Integración IV

Modelado individual de equipos en estado dinámico (I)

2021

Profesor: Dr. Nicolás J. Scenna
JTP: Dr. Néstor H. Rodríguez
Aux. 1ra: Dr. Juan I. Manassaldi

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) corresponde a una expresión de la forma:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0$$

Luego, si $y = f(x)$

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right) = 0$$

variable independiente

variable dependiente

n primeras derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente

La denominación de "ordinaria" se debe a que solo existen derivadas totales. Es decir, una sola variable independiente.

Introducción

Expresión implícita:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Expresión explícita:

$$y^{n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$$

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Orden: máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación diferencial.

Grado: grado algebraico de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial.

Lineal: la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en términos lineales dentro de la ecuación diferencial.

No Lineal: la variable dependiente y/o alguna de sus derivadas aparecen en términos no-lineales dentro la ecuación diferencial.

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

Diremos que una función $y\colon [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial si se cumple que:

- Existe la derivada n-ésima de y en todo punto del intervalo$[a, b]$
- $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n}(x)) \in \mathbb{R}^{n+2}$ para todo $x \in [a, b]$
- $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n}(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

Introducción

Para encontrar $y(x)$ (solución) es necesario efectuar n integraciones, lo cual implica que deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse que:

$$y = g\left(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right)$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Dependiendo como se elijan estos valores o constantes para particularizar una solución, distinguimos dos tipos de problemas:

1. Problema de valores iniciales
2. Problemas de valores de contorno

Introducción

Se define problema de valores iniciales o de Cauchy al problema de la forma:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0 \;\; x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

Introducción

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0$$

La solución puede obtenerse de dos maneras:

- **Analítica** (exacta): Se obtiene la ley funcional o expresión analítica de la función en el intervalo.
- **Numérica** (aproximada): Se obtienen valores que toma la función dentro del intervalo.

Balance de materia en sistemas dinámicos

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \text{Flujo de masa que} \\ \text{ingresa al sistema} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Flujo de masa que} \\ \text{abandona el sistema} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{velocidad de variación} \\ \text{de la masa dentro del sistema} \end{bmatrix}$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- La ecuación de diseño en estado estacionario que estamos acostumbrados a usar dice que "lo que entra, sale".
- La versión dinámica dice lo mismo con la adición de la palabra "eventualmente".
- El lado derecho será una derivada parcial o una derivada ordinaria de la masa dentro del sistema con respecto a la variable independiente tiempo (t).

Balance de materia en sistemas dinámicos

- Balance materia global de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{ingresa al sistema}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Flujo de masa que}\\ \text{abandona el sistema}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de la masa dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

Las unidad de esta ecuación es masa/tiempo

- Balance materia por componentes de un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\text{Flujo de moles}\\ \text{del componente i}\\ \text{que ingresan al sistema}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Flujo de moles}\\ \text{del componente i}\\ \text{que abandonan el sistema}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{velocidad de formación}\\ \text{de moles del componente i}\\ \text{por reacción química}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{velocidad de variación}\\ \text{de moles del componente i}\\ \text{dentro del sistema}\end{bmatrix}$$

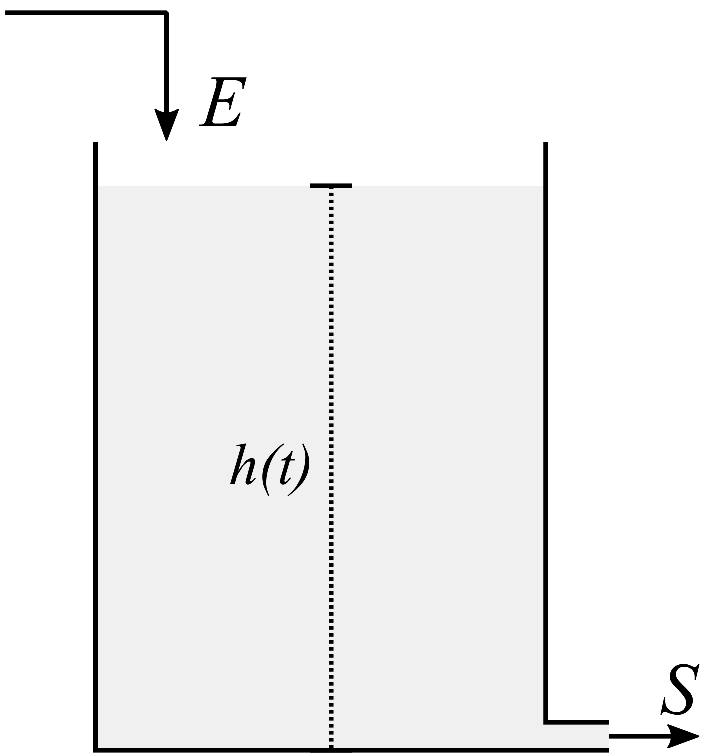
Las unidad de esta ecuación es moles/tiempo

Ambas ecuaciones pueden expresarse en masa/tiempo o moles/tiempo mediante una apropiada conversión

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

- Balance de materia en el tanque: Acumulación = Entrada – Salida

HOLDUP de materia

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s$$

$M \rightarrow$ Masa de fluido dentro del tanque

$m_e \rightarrow$ Flujo masico de entrada de fluido

$m_s \rightarrow$ Flujo masico de salida de fluido

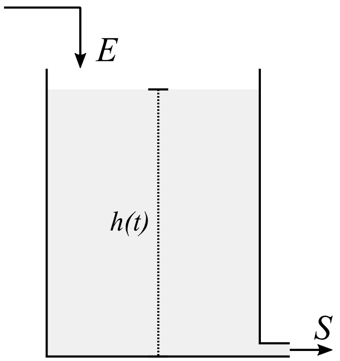
$$M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{d\rho A_T h}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

¡Fácilmente medible!



Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

$$m_e = \rho E \qquad E \rightarrow \text{Caudal volumetrico de entrada}$$

$$m_s = \rho S \qquad S \rightarrow \text{Caudal volumetrico de salida}$$

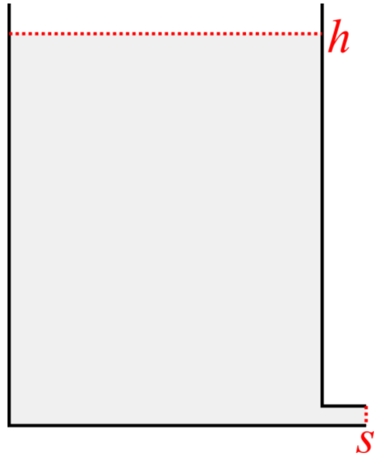
$$m_s = \rho A_s v_s \qquad A_s \rightarrow \text{Area de salida del tanque}$$

$$v_s \rightarrow \text{velocidad de salida del tanque}$$

Bernoulli en la superficie y salida:

$$\cancel{\frac{{v_h}^2 \rho}{2}} + \cancel{P_h} + \rho g h = \frac{{v_s}^2 \rho}{2} + \cancel{P_s} + \cancel{\rho g h_s}$$

$$v_h = 0 \qquad P_h = P_s \qquad h_s = 0$$



$$\rho g h = \frac{{v_s}^2 \rho}{2} \rightarrow v_s = \sqrt{2gh}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Luego: $\rho A_T \dfrac{dh}{dt} = m_e - m_s$

$$\cancel{\rho} A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho A_s v_s = \cancel{\rho} E - \cancel{\rho} A_s \sqrt{2gh}$$

Finalmente:

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - A_s \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}}$$ EDO

$t \rightarrow$ Variable independiente (tiempo)

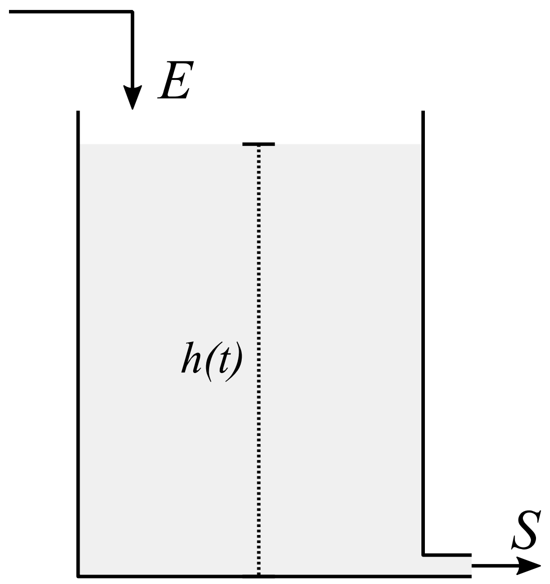
$h \rightarrow$ Variable dependiente (altura)

$t = 0 \rightarrow h = h_0$ (problema de valor inicial)

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Ejemplo practico:

- Vaciado del tanque (E=0)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Diámetro de orificio de salida: 0.0508 m
- Tiempo final 320 segundos



$$A_T = \frac{\pi D_T^{\ 2}}{4} \quad A_s = \frac{\pi D_s^{\ 2}}{4} \quad \rightarrow A_T \frac{dh}{dt} = -A_s \sqrt{2gh} \rightarrow \frac{\pi D_T^{\ 2}}{4} \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi D_s^{\ 2}}{4} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_s^{\ 2}}{D_T^{\ 2}} \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}}$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f_i\left(x, y_i\right)\Delta x$$

$x \rightarrow$ Variable independiente

$y \rightarrow$ Variable dependiente

$\Delta x \rightarrow$ Incremento o salto

y

$$\frac{dh}{dt} = \underbrace{-2.58064\times10^{-3}\sqrt{2gh}}_{f(x,y)}$$

x

$$\boxed{h_{i+1} = h_i + f\left(t_i, h_i\right)\Delta t}$$

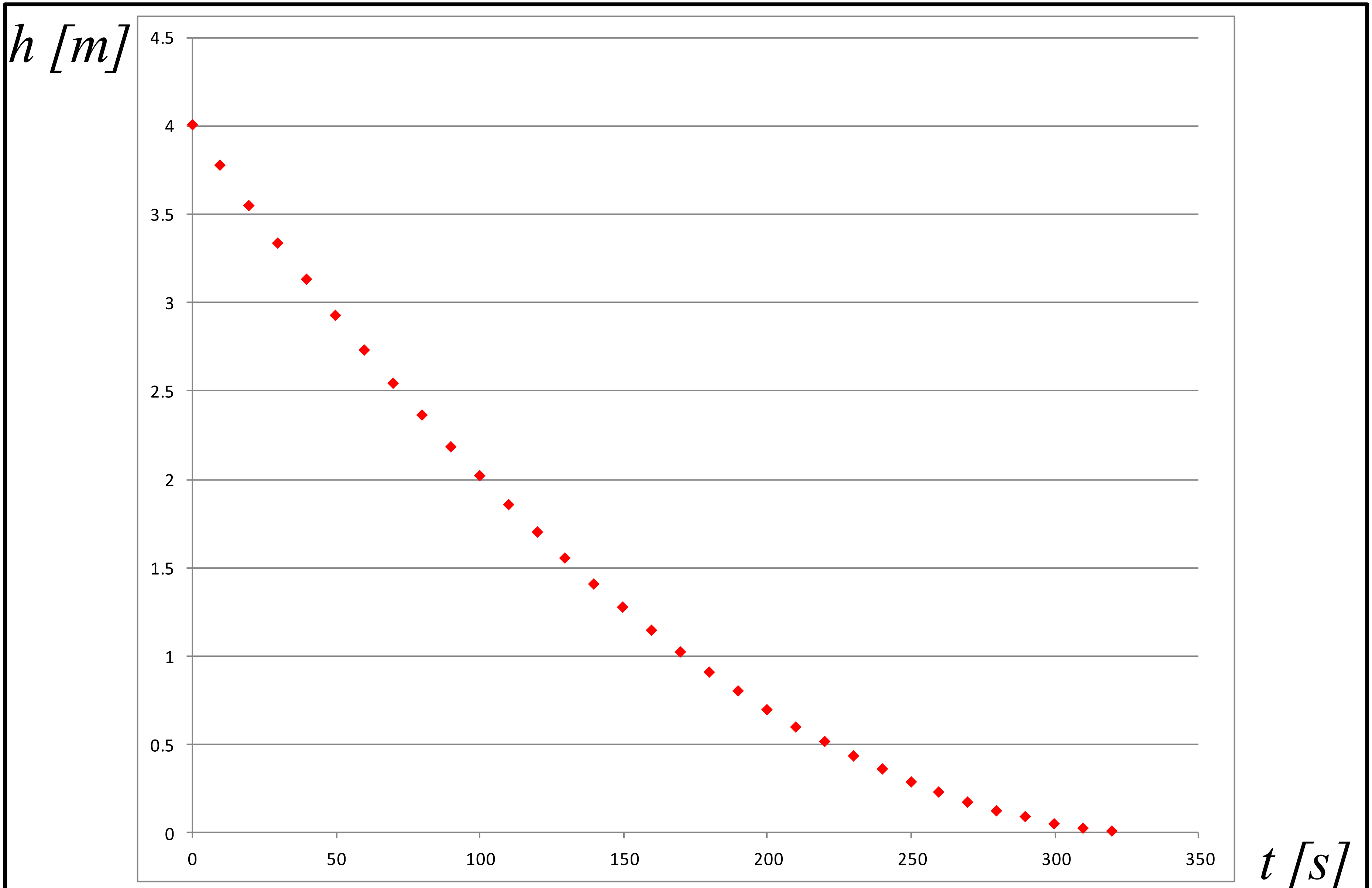
Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando el método de Euler ($\Delta t = 10\ seg$):

i	t	h	f
0	0	4	–0.02284996
1	10	3.77150039	–0.02218771
2	20	3.54962326	–0.02152517
⋮	⋮	⋮	⋮
32	320	0.006625	–0.00092993

$$h_{i+1} = h_i + f\left(t_i, h_i\right)\Delta t$$

Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Método de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de 4to orden (mas difundido) corresponde a:

$$\varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_{i+0.5}, y_i + 0.5\Delta x k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_{i+1}, y_i + \Delta x k_3\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

Solución Utilizando Runge-Kutta de 4er orden :

$$\frac{dh}{dt} = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh} \rightarrow f(t,h) = -2.58064 \times 10^{-3} \sqrt{2gh}$$

$$h_{i+1} = h_i + \varnothing \Delta t \qquad \varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \qquad k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \qquad k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio

i	t	h	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	4	-0.02284996	-0.022817305	-0.02281735	-0.0227847
1	1	$\boxed{3.97718267}$				

$$\begin{cases} \varnothing = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ h_1 = h_0 + \varnothing \Delta t \end{cases}$$

Ejemplo para $t=0$ ($i=0$) y $\Delta t=1$ *seg*:

$$f\left(t,h\right) = -2.58064\times 10^{-3}\sqrt{2gh}$$

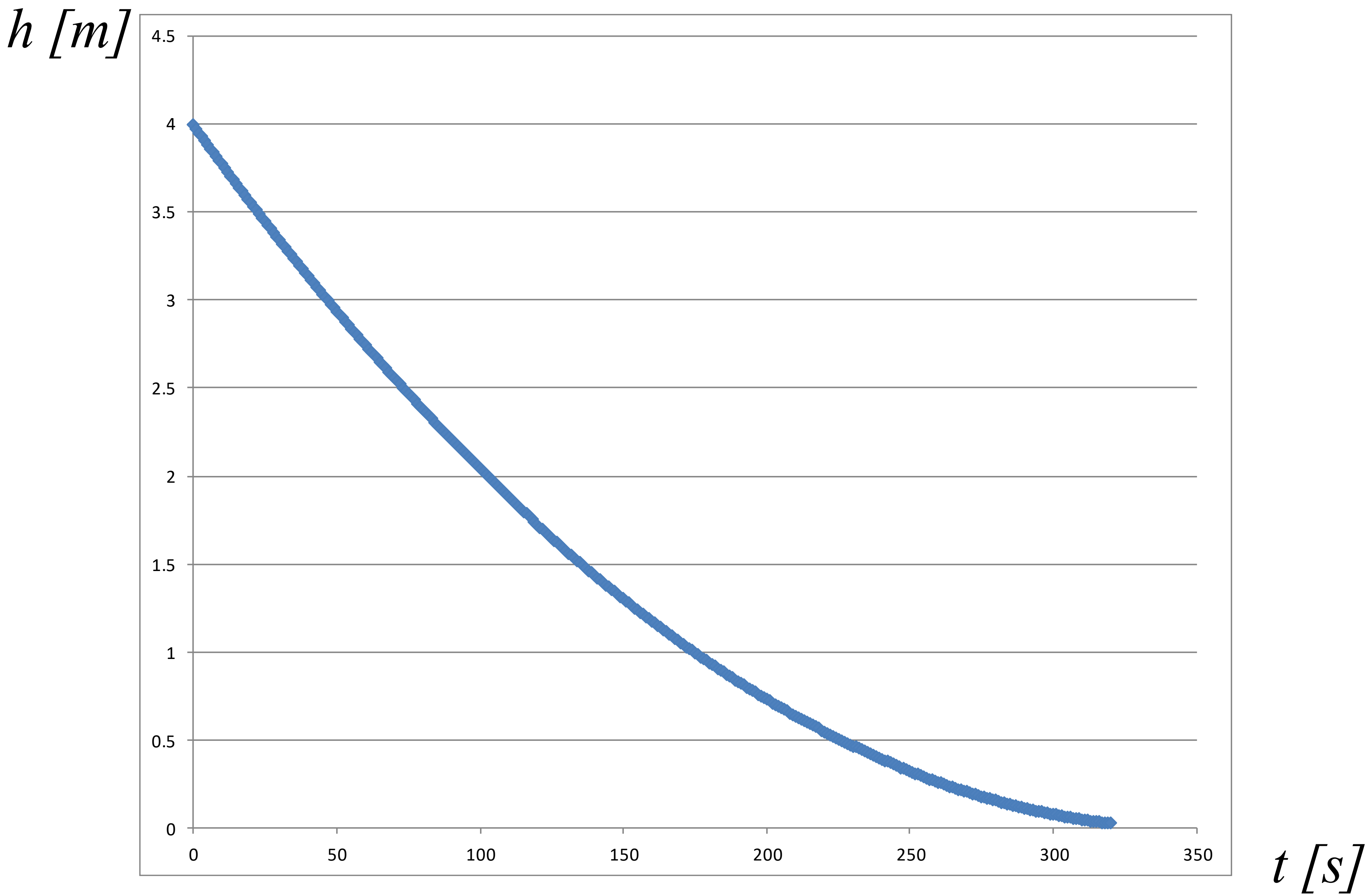
$$k_1 = f\left(t_i, h_i\right) \rightarrow k_1 = f\left(0,4\right)$$

$$k_2 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_1\right) \rightarrow k_2 = f\left(0.5, 4 + 0.5\times 1\times k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{i+0.5}, h_i + 0.5\Delta t k_2\right) \rightarrow k_3 = f\left(0.5, 4 + 0.5\times 1\times k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_{i+1}, h_i + \Delta t k_3\right) \rightarrow k_4 = f\left(1, 4 + 1\times k_3\right)$$

Ejemplo: Tanque abierto con flujo de salida gravitatorio



Métodos Implícitos de Resolución de EDOs

- El avance se realiza paso a paso en el tiempo pero se realiza un proceso iterativo para dar por finalizado el paso.
- Métodos más difundidos:
  - Euler implícito
  - Euler-Gauss

Método Implícito de Euler

Algoritmo: $\underline{y_{i+1}} = y_i + f\left(x_{i+1}, \underline{y_{i+1}}\right)\Delta x$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

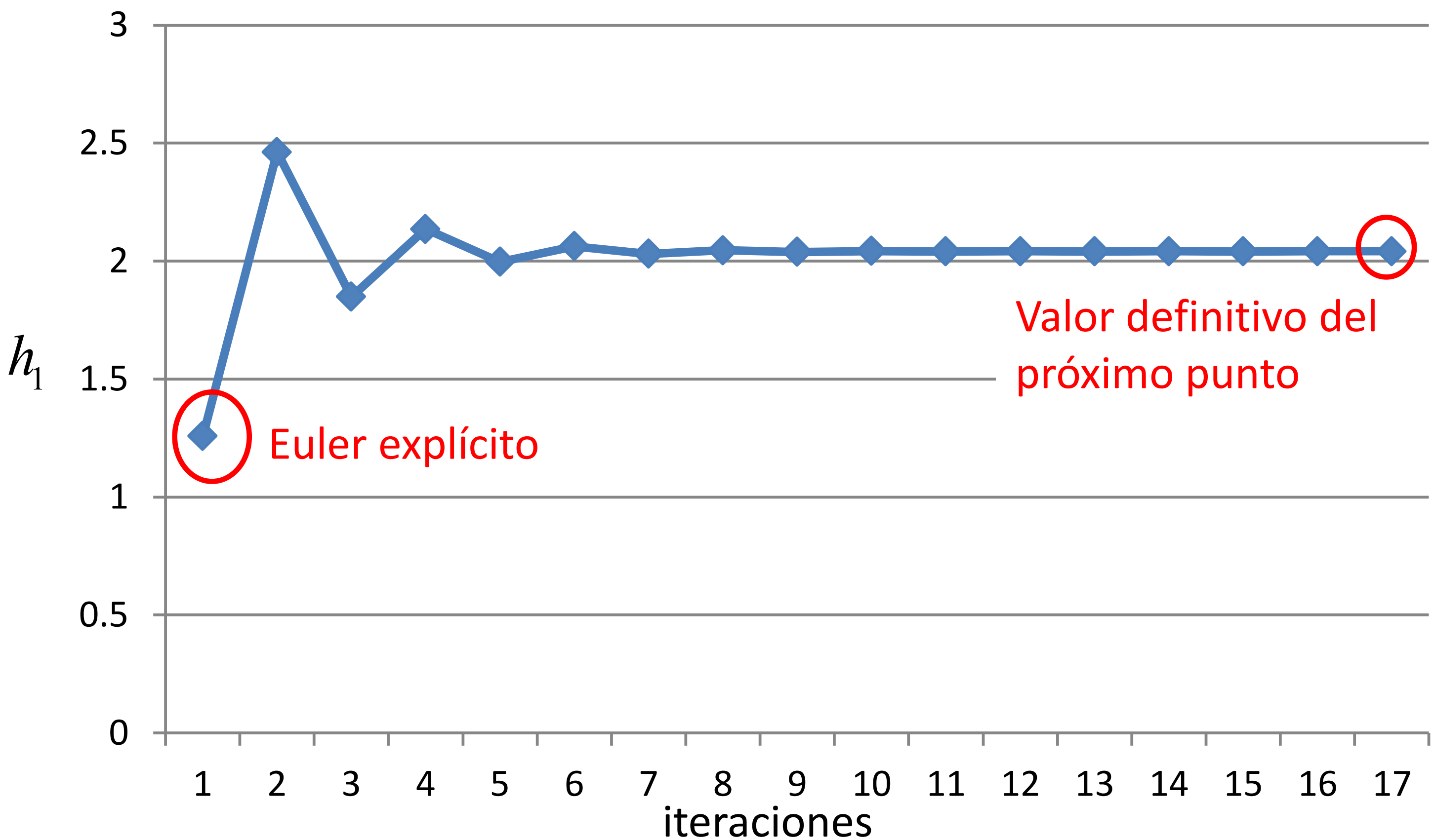
$$\frac{dh}{dt} = -2.58064\times 10^{-3}\sqrt{2gh} \qquad h_{i+1} = h_i + f_i\left(t_{i+1}, h_{i+1}\right)\Delta t$$

$$h_{i+1} = h_i - 2.58064\times 10^{-3}\sqrt{2gh_{i+1}}\,\Delta t$$

Método Implícito de Euler

Ejemplo: $h_0 = 4\,m$; $\Delta t = 120\ seg$

$$h_1 = 4 - 2.58064\times10^{-3}\sqrt{2\times9.8\times h_1}\times120$$



Método Implícito de Euler-Gauss

Algoritmo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right]$$

Se debe iterar hasta cerrar la igualdad

Análisis:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right]$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}\left[\boxed{y_i + f\left(x_i, y_i\right)} + \boxed{y_i + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)}\right]$$

Euler explícito   Euler implícito

Modelos simples de válvulas

- Las válvulas de control son conceptualmente orificios de área variable.
- Se las puede considerar simplemente como una restricción que cambia su tamaño de acuerdo a un pedido por parte del controlador u operador.
- Al pasar un fluido por una restricción , la fórmula (para líquidos) que vincula el caudal con la diferencia de presión entre la entrada y la salida es:

$$Q = k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula

$\rho \rightarrow$ Densidad del fluido

$k \rightarrow$ Constante del orificio

$$Q = k^{'}\sqrt{\frac{\Delta P^{*}}{G}}$$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido

Modelos simples de válvulas

- El predominio histórico de los fabricantes de válvulas en Estados Unidos ha llevado a que las características de las válvulas se den a menudo en unidades estadounidenses.
- Para gases suele utilizarse la misma ecuación pero utilizando la gravedad especifica referenciada al aire y el caudal expresado de forma estándar.

$$Q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula $[US\ gpm]$

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula $[psi]$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60°F}^{agua}$ $[adim]$

$C_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 ºF

$$Q = K_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G}}$$

$Q \rightarrow$ Caudal volumetrico que atravieza la válvula $[m^3/h]$

$\Delta P \rightarrow$ Diferencia de presión a traves de la válvula $[bar]$

$G \rightarrow$ Gravedad específica del fluido $\rho / \rho_{60°F}^{agua}$ $[adim]$

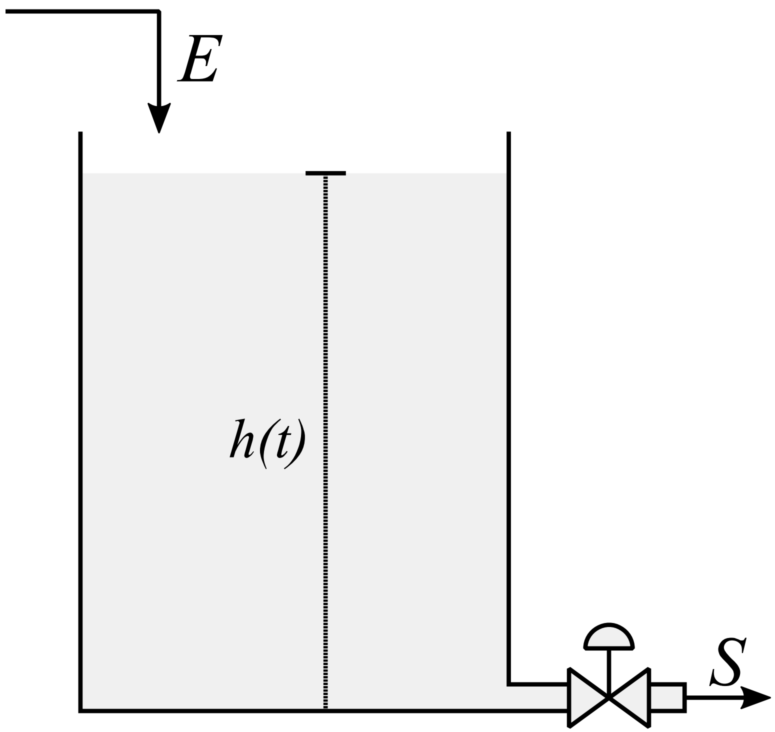
$K_v \rightarrow$ Coeficiente de la válvula para agua a 60 ºF

$$C_V = 1.15 K_V$$

Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico



Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s \qquad M = \rho V = \rho A_T h \rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho A_T \frac{dh}{dt}$$

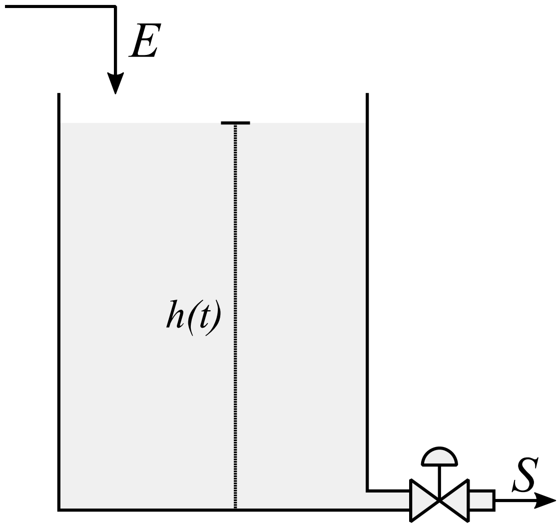
ρ cte

A_T cte

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = m_e - m_s$$

$$\rho A_T \frac{dh}{dt} = \rho E - \rho S$$

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$



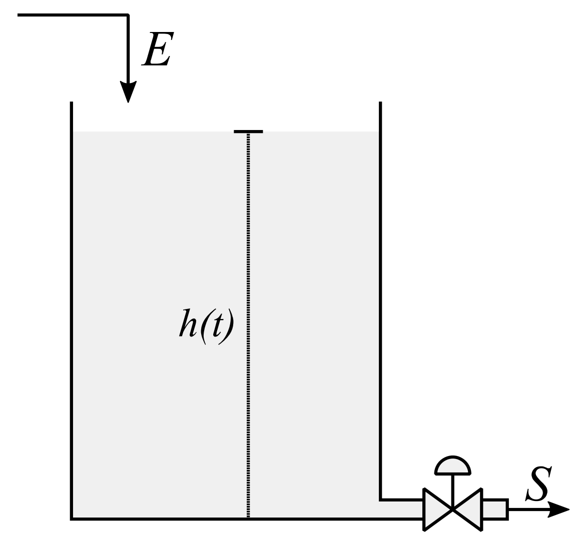
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

$$S = C_v \sqrt{\Delta P_s / \rho} \rightarrow S = C_v \sqrt{\left(P_f - P\right)_s / \rho}$$

$$P_0 = P_s$$

$$S = C_v \sqrt{\left(\cancel{P_0} + \cancel{\rho} gh - \cancel{P_s}\right)_s / \cancel{\rho}}$$

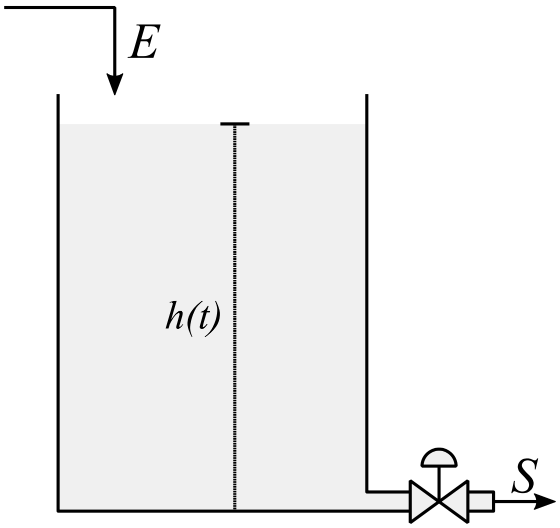


$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T}\sqrt{gh}}$$

Tanque abierto con descarga regulada por una válvula

Ejemplo practico:

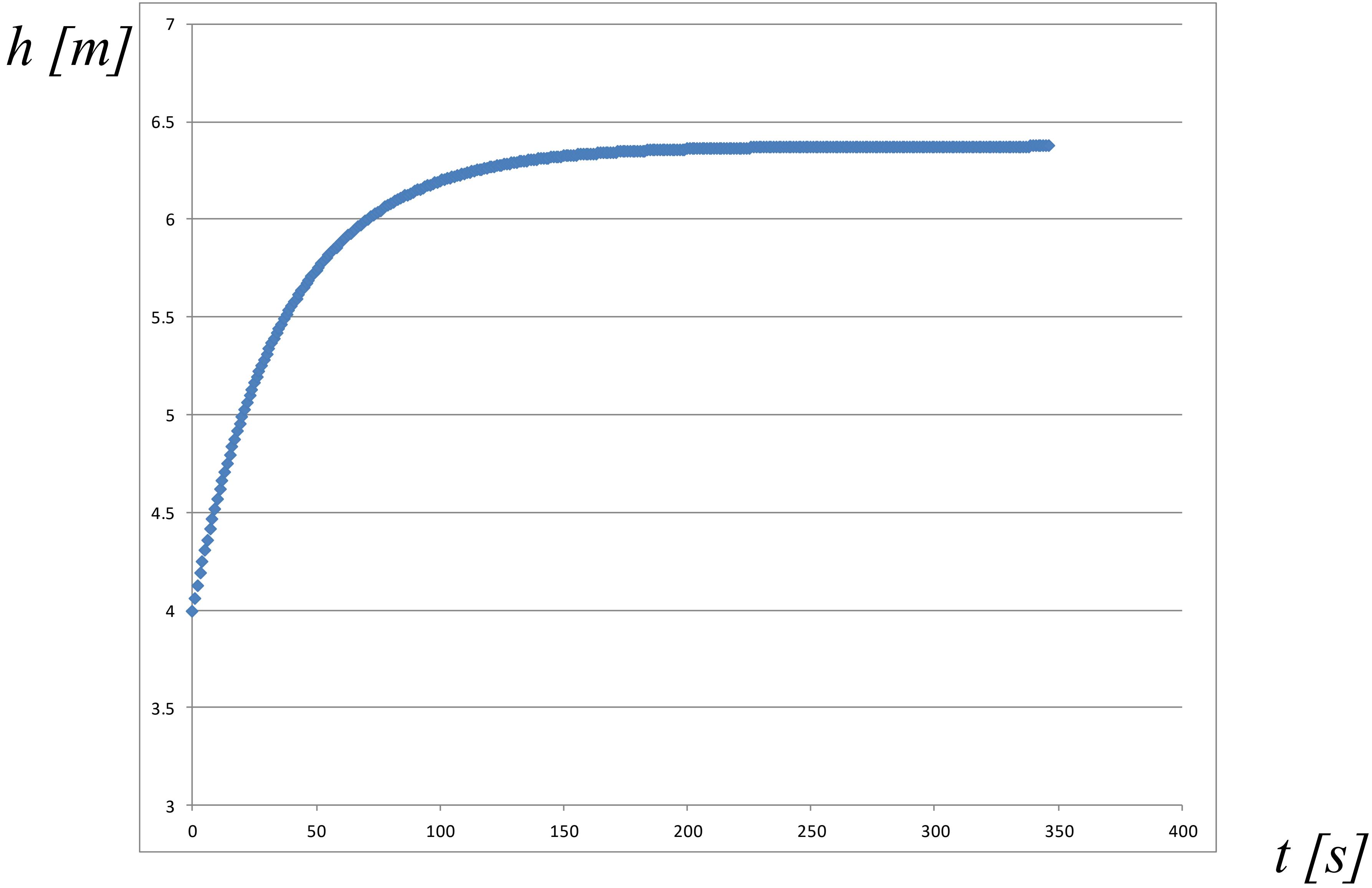
- Caudal de entrada ($E=0.25\ m^3/seg$)
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Cv de la válvula de descarga: 0.0316 m^2



$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{A_T} - \frac{C_v}{A_T}\sqrt{gh}$$

$$t = 0 \rightarrow h = 4\ m$$

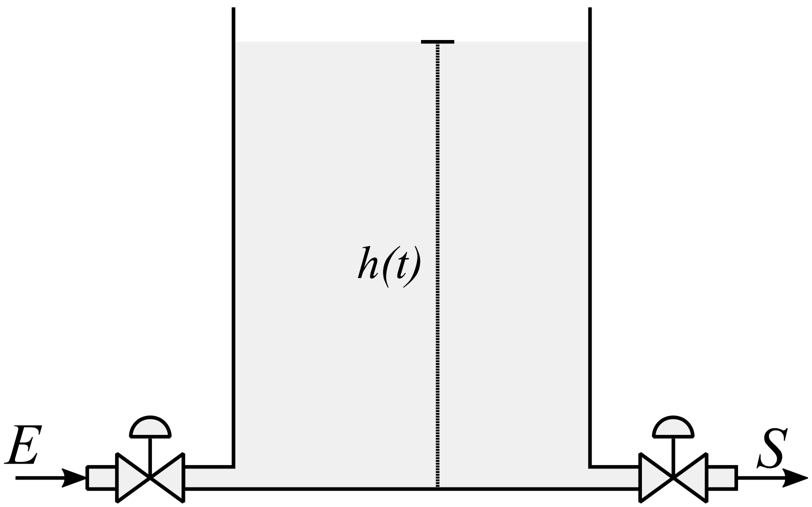
Tanque abierto con descarga regulada por una válvula



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

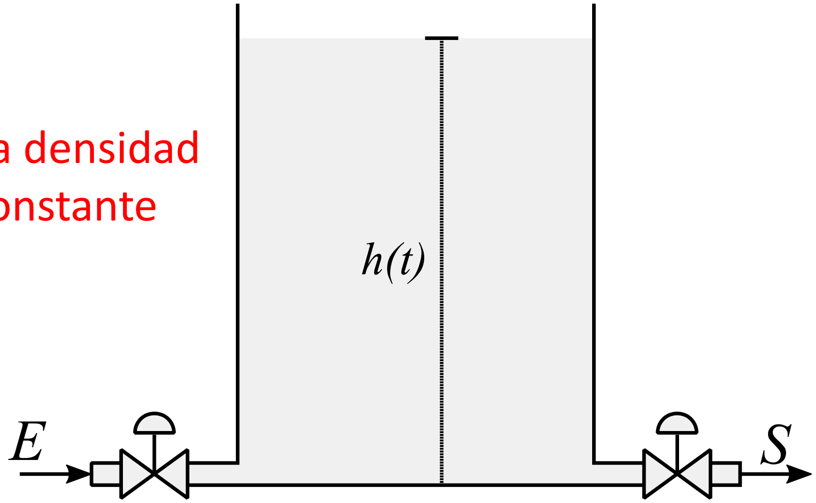
Hipótesis

- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- Evaporación despreciable
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

- Balance de materia en el tanque:



$$A_T \frac{dh}{dt} = E - S$$

¡Cuidado!: Solo para densidad y área transversal constante

$$E = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_f\right)/\rho} \qquad S = C_{v2}\sqrt{\left(P_f - P_s\right)/\rho}$$

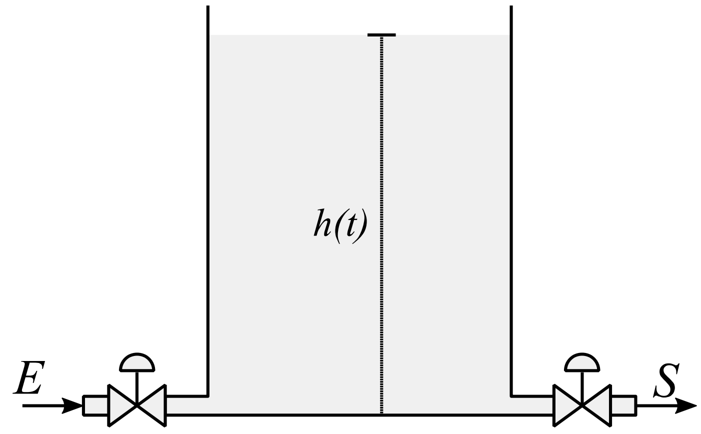
$$E = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} \qquad S = C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$\boxed{A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}}$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

Ejemplo practico:

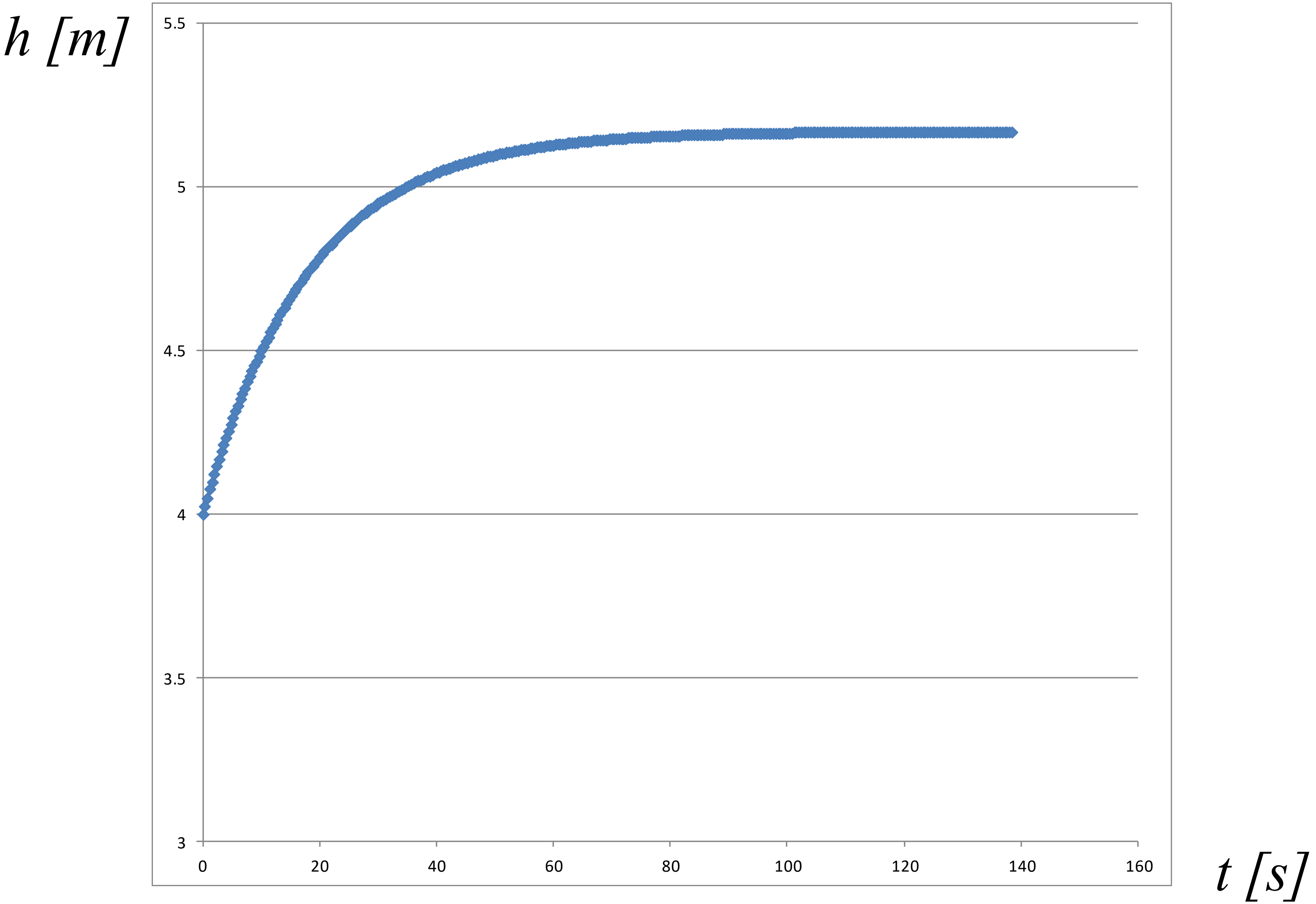
- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión en la superficie del liquido $P_0=101325\ Pa$
- Presión de descarga igual a la superior del tanque ($P_s=P_0$)
- Presión de entrada: $P_E=202650\ Pa$



$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_0 - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_0 + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

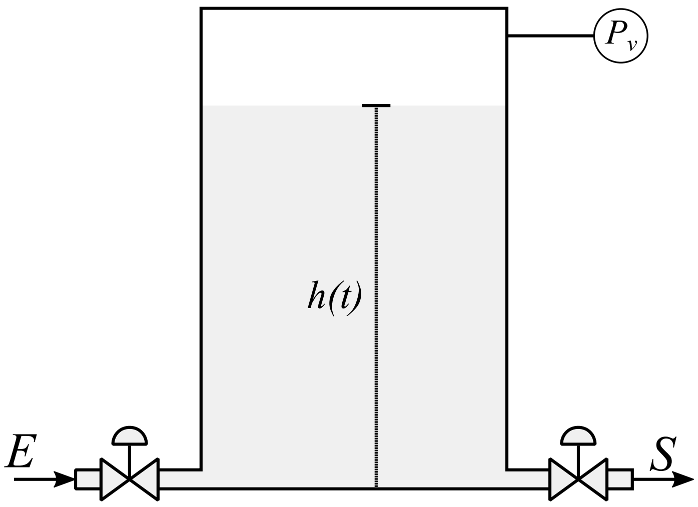
$$t = 0 \rightarrow h = 4\,m$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis



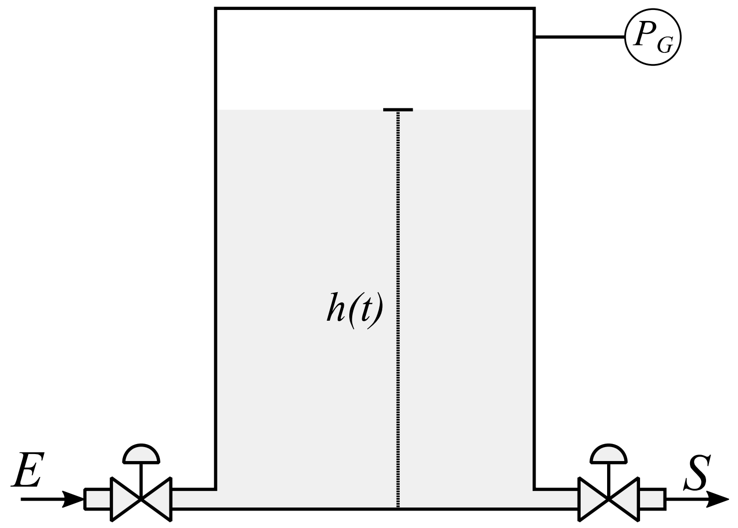
- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- El vapor sobre el liquido se encuentra en equilibrio.
- <u>Holdup de vapor despreciable</u>

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_v - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_v + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

Hipótesis

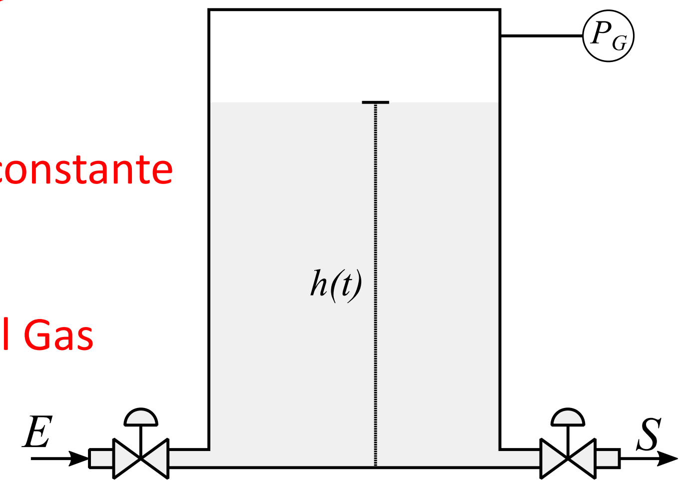
- Sistema adiabático
- La densidad es constante
- No hay reacción química
- Tanque cilíndrico
- Presión de entrada y de salida conocidas
- <u>Holdup de vapor no despreciable y constante</u>



Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{P_E - \boxed{P_G} + \rho g h / \rho} - C_{v2}\sqrt{\boxed{P_G} + \rho g h - P_s / \rho}$$

¡Varía con la altura!



$$M_G = \rho_G V_G$$ Holdup del gas no despreciable y constante

$$\rho_G = \frac{P_G}{R' T}$$ Asumiendo comportamiento ideal del Gas

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{R' T_G^0} = \frac{P_G V_G}{R' T_G}$$

$$V_G = V_T - A_T h$$

$$\frac{P_G^0 V_G^0}{T_G^0} = \frac{P_G V_G}{T_G}$$

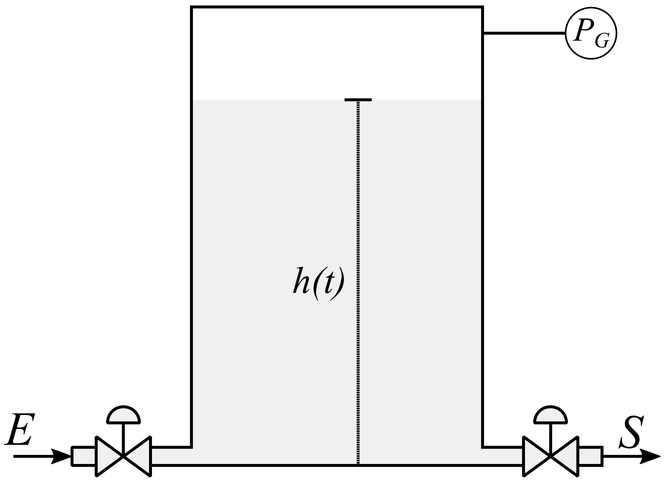
Se desprecia la variación de temperatura

$$P_G = \frac{P_G^0 \left(V_T - A_T h^0\right)}{\left(V_T - A_T h\right)}$$

Tanque cerrado con entrada y descarga regulada por válvula

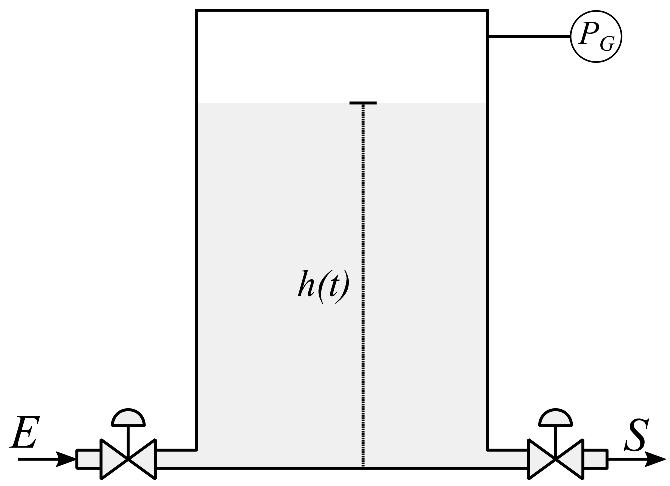
$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_G - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_G + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$P_G = \frac{P_G^0\left(V_T - A_T h^0\right)}{\left(V_T - A_T h\right)}$$



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula

Ejemplo practico:

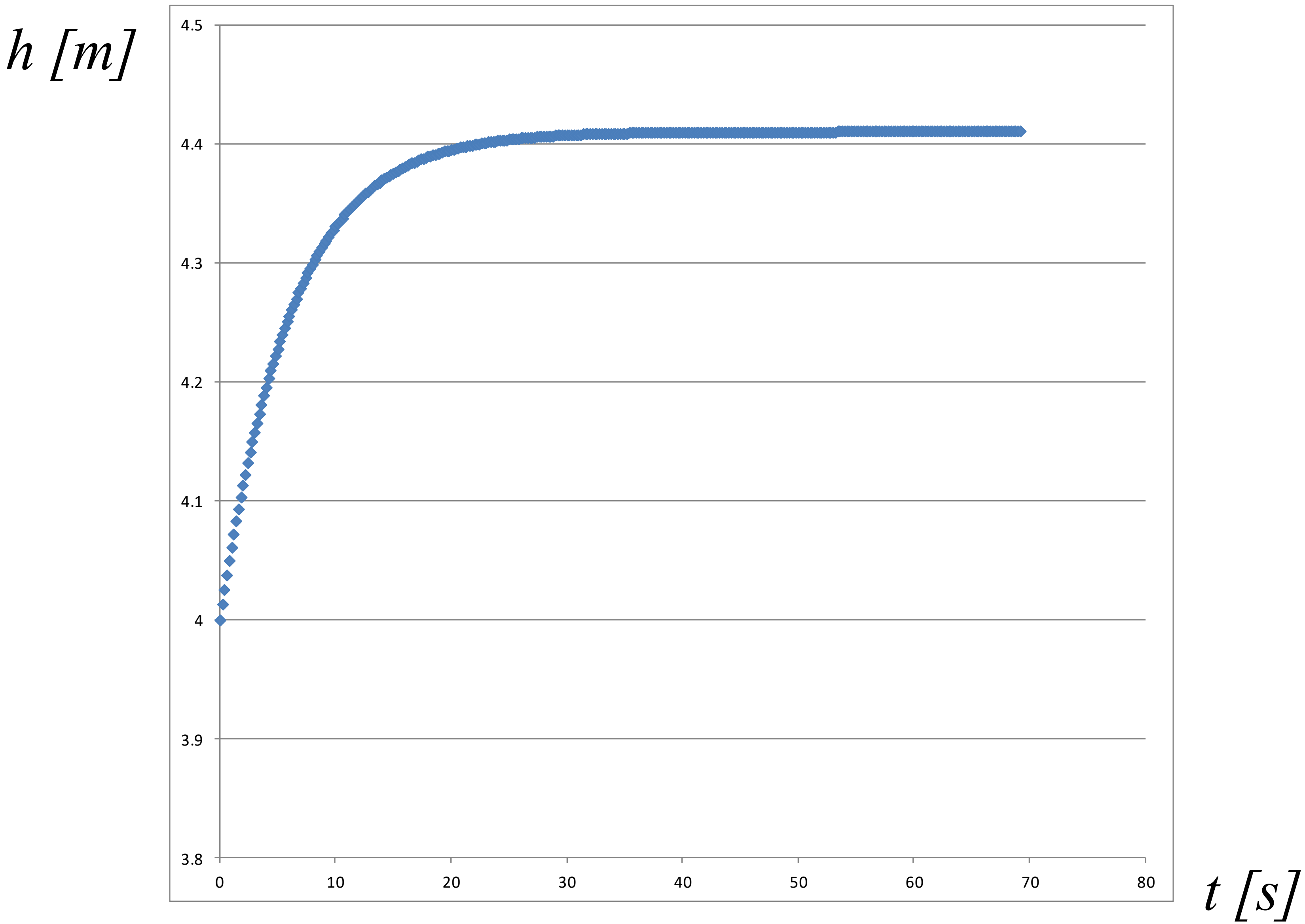


- Altura inicial del tanque: 4 m
- Diámetro del tanque: 1 m
- Altura del tanque: 10 m
- C_{v1} y C_{v2} de las válvulas: 0.0316 m^2
- Densidad del fluido: 1000 kg/m^3
- Presión de descarga : $P_s=101325\ Pa$
- Presión de entrada: $P_E=202650\ Pa$
- Presión inicial del gas: $P_G^0= 101325\ Pa$

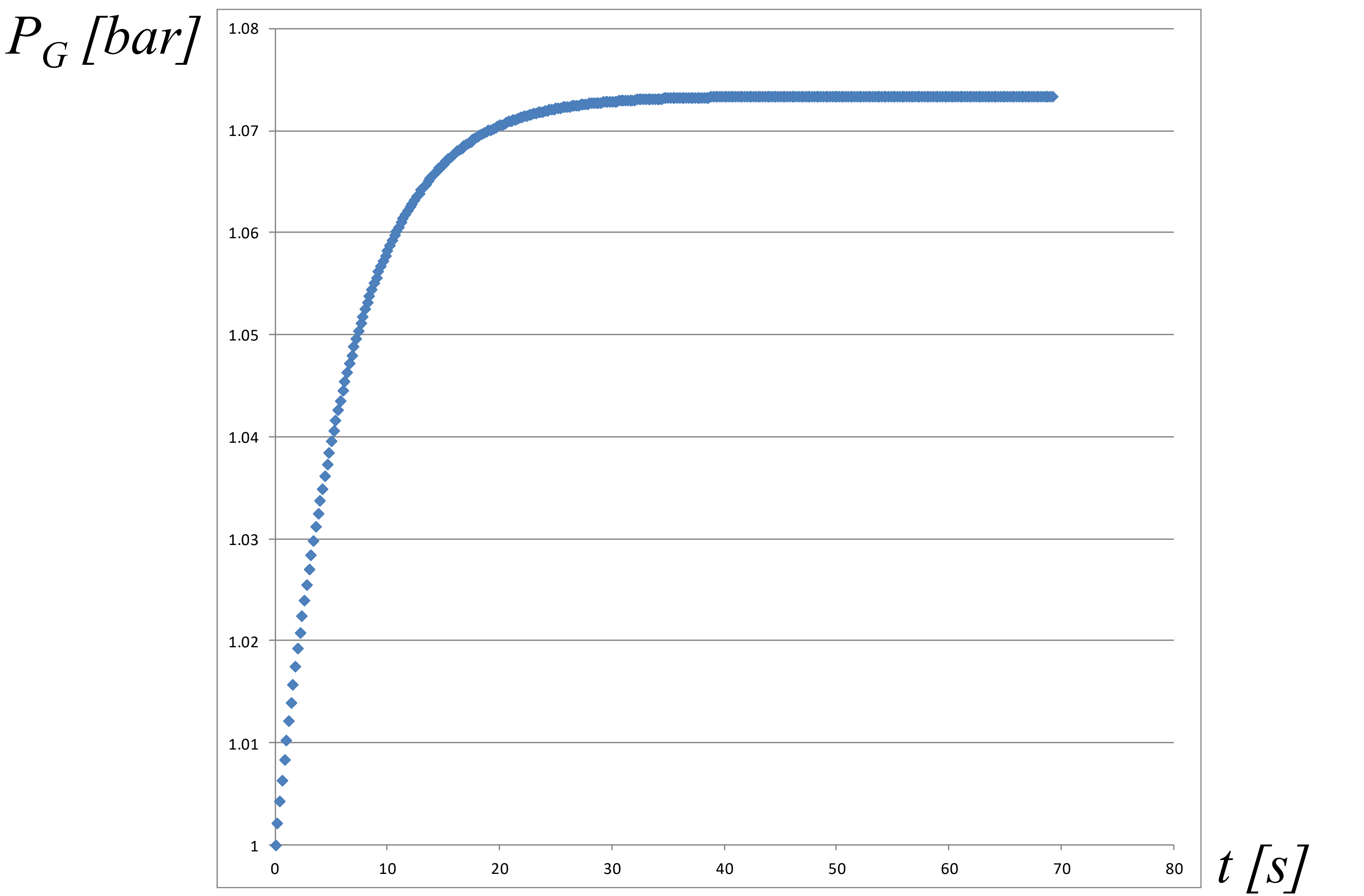
$$A_T \frac{dh}{dt} = C_{v1}\sqrt{\left(P_E - P_G - \rho g h\right)/\rho} - C_{v2}\sqrt{\left(P_G + \rho g h - P_s\right)/\rho}$$

$$P_G = P_G^0\left(V_T - A_T h^0\right)\Big/\left(V_T - A_T h\right)$$

Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Tanque abierto con entrada y descarga regulada por válvula



Sistema de EDOs

Un sistema de EDOs es una expresión de la forma:

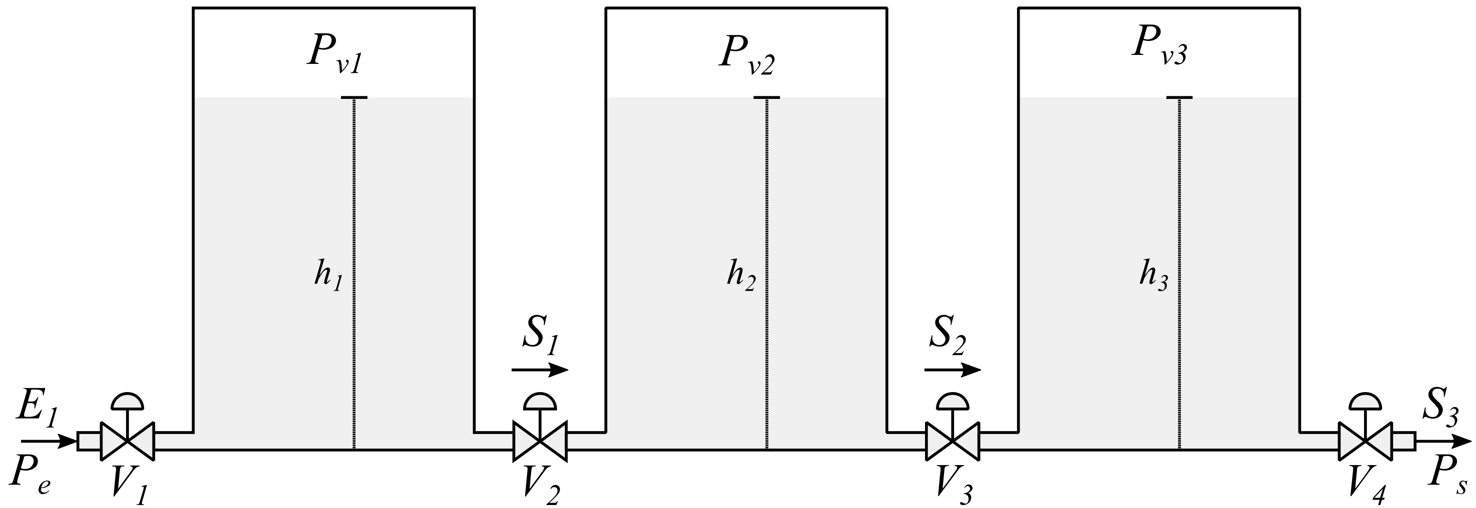
$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m\right) = 0 \end{cases}$$

Introducción

Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$$

Tanques en serie



$$\frac{dM_1}{dt} = m_{e1} - m_{s1} \xrightarrow{\rho\, cte} A_{T_1}\frac{dh_1}{dt} = E_1 - S_1$$

$$\frac{dM_2}{dt} = m_{e2} - m_{s2} \xrightarrow{\rho\, cte} A_{T_2}\frac{dh_1}{dt} = E_2 - S_2$$

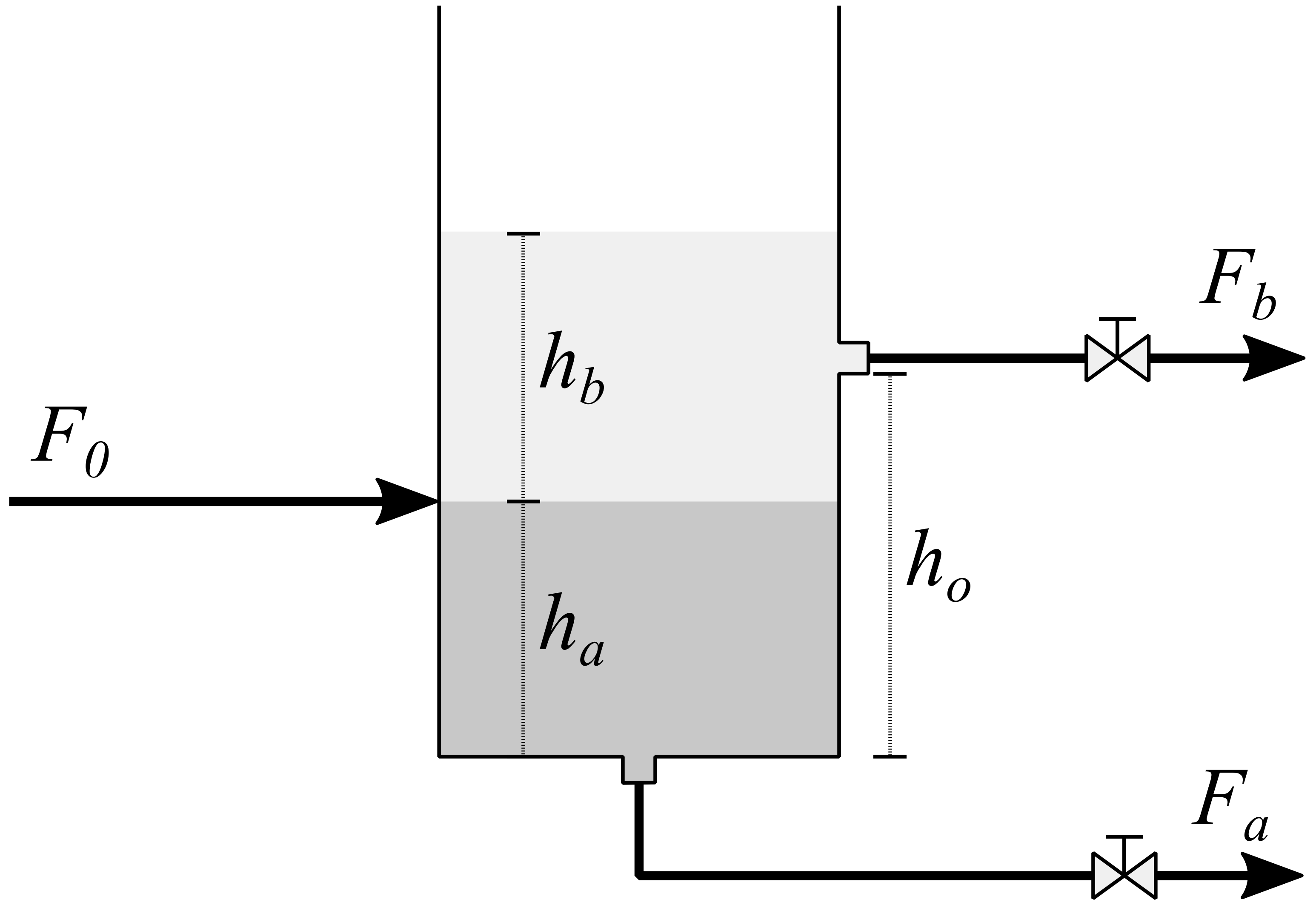
$$\frac{dM_3}{dt} = m_{e3} - m_{s3} \xrightarrow{\rho\, cte} A_{T_3}\frac{dh_3}{dt} = E_3 - S_3$$

$$A_{T_1}\frac{dh_1}{dt} = E_1 - S_1$$

$$A_{T_2}\frac{dh_1}{dt} = S_1 - S_2$$

$$A_{T_3}\frac{dh_3}{dt} = S_2 - S_3$$

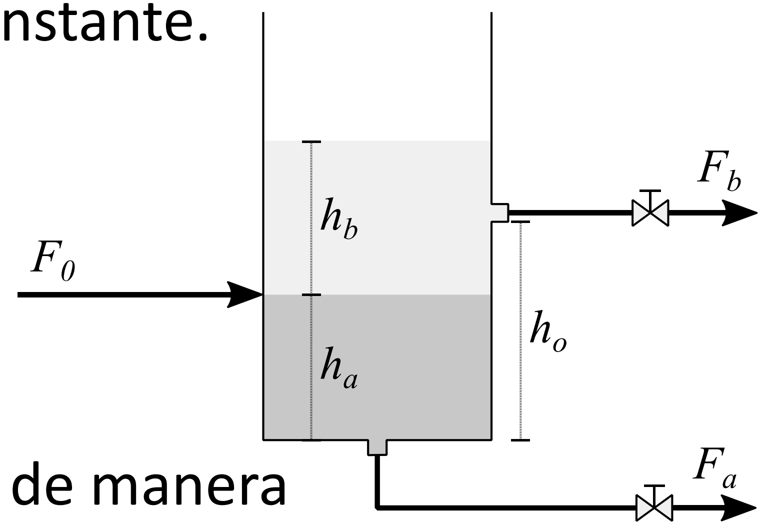
Ejemplo: Decantador con válvulas manuales



Ejemplo: Decantador con válvulas manuales

Hipótesis

- Sistema adiabático.
- La densidad de ambos fluidos es constante.
- No hay reacción química.
- Tanque cilíndrico.
- Presiones de salida conocidas.
- Caudal de alimentación constante.
- El equilibrio entre fases se produce de manera instantánea.
- Las válvulas se operan de manera manual y son del tipo on/off
- Líquidos perfectamente inmiscibles



Ejemplo: Decantador con válvulas manuales

- Balance de materia por componentes en el tanque:

$$\frac{dM_a}{dt} = m_{ea} - m_{sa}$$

sale

entra

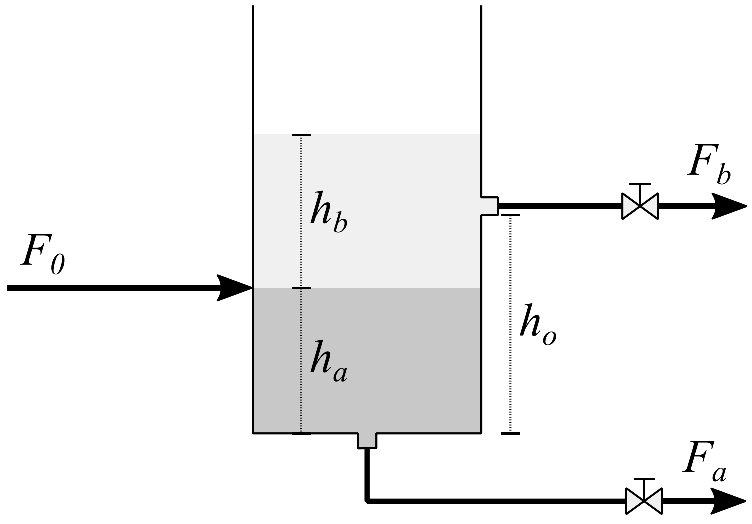
variación

$$\frac{d\rho_a A_T h_a}{dt} = \rho_a F_0 w_a - \rho_a F_a$$

Fracción en volumen

$$\boxed{A_T \frac{dh_a}{dt} = F_0 w_a - F_a}$$

$$\boxed{A_T \frac{dh_b}{dt} = F_0 w_b - F_b}$$



Ejemplo: Decantador con válvulas manuales

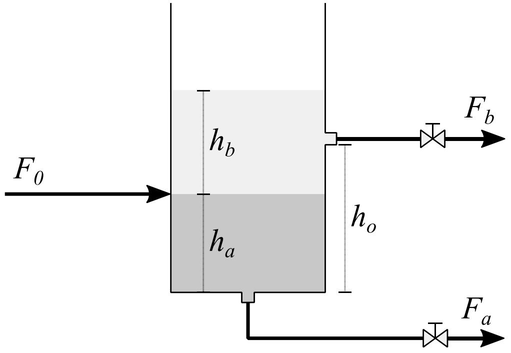
- Caudales de salida (válvulas abiertas):

$$F_a = Cv_a \sqrt{\frac{\Delta P_a}{\rho_a}} \rightarrow \Delta P_a = P_0 + \rho_a g h_a + \rho_b g h_b - P_0$$

Suponemos presión de descarga idéntica a la superior

$$F_a = Cv_a \sqrt{\frac{\rho_a g h_a + \rho_b g h_b}{\rho_a}}$$

$$\boxed{F_a = Cv_a \sqrt{g h_a + r g h_b}} \leftarrow r = \frac{\rho_b}{\rho_a}$$

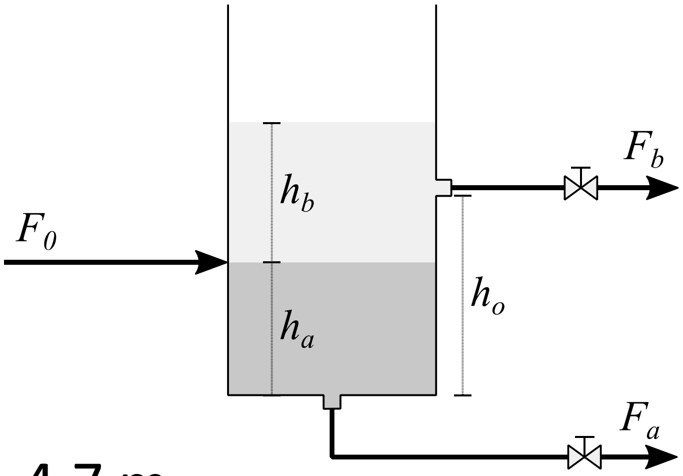


$$F_b = Cv_b \sqrt{\frac{\Delta P_b}{\rho_b}} \rightarrow \Delta P_b = P_0 + \rho_b g \left(h_a + h_b - h_o\right) - P_0$$

$$F_b = Cv_b \sqrt{\frac{\rho_b g \left(h_a + h_b - h_o\right)}{\rho_b}}$$

$$\boxed{F_b = Cv_b \sqrt{g \left(h_a + h_b - h_o\right)}}$$

Ejemplo: Operación de un decantador



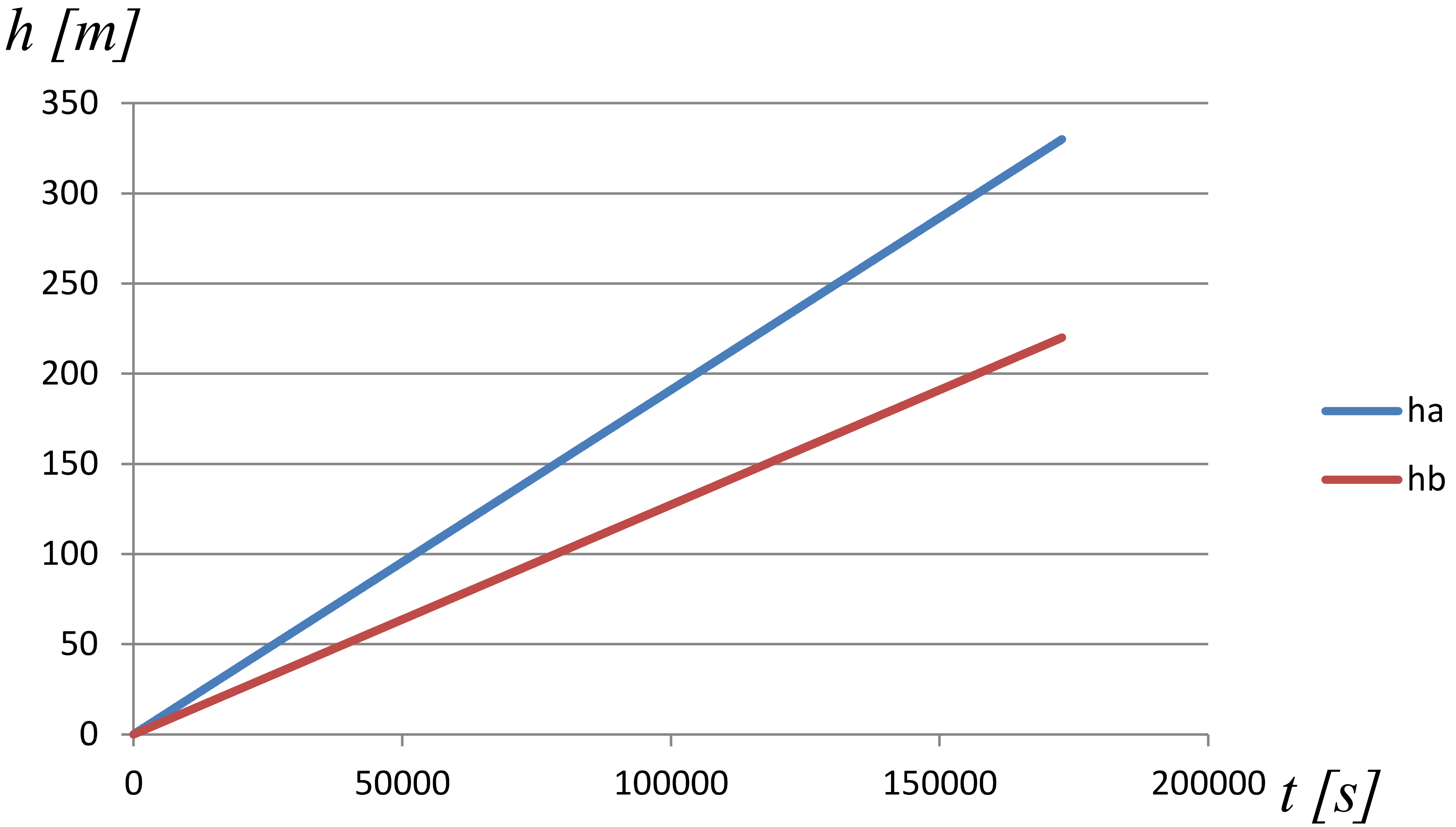
Ejemplo practico:

- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Altura del orificio de salida superior: h_o = 4.7 m
- Caudal de entrada: 0.01 m^3/seg
- C_{va} y C_{vb} de las válvulas: 0.00072 m^2
- Relación de densidad del fluido: *r = 0.8*
- Fracción en volumen de alimentación: w_a=0.6 y w_b=0.4

Consideramos que no existe compresión o expansión en el mezclado

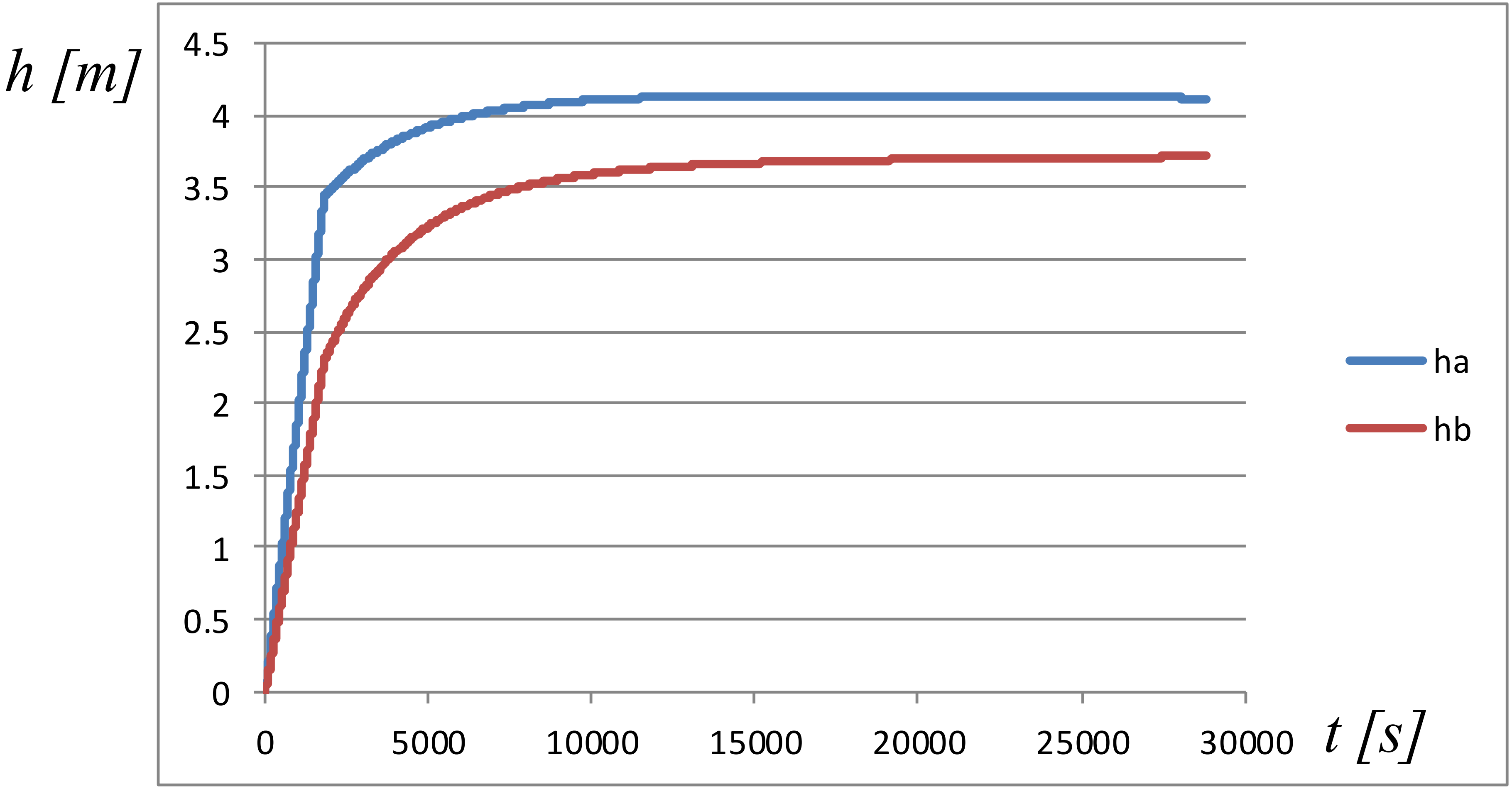
Ejemplo: Operación de un decantador

- Si no se abre ninguna de las válvulas el tanque rebalsa:



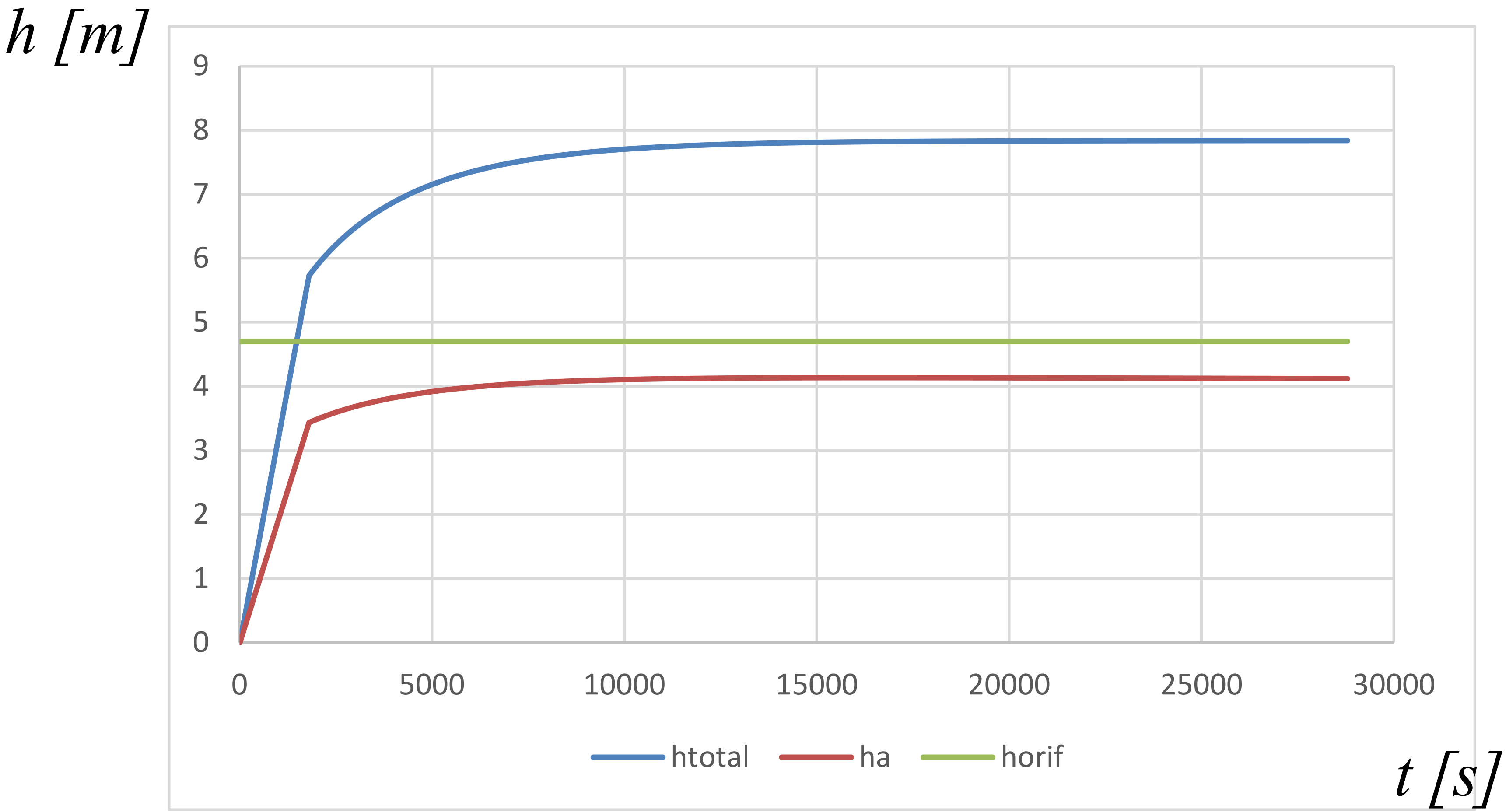
Ejemplo: Operación de un decantador

- Al observa la evolución de la altura se propuso abrir las dos válvulas a la media hora de transcurrido el llenado:



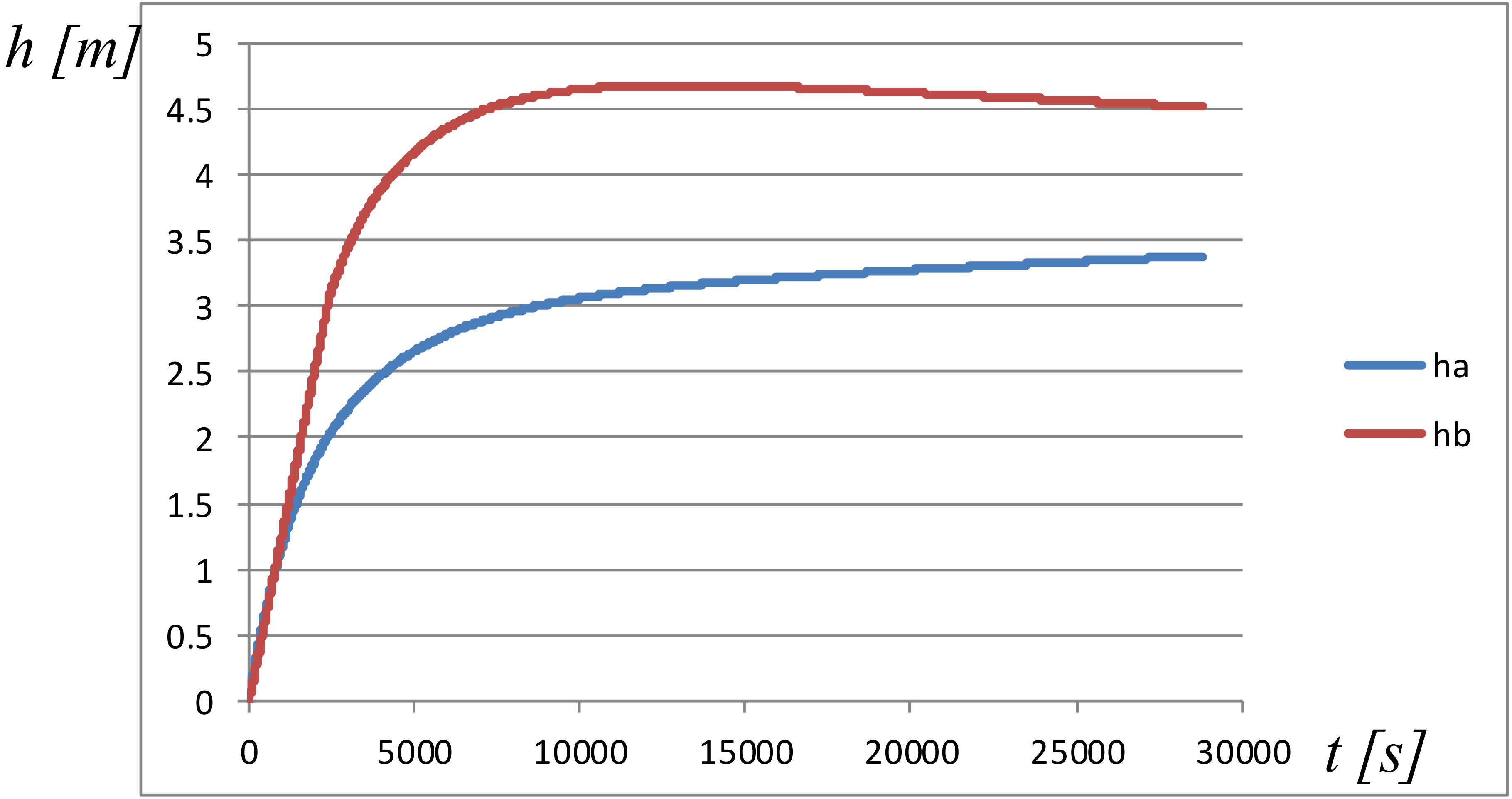
Ejemplo: Operación de un decantador

- Al observa la evolución de la altura se propuso abrir las dos válvulas a la media hora de transcurrido el llenado:



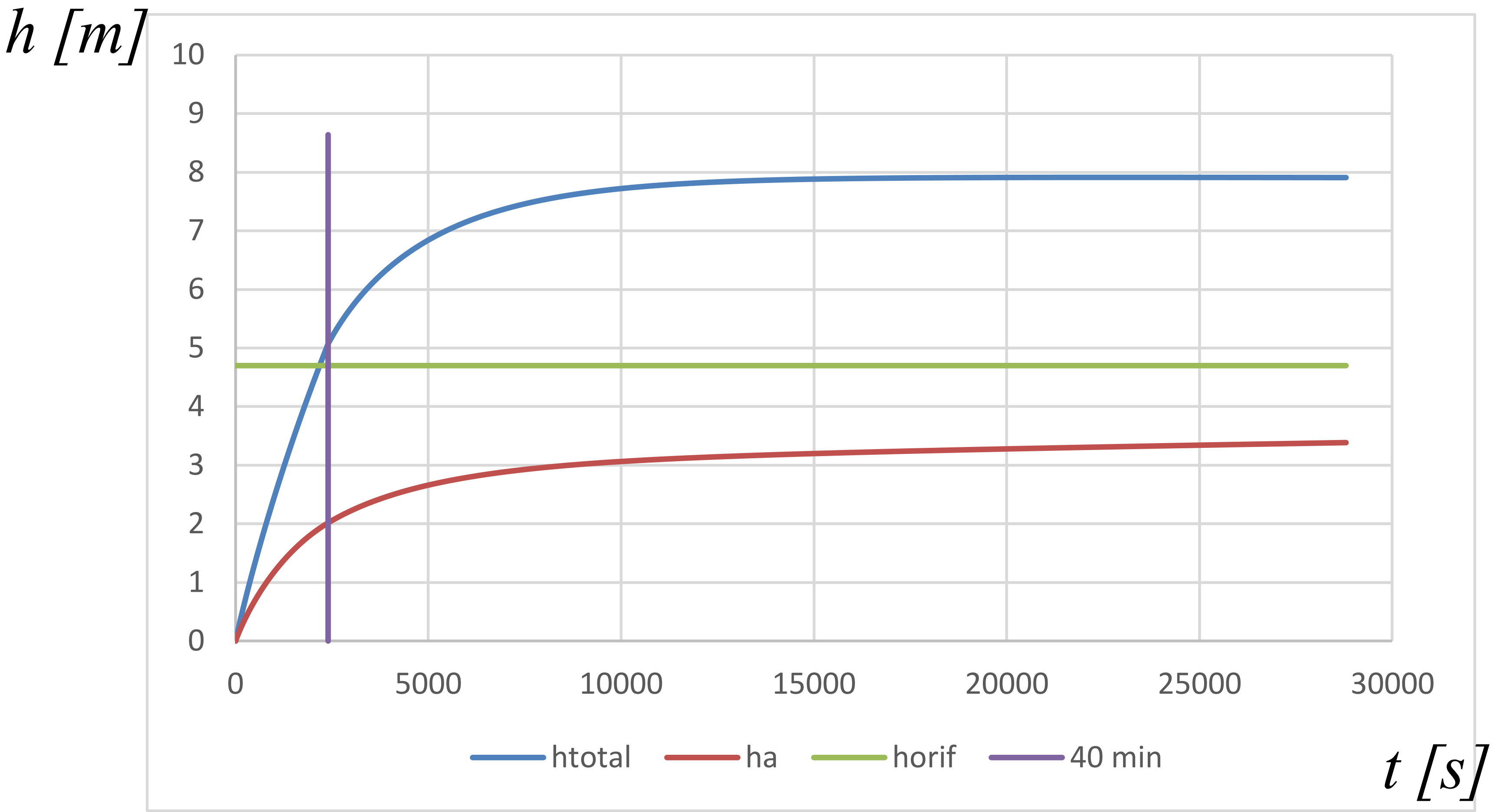
Ejemplo: Operación de un decantador

- Otra alternativa es comenzar con la válvula de fondo abierta y activar la superior a los 40 minutos de transcurrido el llenado:

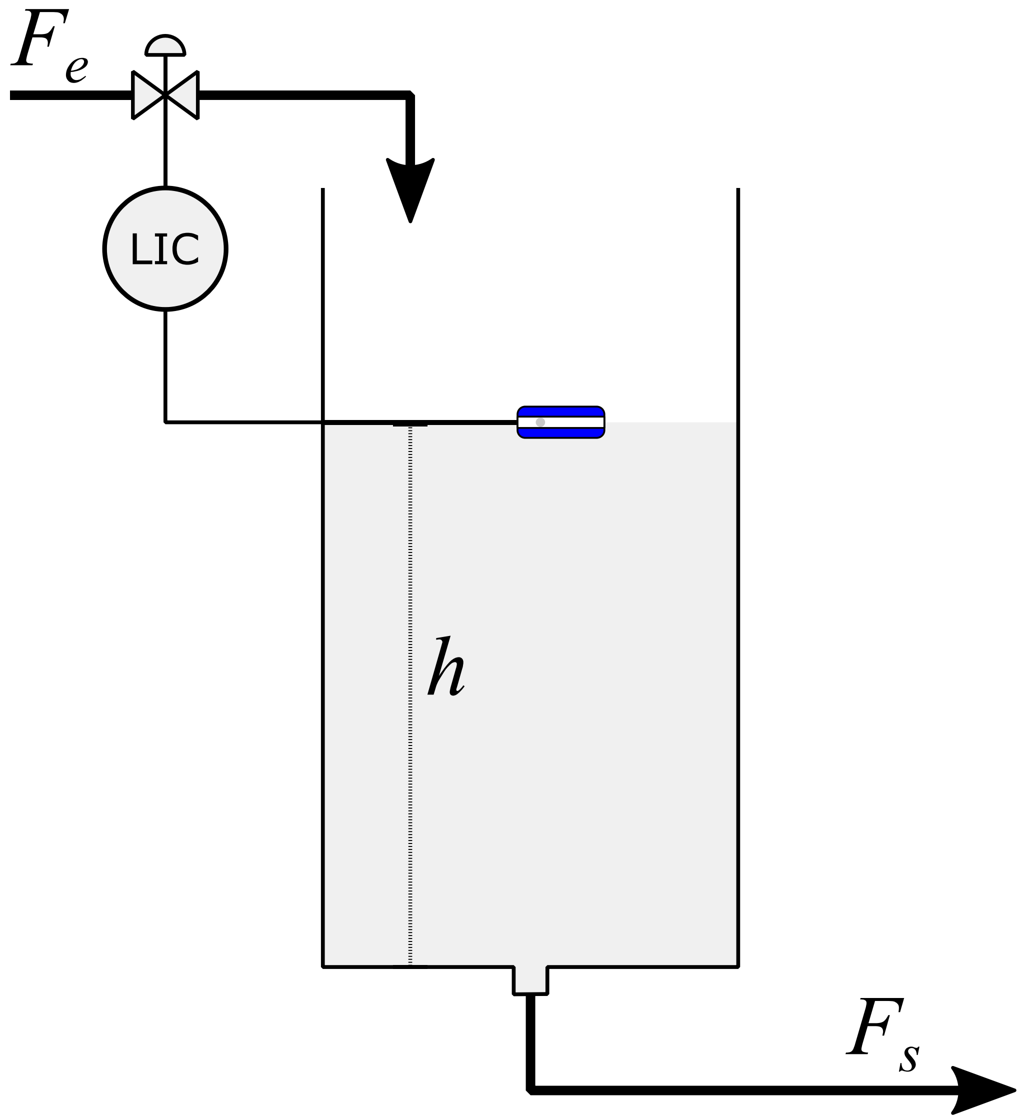


Ejemplo: Operación de un decantador

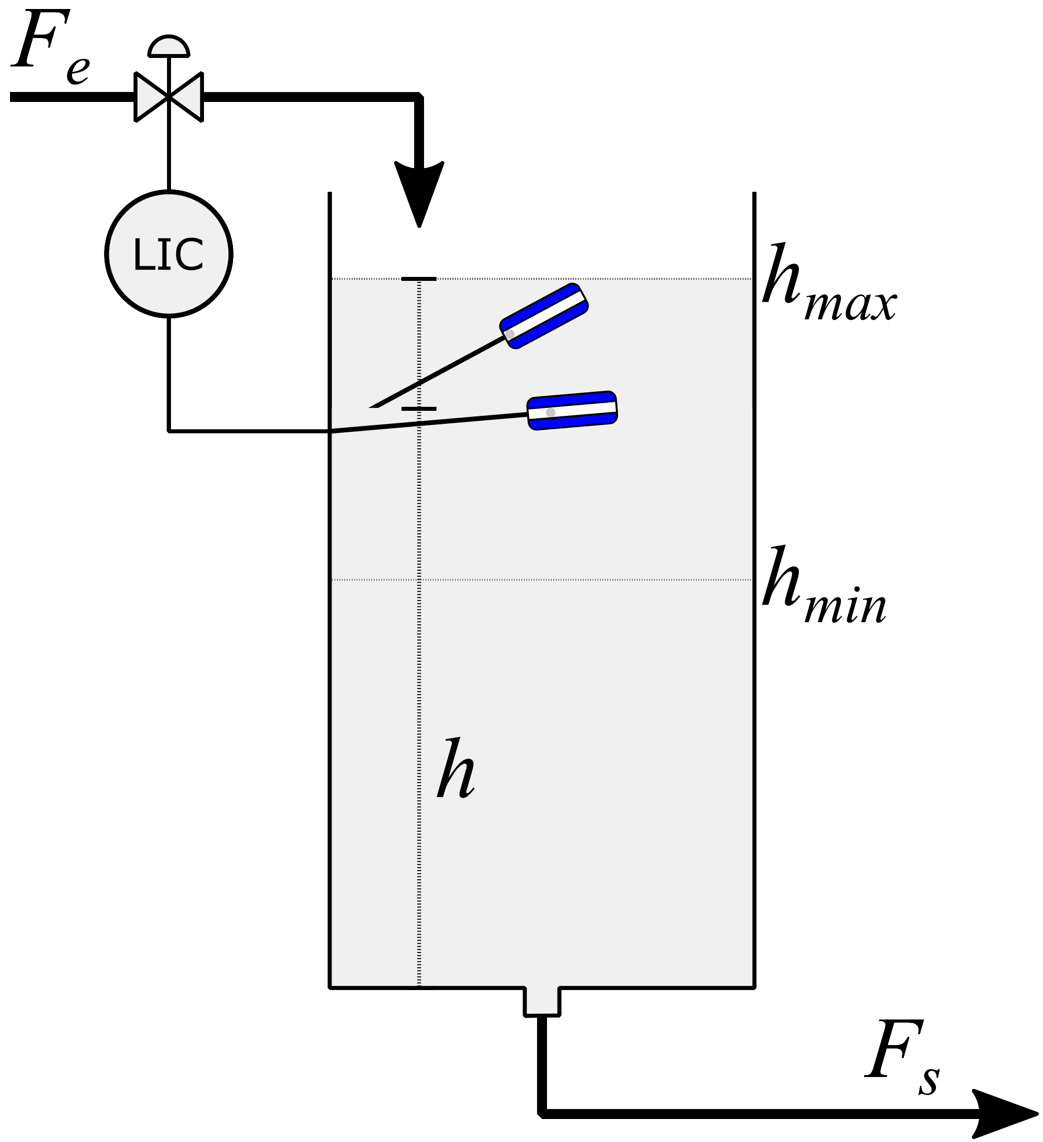
- Otra alternativa es comenzar con la válvula de fondo abierta y activar la superior a los 40 minutos de transcurrido el llenado:



Ejemplo: Control de nivel con un flotante



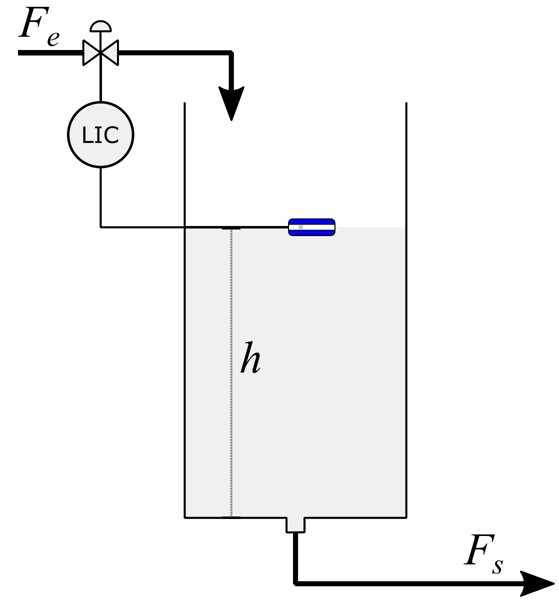
Ejemplo: Control de nivel con un flotante



Ejemplo: Control de nivel con un flotante

Hipótesis:

- Sistema adiabático
- Densidad constante
- No hay reacción química
- Se desprecia la evaporación
- Tanque cilíndrico
- Control on/off mediante un flotante

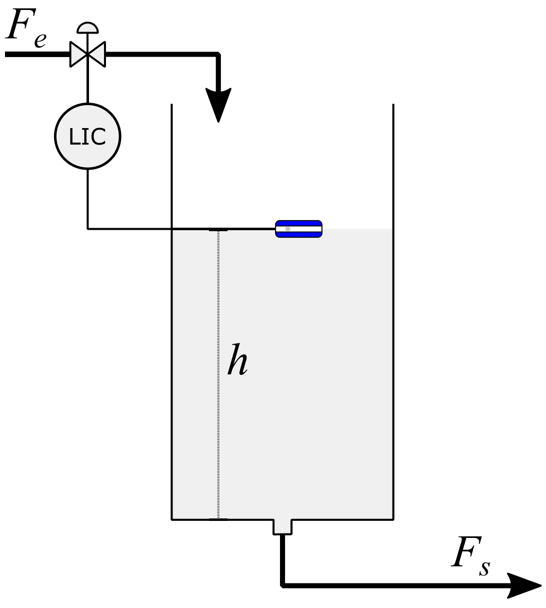


Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Balance de materia en el tanque:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e}{A_T} - \frac{A_s}{A_T}\sqrt{2gh}$$

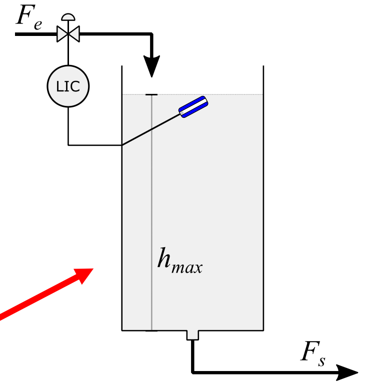
Similar al tanque abierto con salida gravitatoria

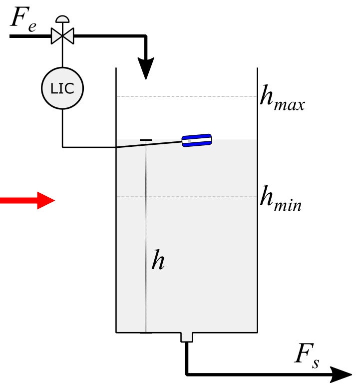


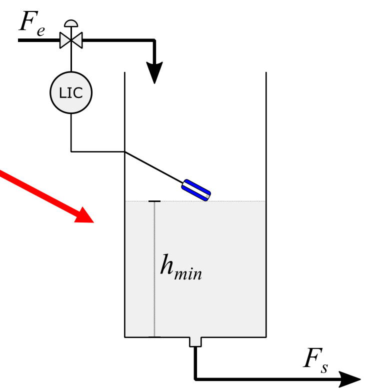
Ejemplo: Control de nivel con un flotante

- Caudal de entrada:

$$F_{e_i} \begin{cases} 0 & si \quad h_i \geq h_{\max} \\ F_{e_{i-1}} & si \quad h_{\min} < h_i < h_{\max} \\ F & si \quad h_i \leq h_{\min} \end{cases}$$



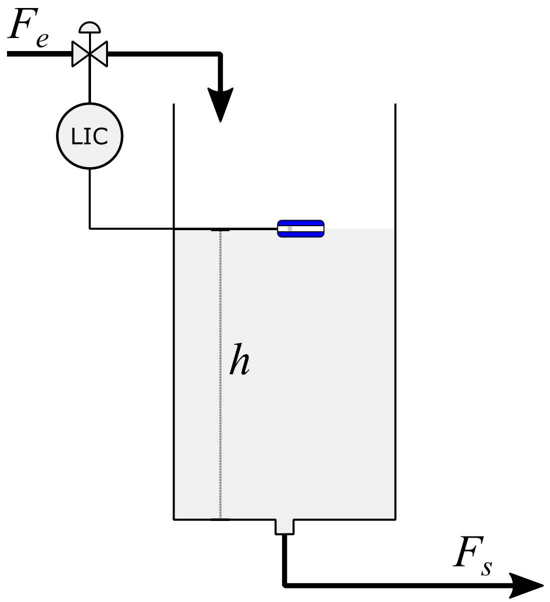




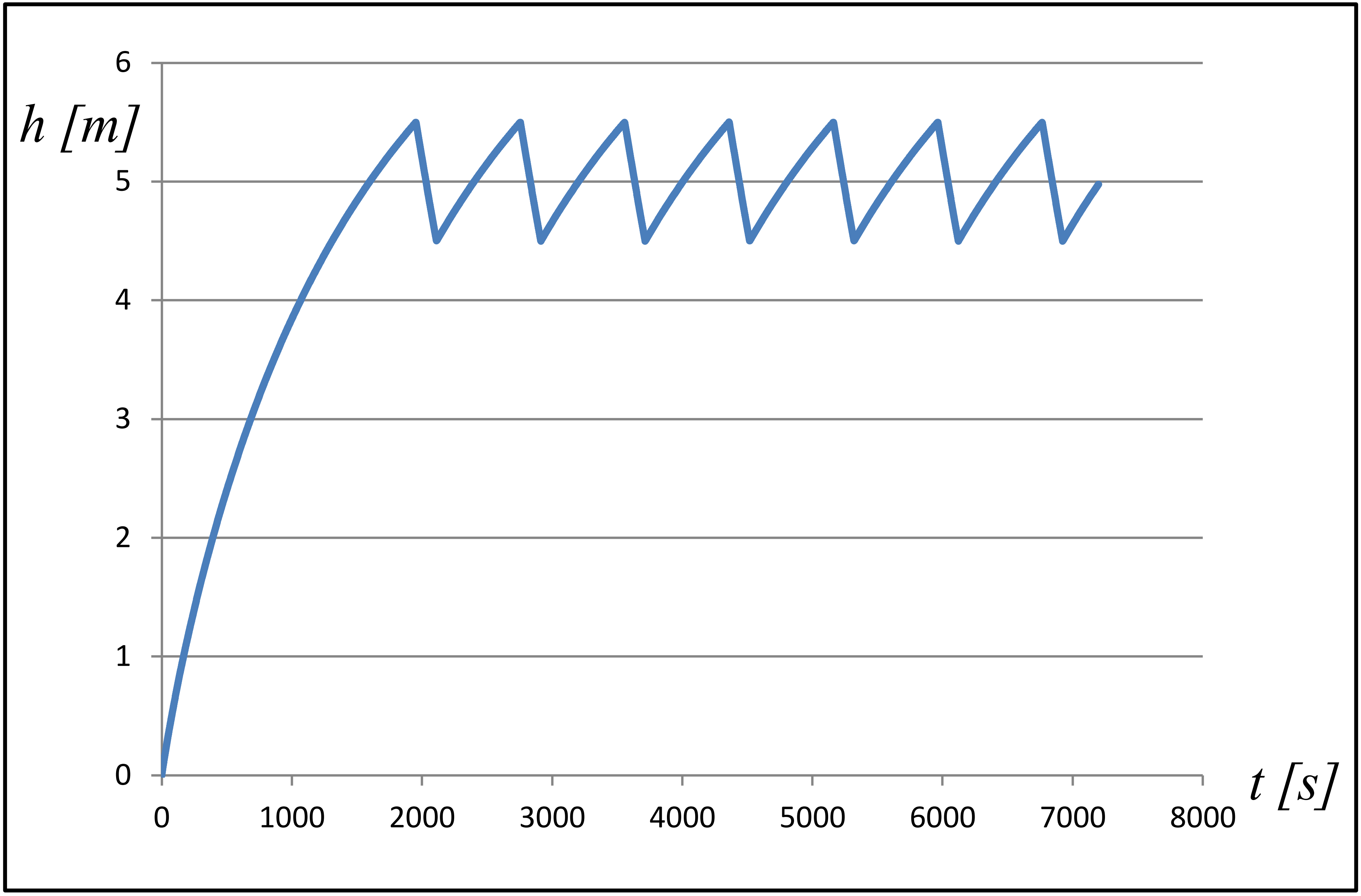
Ejemplo: Control de nivel con un flotante

Ejemplo practico:

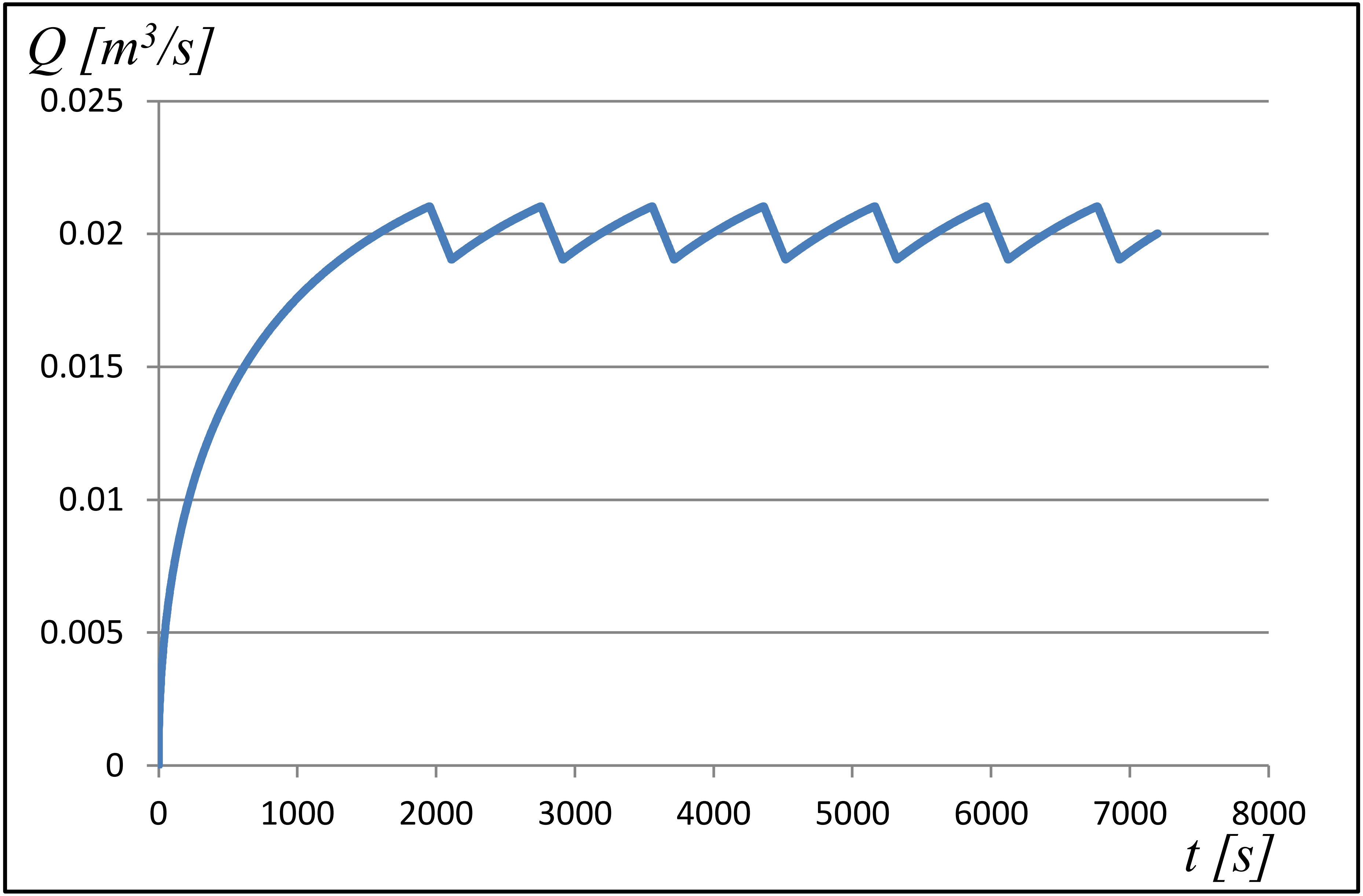
- Altura inicial del tanque: 0 m (vacío)
- Diámetro del tanque: 2 m
- Diámetro del orificio de salida tanque: 0.0508 m
- Caudal de entrada al activarse la válvula: F=0.025 m^3/seg
- Rango del flotante: $h_{min} = 4.5\ m$ y $h_{max} = 5.5\ m$



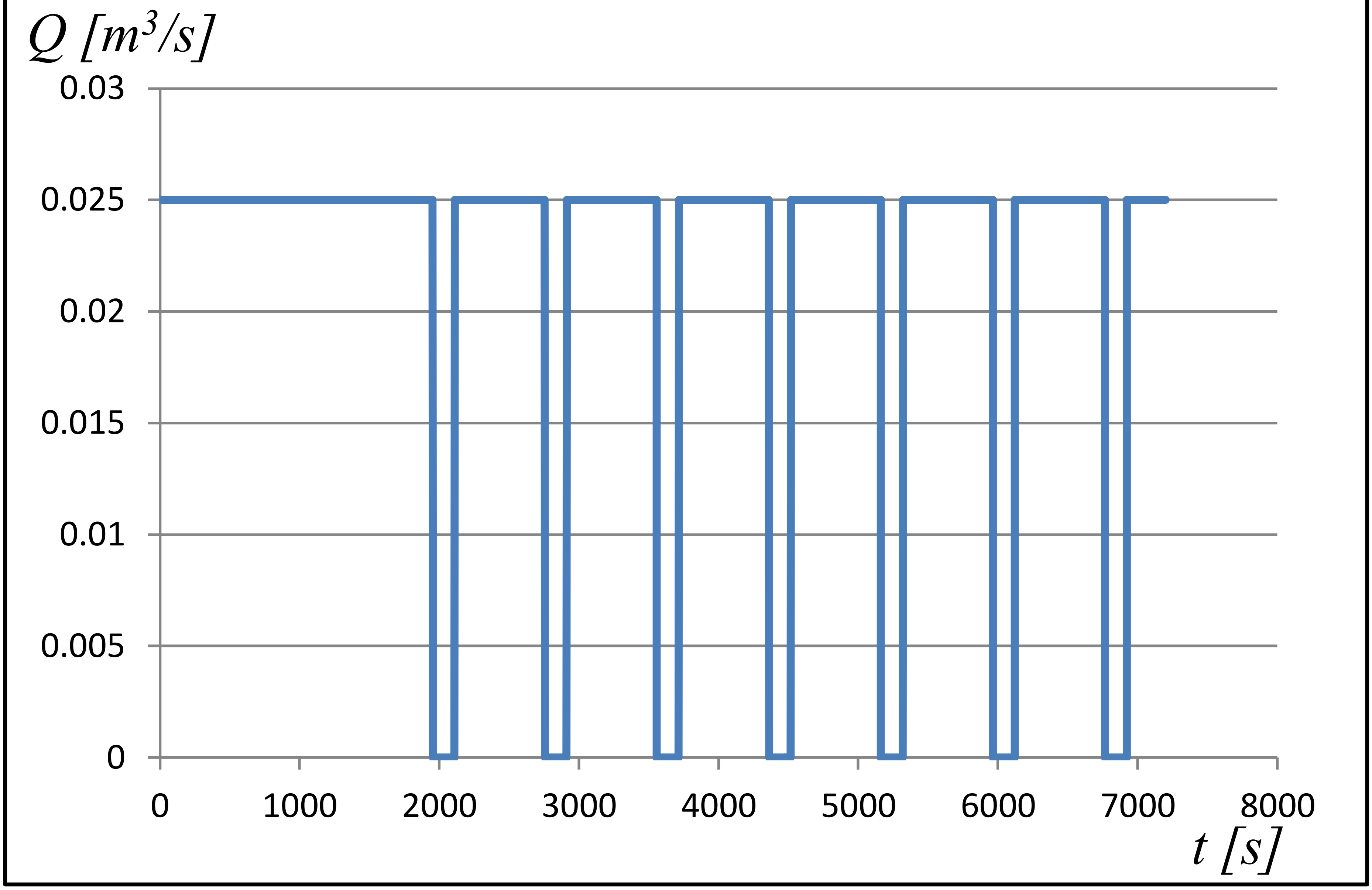
Control de nivel con un flotante (altura vs tiempo)



Control de nivel con un flotante (caudal de salida vs tiempo)



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)



Control de nivel con un flotante (caudal de entrada vs tiempo)