	B	C	D	E	
1	x_n	f(x_n)	f '(x_n)	x_{n+1}	Error	
2	0.4	A2^2-LN(3*A2)+1/9	2*A2-1/A2	A2-B2/C2	ABS(D2-A2)	Preparación
3	D2	A3^2-LN(3*A3)+1/9	2*A3-1/A3	A3-B3/C3	ABS(D3-A3)	1º arrastre
4	D3	A4^2-LN(3*A4)+1/9	2*A4-1/A4	A4-B4/C4	ABS(D4-A4)	2º arrastre
5	D4	A5^2-LN(3*A5)+1/9	2*A5-1/A5	A5-B5/C5	ABS(D5-A5)	
6	D5	A6^2-LN(3*A6)+1/9	2*A6-1/A6	A6-B6/C6	ABS(D6-A6)	
7	D6	A7^2-LN(3*A7)+1/9	2*A7-1/A7	A7-B7/C7	ABS(D7-A7)	

Preparación: las fórmulas deben ingresarse manualmente; 1º arrastre: algunas de las fórmulas son arrastradas de la fila anterior; 2º arrastre: las ecuaciones de la fila anterior son arrastradas hasta obtener el valor del error especificado, en el caso de que el método converja.

<u>Problema Número 2</u>:

Para el flujo isoentrópico de un gas perfecto que fluye desde un reservorio a través de una boquilla convergente-divergente, operando con velocidad sónica en la constricción, se puede demostrar que:

$$\frac{A_C^2}{A^2} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{P}{P_r}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{P}{P_r}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}\right]$$

donde: P es la presión sobre el área transversal A de la boquilla, P_r es la presión en el reservorio, A_C es la sección transversal en la constricción y γ es la relación entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante.

Idear un esquema para calcular las dos posibles presiones que satisfacen la ecuación, siendo: A_C = 0.1 pie^2, A = 0.12 pie^2, P_r = 100 psia y γ = 1.41

Resolución:

Las dos posibles presiones se hallaron aplicando el método de Newton-Raphson en una planilla de cálculo. Para esto es necesario reescribir la ecuación anterior de la forma:

$$f(P) = 14.59795*[(P/100)^{1.418} – (P/100)^{1.709}] – 0.694 = 0;$$

con la que se obtuvieron los siguientes valores de presión (psia):

P_n	f(P_n)	f '(P_n)	P_{n+1}	Error
25.0000	-0.01533	0.0225	25.6804	0.68040
25.6804	-0.00012	0.0220	25.6857	0.00531
25.6857	$3.69*10^{-07}$	0.0220	25.6857	$1.67*10^{-05}$
25.6857	$-1.19*10^{-09}$	0.0220	25.6857	$5.42*10^{-08}$
25.6857	$3.87*10^{-12}$	0.0220	25.6857	$1.76*10^{-10}$
25.6857	$-1.23*10^{-14}$	0.0220	25.6857	$5.57*10^{-13}$
25.6857	$-5.55*10^{-16}$	0.0220	25.6857	$2.48*10^{-14}$

P_n	f(P_n)	f '(P_n)	P_{n+1}	Error
75.0000	0.08562	-0.0200	79.2734	4.27344
79.2734	-0.00766	-0.0239	78.9529	0.32049
78.9529	$-9.04*10^{-05}$	-0.0236	78.9491	0.00383
78.9491	$-5.33*10^{-07}$	-0.0236	78.9491	$2.26*10^{-05}$
78.9491	$-3.10*10^{-09}$	-0.0236	78.9491	$1.31*10^{-07}$
78.9491	$-1.80*10^{-11}$	-0.0236	78.9491	$7.66*10^{-10}$
78.9491	$-1.06*10^{-13}$	-0.0236	78.9491	$4.49*10^{-12}$